2.29

Στο πρόβλημα αυτό θέλουμε να αποδείξουμε ότι :

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

Γνωρίζουμε ότι το δεξί μέρος μετρά το πλήθος όλων των δυνατών υποσυνόλων του συνόλου $[n]$.

Επίσης ξέρουμε ότι :

Η παράσταση $\binom{n}{0}$ μετρά τα μηδενοσύνολα, δηλαδή το κενό.

Η παράσταση $\binom{n}{1}$ μετρά τα μονοσύνολα, δηλαδή το πλήθος του συνόλου

$\{ \{1\}, \{2\}, \ldots, \{n-1\}, \{n\} \}$, το οποίο είναι n.

Η παράσταση $\binom{n}{2}$ μετρά τα $2-$σύνολα, δηλαδή το πλήθος του συνολου

$\{ \{1, 2\}, \{1, 3\}, \ldots, \{n-2, n\}, \{n-1, n\}\}$.

.
.
.

Η παράσταση $\binom{n}{n}$ μετρά τα $n-$σύνολα, δηλαδή το πλήθος του συνόλου $\{\{1, 2, \ldots, n\} \}$, το οποίο είναι 1.

Οπότε βλέπουμε ότι και η παράσταση

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

μετρά επισης το πλήθος των υποσυνόλων του $[n]$ μεγέθους k με $0 \leq k \leq n$.

Άρα η πρόταση ισχύει.