ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Απεικονίστε τους αριθμούς $z_1 + z_2$ και $z_1 - z_2$, σαν διανύσματα στο επίπεδο, όταν

(α) $z_1 = 2i, \quad z_2 = \dfrac{2}{3} - i,$ (β) $z_1 = (-\sqrt{3}, 1), \quad z_2 = (\sqrt{3}, 0)$

(γ) $z_1 = (-3, 1), \quad z_2 = (1, 4),$ (δ) $z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_1 - iy_1$

2. Δείξτε ότι

(α) $\overline{z + 3i} = z - 3i,$ (β) $\overline{iz} = -i\overline{z}$

(γ) $\overline{(2 + i)^2} = 3 - 4i,$ (δ) $|(2\overline{z} + 5)(\sqrt{2} - i)| = \sqrt{3}|2z + 5|.$

3. Επαληθεύστε τις ανισότητες (3) της Παραγράφου 3 που αφορούν τους $\mathrm{Re}z$, $\mathrm{Im}z$ και $|z|$.

4. Δείξτε ότι $\sqrt{2}|z| \geq |\mathrm{Re}z| + |\mathrm{Im}z|$.

5. Επαληθεύστε τις ιδιότητες (6), (7) για τον $\overline{z}$ της Παραγράφου 3.

6. Δείξτε ότι

(α) Ο z είναι πραγματικός αν και μόνο αν $\overline{z} = z$.

(β) Ο z είναι ή πραγματικός ή καθαρά φανταστικός, αν και μόνο αν $(\overline{z})^2 = z^2$.

7. Χρησιμοποιήστε την ιδιότητα $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$ για να δείξετε ότι

(α) $\overline{z_1 z_2 z_3} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}\ \overline{z_3},$

(β) $(\overline{z^4}) = (\overline{z})^4$

8. Επαληθεύστε την ιδιότητα (12) της Παραγράφου 3.

9. Χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματα της Παραγράφου 3 για να δείξετε ότι, όταν z_2 και z_3 είναι μη μηδενικοί μιγαδικοί,

10. Με τη βοήθεια των ανισοτήτων της Παραγράφου 4, δείξτε ότι όταν $|z_3| \neq |z_4|$,

$$\left|\frac{z_1 + z_2}{z_3 + z_4}\right| \leq \frac{|z_1| + |z_2|}{\big||z_3| - |z_4|\big|}.$$

11. Σε κάθε περίπτωση, σχεδιάστε το σύνολο των σημείων που ορίζεται από τη δοθείσα συνθήκη:

(α) $|z - 1 + i| = 1$, (β) $|z + i| \leq 3$, (γ) $\text{Re}(\overline{z} - i) = 2$, (δ) $|2z - i| = 4$.

12. Εφαρμόστε τις ανισότητες των Παραγράφων 3 και 4 για να δείξετε ότι όταν $|z| < 1$, τότε

$$|\text{Im}(1 - \overline{z} + z^2)| < 3.$$

13. Παραγοντοποιώντας το $z^4 - 4z^2 + 3$ σε δύο δευτεροβάθμιους παράγοντες, και μετά χρησιμοποιώντας την ανισότητα (6) της Παραγράφου 4, δείξτε ότι αν το z βρίσκεται πάνω στον κύκλο $|z| = 2$, τότε

$$\left|\frac{1}{z^4 - 4z^2 + 3}\right| \leq \frac{1}{3}.$$