Πρώτο διαγώνισμα (μέρος ερωτήσεων πολλαπλών επιλογών), 31 Οκτωβρίου 2010

Πρόβλημα 1. Από ένα σύνολο N ανδρών και M γυναικών πρέπει να επιλεγεί πρόεδρος (άνδρας), αντιπρόεδρος (γυναίκα) και τρία μέλη, όχι όλα του ίδιου φύλου. Πόσες είναι οι δυνατές επιλογές;

A: $\frac{1}{2}N(N-1)M(M-1)(M+N-4)$ B: $N(N-1)M(M-1)(M+N-4)$ C: $\binom{N}{2}\binom{M}{3}+\binom{N}{3}\binom{M}{2}$ D: $\frac{1}{5!}\left(\binom{N}{2}\binom{M}{3}+\binom{N}{3}\binom{M}{2}\right)$

Απάντηση: Το σωστό είναι το A. Επιλέγουμε πρώτα πρόεδρο και αντιπρόεδρο (NM επιλογές) και για τα υπόλοιπα τρία μέλη μπορούμε είτε να πάρουμε δύο άνδρες και μια γυναίκα είτε ένα άνδρα και δύο γυναίκες. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε $\binom{N-1}{2}(M-1)$ επιλογές ενώ στη δεύτερη έχουμε $(N-1)\binom{M-1}{2}$ επιλογές, άρα το τελικό αποτέλεσμα είναι το γινόμενο

$$NM\left[\binom{N-1}{2}(M-1)+(N-1)\binom{M-1}{2}\right]=\frac{1}{2}N(N-1)M(M-1)(M+N-4).$$

Πρόβλημα 2. Σε μια σχολή χορού υπάρχουν 10 άνδρες και 8 γυναίκες. Με πόσους τρόπους μπορούν να επιλεγούν 4 άνδρες και 4 γυναίκες και να σχηματίσουν ζευγάρια χορού (δε μας ενδιαφέρει η σειρά των ζευγαριών);

A: $24\binom{10}{4}\binom{8}{4}$ B: $\binom{10}{4}\binom{8}{4}$ C: $10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5$ D: 8^4

Απάντηση: Το σωστό είναι το A. Επιλέγουμε πρώτα τους 4 άνδρες ($\binom{10}{4}$ επιλογές) και τις 4 γυναίκες ($\binom{8}{4}$ επιλογές). Απομένει να αποφασίσουμε ποιος από τους 4 άνδρες θα χορέψει με ποια από τις 4 γυναίκες. Αυτό γίνεται με $4!=24$ τρόπους αφού αρκεί να σταθεροποιήσουμε μια σειρά για τους άνδρες και μετά να πάρουμε κάθε δυνατή μετάθεση των 4 γυναικών ως τα ταίρια των ανδρών.

Πρόβλημα 3. Πόσα **διατεταγμένα ζεύγη** υπάρχουν με στοιχεία από το σύνολο $\{1,2,\ldots,100\}$ ώστε το ένα στοιχείο του ζεύγους να είναι διπλάσιο του άλλου;

A: 100 B: 50 C: 200 D: 99

Απάντηση: Το σωστό είναι το A. Τα ζεύγη είναι τα

$$(1,2),(2,4),(3,6),\ldots,(49,98),(50,100)$$

και

$$(2,1),(4,2),(6,3),\ldots,(100,50).$$

Πρόβλημα 4. Πόσες διαφορετικές λέξεις υπάρχουν που περιέχουν ακριβώς 6 γράμματα Α, 6 γράμματα Β και 6 γράμματα Γ;

A: $\binom{18}{6,6,6}$ B: 3^{18} C: $\binom{18}{6}^3$ D: $\frac{18!}{3\cdot 6!}$

Απάντηση: Το σωστό είναι το A. Μοιράζουμε τις 18 θέσεις μιας λέξης σε τρεις κατηγορίες μεγέθους 6 η καθεμία, τις κατηγορίες Α, Β και Γ.

Πρόβλημα 5. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να ζευγαρώσουμε όλους τους άνδρες $m_1,m_2,\ldots,m_k$ με όλες τις γυναίκες $w_1,w_2,\ldots,w_k$ ούτως ώστε ο m_1 να μη ζευγαρώσει με την w_1;

A: $(k-1)^2(k-2)!$ B: $k!-1$ C: $k!/2$ D: 2^k

Απάντηση: Το σωστό είναι το A. Έχουμε $k-1$ επιλογές για τον m_1 αφού εξαιρούμε την w_1. Έπειτα έχουμε $k-1$ επιλογές για τον m_2 αφού εξαιρούμε μόνο τη γυναίκα που διαλέξαμε για τον m_1, $k-2$ επιλογές για τον m_3 αφού εξαιρούμε τις γυναίκες των δύο προηγουμένων, κλπ. Το γινόμενο αυτών είναι $(k-1)(k-1)!=(k-1)^2(k-2)!$.

Πρόβλημα 6. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε δύο υποσύνολα $A,B\subseteq\{1,2,\ldots,n\}$ που να είναι ανά δύο ξένα και επιπλέον να ισχύει $1\in A, 2\in B$;

A: $3^n/9$ B: 3^{n-1} C: 3^n-2 D: 2^n

Απάντηση: Το σωστό είναι το A. Δεν ασχολούμαστε καθόλου με τα στοιχεία 1 και 2 αφού αυτά ξέρουμε που ανήκουν. Επιλέγουμε δύο ξένα υποσύνολα A' και B' του $\{3,4,\ldots,n\}$ και θέτουμε $A=A'\cup\{1\}$, $B=B'\cup\{2\}$. Άρα η απάντηση είναι το με πόσους τρόπους μπορούμε να διαλέξουμε τα A' και B', και αυτή είναι $3^{n-2}=3^n/9$

μια και για κάθε στοιχείο του $\{3,4,\ldots,n\}$ πρέπει να αποφασίσουμε αν θα το βάλουμε στο A', στο B' ή σε κανένα από τα δύο (3 επιλογές).

Πρόβλημα 7. Με πόσους τρόπους μπορεί ο αριθμός 10 να γραφεί ως άθροισμα 5 **θετικών** προσθετέων (η σειρά των προσθετέων έχει σημασία);
A: $\binom{9}{5}$ B: $\binom{14}{4}$ C: $\binom{14}{5}$ D: $\binom{10}{5}$
Απάντηση: Το σωστό είναι το A. Από τον αριθμό 10 παίρνουμε 5 μονάδες και βάζουμε από μια σε κάθε προσθετέο, ώστε να εξασφαλίσουμε ότι στο τέλος της διαδικασίας είναι θετικοί (και όχι 0). Απομένουν άλλες 5 μονάδες να μοιραστούν στους 5 προσθετέους και αυτό γίνεται με

$$\binom{5+5-1}{5-1} = \binom{9}{5} = \binom{9}{4}$$

τρόπους (ο αριθμός $P(5,5)$ των σημειώσεών σας).

Πρόβλημα 8. Η διαφορά $\left\langle {n \atop 3} \right\rangle - \binom{n}{3}$ ισούται με
A: n^2 B: n C: $n(n-1)$ D: $n+\binom{n}{2}$
Απάντηση: Το σωστό είναι το A. Η διαφορά των επιλογών 3 από n με επανάθεση από τα 3 που επιλέγονται χωρίς επανάθεση είναι ακριβώς αυτές οι τριάδες στοιχείων του $\{1,2,\ldots,n\}$ (πάντα χωρίς εσωτερική διάταξη) που περιέχουν επαναλαμβανόμενα στοιχεία. Από αυτές n είναι οι τριάδες με όλα τα στοιχεία ίδια ενώ αυτές που είναι της μορφής a,a,b με $a \neq b$ είναι το πλήθος $n(n-1)$ (επιλέγουμε πρώτα το a και από τα υπόλοιπα το b). Συνολικά έχουμε λοιπόν $n+n(n-1)=n^2$ τέτοιες τριάδες.

Πρόβλημα 9. Πόσες 1 προς 1 συναρτήσεις υπάρχουν από το σύνολο $\{1,2,\ldots,2n\}$ στον εαυτό του τέτοιες ώστε $f(k) \leq n$ για κάθε $k \leq n$;
A: $n!^2$ B: $(2n)!$ C: $2n!$ D: 2^{2n}
Απάντηση: Το σωστό είναι το A. Η συνθήκη $f(k) \leq n$ για κάθε $k \leq n$ σημαίνει ότι όλα τα στοιχεία στο πρώτο μισό απεικονίζονται επίσης στο πρώτο μισό, άρα και το δεύτερο μισό απεικονίζεται στο δεύτερο μισό, αφού η συνάρτηση είναι 1-1. Άρα αρκεί να επιλέξουμε μια μετάθεση των $1,2,\ldots,n$ και άλλη μια των $n+1,n+2,\ldots,2n$. Οι δύο αυτές επιλογές μπορούν να γίνουμε με $n!$ τρόπους η κάθε μία, άρα συνολικά έχουμε το γινόμενό τους, $(n!)^2$ τρόπους.