

ΠΡΩΤΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

Παρασκευή, 3/11/2006

1. Αν $X_n \rightarrow X$ σχεδόν σίγουρα, δείξτε ότι συγκλίνουν και κατά πιθανότητα.
2. Δείξτε ότι ο μετρικός χώρος $C([0, 1])$, με την L^∞ μετρική, έχει αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο.
3. Αν μ είναι μέτρο πιθανότητας στο \mathbb{R} κατασκευάστε μια ακολουθία μ_n από μέτρα πιθανότητας που συγκλίνουν ασθενώς στο μ και τ.ώ. τα μ_n είναι πεπερασμένοι γραμμικοί συνδυασμοί από μάζες Dirac, μέτρα δηλ. της μορφής $\sum_{j=1}^N c_j \delta_{x_j}$, όπου $x_j \in \mathbb{R}$ και $c_j > 0$.
4. Δώστε μια ακολουθία μ_n από μέτρα πιθανότητας πάνω στο \mathbb{R} που να μην έχει υπακολουθία που να συγκλίνει ασθενώς.
5. Δώστε μια ακολουθία μ_n από μέτρα πιθανότητας στο \mathbb{R} που συγκλίνουν ασθενώς σε ένα μέτρο μ αλλά είναι τέτοια ώστε η ακολουθία $\int_{\mathbb{R}} x d\mu_n(x)$ δε συγκλίνει στο $\int_{\mathbb{R}} x d\mu(x)$.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες. Όλες οι σημειώσεις και βιβλία πρέπει να είναι κλειστά. Όλες οι απαντήσεις σας θα πρέπει να είναι επαρκώς τεκμηριωμένες.

Καλή επιτυχία. – Μιχάλης Κολουτζάκης