Άσκηση 2.16

Πόσους διαιρέτες έχει ο φυσικός αριθμός

(1) $\quad n=p_1^{v1}p_2^{v2}\ldots p_k^{vk}$

Ο n έχει γραφτεί σαν γινόμενο δυνάμενων ξένων μεταξύ τους πρώτων αριθμών p_j. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το θεμελιώδες που λέει ότι κάθε φυσικός αριθμός n γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή (1), εκτός ίσως από την σειρά των παραγόντων.

Εφαρμόστε το αποτέλεσμά σας στον αριθμό 100 και απαριθμείστε και τους διαιρέτες του έναν-έναν μαζί με το ανάπτυγμα του καθενός σε γινόμενο πρώτων.

Λύση

Αν ο d είναι διαιρέτης του n τότε ο d γράφεται στην μορφή

$d=p_1^{a1}p_2^{a2}\ldots p_k^{ak}$, $\quad$ **με** $a_i=0,1,\ldots,v_i$, $i=1,2,\ldots,k$ **(2)**

οπότε έχουμε πως οι διαιρέτες του n εξαρτώνται από την δύναμη που θα έχουν κάθε φορα τα p_i, $i=1,2,\ldots,k$. Άρα όλες οι επιλογές που μπορούμε κάνουμε για τα a_i , $i=0,1,\ldots v_i$, , $i=1,2,\ldots,k$ του (2) είναι και το πλήθος των διαιρετών του n.

Οπότε για το a_1 έχουμε **(v_1+1)** επιλογές

Για το a_2 έχουμε **(v_2+1)** επιλογές

.

.

.

Για το a_k έχουμε **$(v_\kappa+1)$** επιλογές.

Άρα

#{διαιρέτες του n}=$(v_1+1)(v_2+1)\ldots(v_\kappa+1)$, (3)

Για $n=100=2^2 5^2$ από τον παραπάνω τύπο έχουμε πως το πλήθος των διαιρετών του 100 θα είναι

#{διαιρέτες του 100}=(2+1)(2+1)=3*3=9

Οι διαιρέτες του 100 είναι:

i. $1=2^0 5^0$	iv. $5=2^0 5^1$	vii. $25=2^0 5^2$
ii. $2=2^1 5^0$	v. $10=2^1 5^1$	viii. $50=2^1 5^2$
iii. $4=2^2 5^0$	vi. $20=2^2 5^1$	ix. $100=2^2 5^2$