

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ' ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως αντιγραφή.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ – ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Τελικό διαγώνισμα - 14 Ιανουαρίου 2020

Όλες οι καμπύλες είναι θετικά προσανατολισμένες εκτός αν προσδιορίζεται διαφορετικά.
Όλα τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα.

1. Βρείτε τα σημεία z του μιγαδικού επιπέδου που ικανοποιούν την εξίσωση $2|z| = |z - 1|$. Να εξηγήσετε τι σχήμα είναι.
2. Ο κανόνας του παραλληλογράμμου λέει ότι το άθροισμα των τετραγώνων των μηκών των δύο διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των μηκών των τεσσάρων πλευρών του. Αποδείξτε το χρησιμοποιώντας μιγαδικούς αριθμούς (πάρτε z και w να είναι δύο γειτονικές πλευρές του παραλληλογράμμου).
3. Βρείτε ένα τύπο για το $\sin(3\theta)$ και το $\cos(3\theta)$ μέσω των αριθμών $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$. Οι τύποι σας θα πρέπει να περιέχουν μόνο αριθμούς και τα c , s .
4. Δείξτε ότι κάθε μετασχηματισμός Möbius έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο (σημείο που απεικονίζεται στον εαυτό του) εκτός από αν πρόκειται για μεταφορά, για απεικόνιση δηλ. της μορφής $w = z + c$. Το πολύ πόσα σταθερά σημεία μπορεί να έχει;
5. Βρείτε τη σειρά Taylor της συνάρτησης

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

με κέντρο το $1/3$. Να προσδιορίσετε σε ποιο ανοιχτό δίσκο συγκλίνει η δυναμοσειρά αυτή. Μην ασχοληθείτε με το τι γίνεται πάνω στο σύνορο του δίσκου αυτού.

6. Βρείτε όλες τις σειρές Laurent με κέντρο το 0 της συνάρτησης

$$f(z) = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-4}$$

και προσδιορίστε το δακτύλιο σύγκλισης της κάθε σειράς (δε χρειάζεται να πείτε αν η σειρά συγκλίνει στο σύνορο κάθε τέτοιου δακτυλίου).

7. Βρείτε όλες τις ανωμαλίες της συνάρτησης $f(z) = \frac{1}{\sin(iz)}$ και προσδιορίστε τι είδους ανωμαλία είναι η κάθε μία. Βρείτε επίσης το υπόλοιπο σε κάθε τέτοια ανωμαλία.

8. Αν η f είναι αναλυτική στο z_0 και $f(z_0) \neq 0$ δείξτε ότι υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε η τιμή $|f(z_0)|$ να μην είναι η ελάχιστη τιμή της $|f(w)|$ στο δίσκο $\{w : |w - z_0| \leq r\}$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την αρχή μεγίστου.

9. Αν $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι ακέραια συνάρτηση με

$$\forall z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} f(z) \geq 2$$

δείξτε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

10. Έστω $f(z) = z^5 + 3z^2 + 1$. Βρείτε πόσες ρίζες έχει η f στο δακτύλιο $1 \leq |z| < 2$.