3.96

Θα ξεκινήσουμε από το διωνυμικό θεώρημα όταν $a=x$, $b=1$ και θα παραγωγίσουμε τη σχέση που προκύπτει ως προς x, δηλαδή θα έχουμε:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} x^k \Rightarrow$$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \overset{d/dx}{\Rightarrow}$$

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1}$$

Θα πολλαπλασιάσουμε τη σχέση με το x

$$x \cdot n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^k \overset{d/dx}{\Rightarrow}$$

$$n(1+x)^{n-1} + x \cdot n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 x^{k-1}$$

Θέτοντας τώρα για $x=1$ προκύπτει:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 = n 2^{n-1} + n(n-1) 2^{n-2}$$

που είναι το ζητούμενο.