Άσκηση 3.22

Αν $k_1, k_2, \dots k_p$ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι με $k_1 + k_2 + \dots + k_p = n+1$

ισχύει:
$$\binom{n+1}{k_1, k_2, \dots, k_p} = \binom{n}{k_1-1, k_2, \dots, k_p} + \binom{n}{k_1, k_2-1, \dots, k_p} + \dots \dots +$$

$$\dots + \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_p-1}$$

<u>Για το αριστερό μέρος της ισότητας:</u>

Τα $k_1, k_2, \dots, k_p$ στην ουσία είναι μια διαμέριση του αρχικού συνόλου, το οποίο έχει $n+1$ στοιχεία σε p ομάδες όπου η πρώτη έχει k_1 στοιχεία η δεύτερη έχει k_2 στοιχεία κ.τ.λ.

<u>Για το δεξί μέρος της ισότητας:</u>

Στην ουσία αποσπάμε ένα στοιχείο από το αρχικό σύνολο.

Αυτό το στοιχείο αναγκαστικά θα λείπει από κάποιο από τα $k_1, k_2, \dots, k_p$

⇒ Για την περίπτωση που λείπει από το k_1 έχω

$\binom{n}{k_1-1, k_2, \dots, k_p}$ τρόπους να χωρίσω το σύνολο με n στοιχεία σε p ομάδες από τις οποίες η μία έχει k_1-1 στοιχεία.

⇒ Για την περίπτωση που λείπει από το k_2 έχω

$\binom{n}{k_1, k_2-1, \dots, k_p}$ τρόπους να χωρίσω το σύνολο με n στοιχεία σε p ομάδες από τις οποίες η μία έχει k_2-1 στοιχεία.

Εφόσον αυτά είναι ξένα μεταξύ τους, αλλά προσθέτω:

$$\binom{n}{k_1-1, k_2, \dots, k_p} + \binom{n}{k_1, k_2-1, \dots, k_p} + \dots + \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_p-1}$$