Άσκηση 2.13

Αν A={-n,-n+1,…, n-1,n} ποιο το πλήθος των συναρτήσεων $A \to A$ που είναι άρτιες, πληρούν δηλαδή f(-x)=f(x) για όλα τα $x \in A$.

Λύση

Έχουμε πως A={-n,-n+1,…,n-1,n} και οπότε το |A|=2n+1.

Για να είναι μία συνάρτηση άρτια, όπως αναφέρει και η άσκηση, πρέπει f(-x)=f(x) για όλα τα $x \in A$.

Για να βρούμε πόσες είναι οι άρτιες συναρτήσεις $A \to A$ αρκεί να μετρήσουμε πόσες επιλογές έχει το κάθε $x \in A$ ώστε να ικανοποιεί τον περιορισμό πως η f πρέπει να είναι άρτια. Δηλαδή να μετρήσουμε πόσα είναι τα δυνατά f(x) για το κάθε $x \in A$.

Στον παρακάτω πίνακα μπορούμε να δούμε ξεχωριστά για το καθένα από αυτά τα $x \in A$.

$x \in A$	Πόσες είναι οι επιλογές για το f(x)	Παρατηρήσεις.
n n-1 . . . 1 0	2n+1 2n+1 . . . 2n+1 2n+1	Σε αυτές τις περιπτώσεις **δεν** έχουμε κάποιον περιορισμό για το κάθε $x \in \{0,...n\}$. Οπότε καθένα από αυτά έχει όλες τις δυνατές επιλογές. Άρα έχει **2n+1** επιλογές.
-1 -2 . . . -n+1 -n	1 1 . . . 1 1	Από την άλλη σε αυτές τις περιπτώσεις το $x \in \{-1,...-n\}$ το f(x)=f(-x) οπότε σε κάθε ένα από αυτά τα x αντιστοιχεί μόνο **ΜΙΑ** δυνατή επιλογή.

Οπότε το πλήθος των άρτιων συναρτήσεων θα είναι $(2n+1)*\ldots*(2n+1)*1*1*\ldots*1=(2n+1)^{(n+1)}$.