

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ' ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως αντιγραφή.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ – ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Ενδιάμεσο διαγώνισμα, 5 Νοε. 2018 – Διάρκεια 2 ώρες.

Όλα τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα.

1. (i) Υπολογίστε τις κυβικές ρίζες του $-3 + 3i$. Αρκεί να τις δώσετε σε πολική μορφή.
(ii) Λύστε την εξίσωση $z^2 - 4z + 5 = 0$.

2. (i) Αποδείξτε την ταυτότητα

$$|1 + z\bar{w}|^2 + |z - w|^2 = (1 + |z|^2)(1 + |w|^2).$$

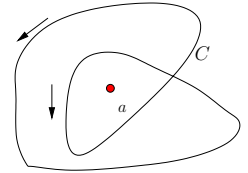
- (ii) Υπολογίστε το όριο (εδώ $t \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\cos(it)}{e^t}.$$

3. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα (εξηγώντας τα βήματά σας)

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{(z+a)dz}{z-a}$$

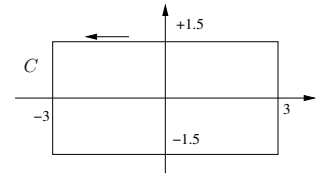
για την καμπύλη που φαίνεται στο σχήμα.



4. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα (εξηγώντας τα βήματά σας)

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{z^2} dz}{z^2(z-4)(z-i)}$$

για την καμπύλη (ορθογώνιο) που φαίνεται στο σχήμα.



5. Βρείτε όλα τα $z \in \mathbb{C}$ για τα οποία συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^3} (z-2)^n$.

6. Η συνάρτηση f είναι αναλυτική σε όλο το \mathbb{C} εκτός από το 1. Είναι επίσης φραγμένη στο σύνολο $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 10\}$. Αποδείξτε ότι

$$\oint_{|z|=5} f(z) dz = 0.$$

7. Βρείτε όλα τα ζεύγη μιγαδικών αριθμών z, w τέτοια ώστε να ισχύει

$$|z| = |w| = 1, \quad 1 + z + w = 0.$$

8. Αποδείξτε την ανισότητα

$$\left| \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z} \right| \leq \pi.$$

Η καμπύλη Γ είναι η ανοιχτή πολυγωνική γραμμή που ενώνει τα σημεία $R, R + iR, -R + iR, -R$.

