

ΜΙΧΑΛΗΣ
ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΑΚΗΣ

Απειροστικός Λογισμός

Πραγματικές Συναρτήσεις
μίας Μεταβλητής



Απειροστικός Λογισμός

Πραγματικές Συναρτήσεις μίας Μεταβλητής

Μιχάλης Παπαδημητράκης
Καθηγητής, ΤΜΕΜ, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Τίτλος πρωτοτύπου: «Απειροστικός Λογισμός»

Copyright © 2024, **ΚΑΛΛΙΠΟΣ, ΑΝΟΙΚΤΕΣ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ**
(ΣΕΑΒ + ΕΛΚΕ-ΕΜΠ)



Το παρόν έργο διατίθεται με τους όρους της άδειας Creative Commons Αναφορά Δημιουργού – Μη Εμπορική Χρήση – Παρόμοια Διανομή 4.0. Για να δείτε τους όρους της άδειας αυτής επισκεφτείτε τον ιστότοπο <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/legalcode.el> Αν τυχόν κάποιο τμήμα του έργου διατίθεται με διαφορετικό καθεστώς αδειοδότησης, αυτό αναφέρεται ρητά και ειδικώς στην οικεία θέση.

Συντελεστές έκδοσης

Γλωσσική επιμέλεια:	Βασιλική Τυραϊδή
Τεχνική επεξεργασία:	Μιχάλης Παπαδημητράκης

Κεντρική Ομάδα Υποστήριξης

Γλωσσικός Έλεγχος:	Γεωργία Τριανταφυλλίδου
Γραφιστικός Έλεγχος:	Έλενα-Νατάσα Καΐτσα
Βιβλιοθηκονομική Επεξεργασία:	Μαρία Καπνίζου

ΚΑΛΛΙΠΟΣ

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Ηρώων Πολυτεχνείου 9
15780 Ζωγράφου
www.kallipos.gr

Βιβλιογραφική αναφορά:	Παπαδημητράκης, Μ. (2024). Απειροστικός Λογισμός [Προπτυχιακό εγχειρίδιο]. Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις.
------------------------	---

Διαθέσιμο στο:	http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-1011
----------------	---

ISBN:	978-618-228-267-0
-------	-------------------

Στη Μυρτώ-Ασπασία (και στον Δημήτρη και στη Μαρία).

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πρόλογος	1
1 Πραγματικοί αριθμοί	5
1.1 Σύνοψη	5
1.2 Φυσικοί, ακέραιοι, ρητοί και άρρητοι	5
1.3 Ανισότητες και απόλυτες τιμές	5
1.4 Η γεωμετρική αναπαράσταση του συνόλου $\mathbb{R}$	7
1.5 Διαστήματα και το σύμβολο του απείρου	8
1.6 Η Αρχιμήδεια ιδιότητα	10
1.7 Ακέραιο μέρος	10
1.8 Η πυκνότητα των ρητών και των άρρητων	11
1.9 Δυνάμεις και ρίζες	12
1.10 Λογάριθμοι	16
1.11 Τριγωνομετρικοί αριθμοί	17
1.12 Το σύμβολο Σ του αθροίσματος	22
1.13 Μαθηματική επαγωγή	23
1.14 Βιβλιογραφία	27
2 Πραγματικές συναρτήσεις μίας πραγματικής μεταβλητής	29
2.1 Σύνοψη	29
2.2 Πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών	29
2.3 Γράφημα, μονοτονία και φράγματα	31
2.4 Αντίστροφη συνάρτηση	41
2.5 Πολυωνυμικές και ρητές συναρτήσεις	44
2.6 Δυνάμεις	47
2.7 Εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση	48
2.8 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις	49
2.9 Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις	52
2.10 Βιβλιογραφία	54
3 Ακολουθίες και όρια ακολουθιών	55
3.1 Σύνοψη	55
3.2 Ορισμοί	55
3.3 Όριο ακολουθίας	58
3.4 Υπακολουθίες	64
3.5 Όρια και αλγεβρικές πράξεις	66
3.6 Όρια και ανισότητες	74
3.7 Μερικά χρήσιμα όρια	77
3.8 Όριο μονότονης ακολουθίας	80
3.9 Βιβλιογραφία	86

4	Όρια συναρτήσεων	87
4.1	Σύνοψη	87
4.2	Όριο συνάρτησης	87
4.3	Όριο συνάρτησης και γράφημα	97
4.4	Όρια και αλγεβρικές πράξεις	100
4.5	Όρια και αλλαγές μεταβλητής	109
4.6	Όρια και ανισότητες	112
4.7	Όριο συνάρτησης και ακολουθίες	115
4.8	Όρια ρητών συναρτήσεων	117
4.9	Όρια δυνάμεων	120
4.10	Όρια εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων	121
4.11	Όρια τριγωνομετρικών συναρτήσεων	124
4.12	Όρια μονότονων συναρτήσεων	128
4.13	Βιβλιογραφία	130
5	Συνεχείς συναρτήσεις	131
5.1	Σύνοψη	131
5.2	Συνέχεια συνάρτησης	131
5.3	Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων	134
5.4	Είδη ασυνεχειών	138
5.5	Συνέχεια συνάρτησης και ακολουθίες	142
5.6	Θεωρήματα Φραγμένης Συνάρτησης, Μέγιστης / Ελάχιστης Τιμής, Ενδιάμεσης Τιμής και Bolzano	143
5.7	Σύνολο τιμών και αντίστροφη συνεχούς συνάρτησης	149
5.8	Βιβλιογραφία	158
6	Παράγωγοι συναρτήσεων	159
6.1	Σύνοψη	159
6.2	Ένα γεωμετρικό και δύο φυσικά προβλήματα	159
6.3	Παράγωγος συνάρτησης	161
6.4	Παραδείγματα παραγώγων, I	164
6.5	Παράγωγος συνάρτησης και γράφημα	166
6.6	Ιδιότητες παραγώγων	169
6.7	Παραδείγματα παραγώγων, II	177
6.8	Καμπύλη και εφαπτόμενη ευθεία καμπύλης	179
6.9	Θεωρήματα Fermat, Rolle και Μέσης Τιμής (Lagrange, Cauchy)	185
6.10	Ακρότατα, μονοτονία και απόδειξη ισοτήτων και ανισοτήτων	192
6.10.1	Ακρότατα και μονοτονία	192
6.10.2	Απόδειξη ισοτήτων και ανισοτήτων	196
6.11	Παράγωγοι ανώτερης τάξης	199
6.12	Κυρτότητα και κοιλότητα, σημεία καμψής και απόδειξη ανισοτήτων	202
6.12.1	Τοπικά ακρότατα	202
6.12.2	Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις και σημεία καμψής	202
6.12.3	Απόδειξη ανισοτήτων	208
6.13	Υπολογισμός απροσδιόριστων μορφών ορίων	209
6.13.1	Όρια συναρτήσεων	209
6.13.2	Όρια ακολουθιών	215
6.14	Τάξη μεγέθους και ασυμπτωτική ισότητα	217
6.14.1	Τάξη μεγέθους	217
6.14.2	Ασυμπτωτική ισότητα, μικρό όμικρον και μεγάλο όμικρον	219
6.15	Το Θεώρημα Taylor, A	222
6.16	Προσεγγιστική επίλυση εξίσωσης	224

6.17 Βιβλιογραφία	226
7 Ολοκληρώματα συναρτήσεων	229
7.1 Σύνοψη	229
7.2 Ένα γεωμετρικό και ένα φυσικό πρόβλημα	229
7.3 Ολοκλήρωμα συνάρτησης	233
7.4 Ολοκληρώματα και αλγεβρικές πράξεις	237
7.5 Ολοκληρώματα σε υποδιαστήματα και σε γειτονικά διαστήματα	241
7.6 Ολοκληρώματα και ανισότητες	243
7.7 Προσεγγιστικός υπολογισμός ολοκληρώματος	247
7.8 Βιβλιογραφία	251
8 Σχέση παραγώγου και ολοκληρώματος	253
8.1 Σύνοψη	253
8.2 Παράγουσες και αόριστα ολοκληρώματα	253
8.2.1 Παράγουσες	253
8.2.2 Αόριστα ολοκληρώματα	255
8.3 Το Θεμελιώδες Θεώρημα	259
8.4 Υπολογισμοί ολοκληρωμάτων	265
8.4.1 Μέθοδος αντικατάστασης ή αλλαγής μεταβλητής	265
8.4.2 Μέθοδος ολοκλήρωσης κατά μέρη ή κατά παράγοντες	267
8.4.3 Ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων	270
8.4.4 Ολοκληρώματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων	275
8.4.5 Ολοκληρώματα μερικών αλγεβρικών συναρτήσεων	277
8.5 Μέση τιμή συνάρτησης	280
8.6 Το Θεώρημα Taylor, B	282
8.7 Γενικευμένα ολοκληρώματα	283
8.8 Εφαρμογές των ολοκληρωμάτων	290
8.8.1 Υπολογισμός μήκους καμπύλης	290
8.8.2 Υπολογισμός μάζας καμπυλόγραμμης ράβδου	293
8.8.3 Υπολογισμός έργου δύναμης	294
8.8.4 Υπολογισμός εμβαδού επίπεδης επιφάνειας	296
8.9 Βιβλιογραφία	302
9 Σειρές αριθμών και δυναμοσειρές	303
9.1 Σύνοψη	303
9.2 Σειρές αριθμών και κάποιες βασικές ιδιότητες	303
9.3 Σειρές με μη-αρνητικούς όρους	308
9.3.1 Γενικά	308
9.3.2 Σειρές με μη-αρνητικούς όρους οι οποίοι μειώνονται	311
9.3.3 p -αδικό ανάπτυγμα αριθμού	314
9.4 Κριτήρια σύγκλισης σειράς	321
9.5 Δυναμοσειρές και σειρές Taylor	326
9.5.1 Γενικά για δυναμοσειρές	326
9.5.2 Από συνάρτηση σε δυναμοσειρά: σειρά Taylor	332
9.5.3 Από δυναμοσειρά σε συνάρτηση	336
9.6 Βιβλιογραφία	344

10 Κάποιες βασικές συνήθειες διαφορικές εξισώσεις	347
10.1 Σύνοψη	347
10.2 Ορισμοί	347
10.3 Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης	351
10.3.1 Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης με χωριζόμενες μεταβλητές	351
10.3.2 Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης ομογενείς βαθμού 0	355
10.3.3 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης	356
10.4 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης	362
10.4.1 Η γενική περίπτωση	362
10.4.2 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές	366
10.5 Βιβλιογραφία	370
11 Μερικά πιο θεωρητικά ζητήματα	371
11.1 Σύνοψη	371
11.2 Ελάχιστο άνω φράγμα	371
11.3 Το σύνολο των φυσικών δεν είναι άνω φραγμένο	374
11.4 Ύπαρξη ριζών θετικών αριθμών	375
11.5 Ο ορισμός δύναμης με άρρητο εκθέτη	376
11.6 Ο ορισμός του λογαρίθμου	377
11.7 Όριο μονότονης ακολουθίας	378
11.8 Εγκιβωτισμένα διαστήματα	379
11.9 Το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass και ακολουθίες Cauchy	379
11.10 Ανώτερο όριο και κατώτερο όριο ακολουθίας	382
11.11 Όριο μονότονης συνάρτησης	386
11.12 Οι αποδείξεις των τριών βασικών θεωρημάτων για συνεχείς συναρτήσεις	386
11.13 Ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις	388
11.14 Η ολοκληρωσιμότητα των συνεχών συναρτήσεων	390
11.15 Τα ακριβή κριτήρια λόγου και ρίζας	394
11.16 Ο ακριβής τύπος της ακτίνας σύγκλισης δυναμοσειράς	395
11.17 Αναλυτικός ορισμός των τριγωνομετρικών συναρτήσεων	396
11.18 Βιβλιογραφία	400
Ευρετήριο όρων	403
Ευρετήριο συμβόλων	407

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

1. Οι σημειώσεις αυτές ασχολούνται με τον **Απειροστικό Λογισμό**, δηλαδή τον λογισμό των απειροστών μεγεθών, δηλαδή τον λογισμό των ορίων. Περιορίζονται στο πλαίσιο των συναρτήσεων μίας πραγματικής μεταβλητής με πραγματικές τιμές. Στην αρχή, αφού αναφερθούν οι κυριότερες ιδιότητες των (πραγματικών) αριθμών και κάποια στοιχειώδη ζητήματα συναρτήσεων, εισάγονται οι έννοιες του ορίου ακολουθίας και του ορίου συνάρτησης, καθώς και η συγγενική έννοια της συνεχούς συνάρτησης. Κατόπιν, ο Απειροστικός Λογισμός χωρίζεται στον **Διαφορικό Λογισμό** (τον λογισμό των παραγώγων) και στον **Ολοκληρωτικό Λογισμό** (τον λογισμό των ολοκληρωμάτων). Τους δύο αυτούς λογισμούς ενώνει το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού. Οι σημειώσεις ολοκληρώνονται με το θέμα των σειρών αριθμών και των δυναμοσειρών, με κάποιες βασικές διαφορικές εξισώσεις και, τέλος, στο ενδέκατο και τελευταίο κεφάλαιο, με κάποια πιο θεωρητικά ζητήματα μαθηματικής θεμελίωσης βασικών εννοιών οι οποίες εκτέθηκαν αναπόδεικτες στο κύριο μέρος των σημειώσεων.

2. Στο πρόγραμμα σπουδών του Τμήματος Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης υπάρχουν τρία μαθήματα σχετικά με τα παραπάνω θέματα. Το ένα είναι το μάθημα πρώτου εξαμήνου *Απειροστικός Λογισμός I*, ένα «υπολογιστικό» μάθημα με έμφαση στον χειρισμό των ορίων, των παραγώγων, των ολοκληρωμάτων και των σειρών, και τα άλλα δύο είναι τα μαθήματα τρίτου και τέταρτου εξαμήνου *Εισαγωγή στην Ανάλυση I και II*, δύο «θεωρητικά» μαθήματα με έμφαση στη θεμελίωση των εννοιών και στις θεωρητικές αποδείξεις. Οι σημειώσεις αυτές απευθύνονται κυρίως στους φοιτητές του πρώτου μαθήματος. Αυτός ο διαχωρισμός καθορίζει και το επίπεδο αυτών των σημειώσεων. Πιο συγκεκριμένα, το επίπεδο του κύριου μέρους των σημειώσεων είναι στοιχειώδες. Δηλαδή, στα πρώτα δέκα κεφάλαια δεν ασχολούμαστε με τη βαθύτερη ιδιότητα των πραγματικών αριθμών, τη λεγόμενη *ιδιότητα supremum* (ή *ιδιότητα συνέχειας*), οπότε δεν αποδεικνύουμε κανένα από τα αποτελέσματα τα οποία στηρίζονται στην ιδιότητα αυτή. Για παράδειγμα, δεν αποδεικνύουμε την ύπαρξη ριζών των θετικών αριθμών, ούτε τα βασικά θεωρήματα για συνεχείς συναρτήσεις, ούτε την ολοκληρωσιμότητα των συνεχών συναρτήσεων. Επίσης, δεν αναφέρουμε καν διάφορα μη-στοιχειώδη αποτελέσματα, όπως το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass για ακολουθίες. Η ιδιότητα *supremum* και οι αποδείξεις οι οποίες λείπουν από τα πρώτα δέκα κεφάλαια, είτε διότι βασίζονται στην ιδιότητα *supremum* είτε διότι είναι πολύ τεχνικές, υπάρχουν στο ενδέκατο κεφάλαιο, έτσι ώστε να μπορούν οι φοιτητές που ενδιαφέρονται για πιο θεωρητικά ζητήματα να τα μελετήσουν αλλά και να τα χρησιμοποιήσει ένας διδάσκων που θέλει να δώσει μια πιο θεωρητική χροιά στο μάθημα. Όλα αυτά τα θεωρητικά ζητήματα βρίσκονται σε πολύ μεγαλύτερη έκταση και βάθος και στις σημειώσεις μου με τίτλο *«Ανάλυση. Πραγματικές συναρτήσεις μίας μεταβλητής»*¹. Όπου κρίνεται απαραίτητο θα γίνεται παραπομπή στις προαναφερθείσες σημειώσεις, χρησιμοποιώντας τον τίτλο *«Ανάλυση»*.

3. Μία προειδοποίηση. Το επίπεδο των σημειώσεων αυτών είναι στοιχειώδες, αλλά *όχι εύκολο*: οι σημειώσεις είναι αρκετά πυκνογραμμένες και απαιτούν συγκέντρωση, επιμονή και, κυρίως, γρή-

¹ Παπαδημητράκης, Μ. (2015). *Ανάλυση. Πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής [Προπτυχιακό εγχειρίδιο]*. Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις.

Παπαδημητράκης, Μ. (2024) «Απειροστικός Λογισμός».

Αθήνα: Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. <http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-1011>

 Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Μη Εμπορική Χρήση - Παρόμοια Διανομή 4.0

γορη προσαρμογή των φοιτητών του πρώτου εξαμήνου σε τρόπο εργασίας αρκετά διαφορετικό από αυτόν τον οποίο έμαθαν στο Λύκειο. Παρεμπιπτόντως, εδώ αισθάνομαι ότι πρέπει να εκφράσω την πλήρη αντίθεσή μου στην εξής κατάσταση. Οι φοιτητές έρχονται στα μαθηματικά τμήματα έχοντας –δήθεν– διδαχθεί έννοιες του Απειροστικού Λογισμού ήδη από το Λύκειο. «Γνωρίζουν» το Θεώρημα Μέσης Τιμής ή τους κανόνες $I' \text{ Hopital}$, ενώ στην ουσία δεν γνωρίζουν απολύτως τίποτα. Όχι μόνο «μαθαίνουν» όλα αυτά τα θέματα τελείως μηχανικά και επιφανειακά βασισμένοι στη σκέτη **απομνημόνευση**, αλλά παρατηρείται πολύ έντονα το φαινόμενο να μην μπορούν να χειριστούν αλγεβρικά τις παρενθέσεις και να μην μπορούν να εφαρμόσουν απλές αλγεβρικές ιδιότητες των δυνάμεων μέχρι και να μην μπορούν να προσθέσουν δύο κλάσματα.

4. Οι σημειώσεις δίνουν μεγάλη έμφαση στην έννοια του ορίου (ακολουθίας και συνάρτησης). Αναλύονται διεξοδικά οι ορισμοί των ορίων σε όλες τις περιπτώσεις και υπάρχουν πάρα πολλά παραδείγματα υπολογισμού του n_0 και του δ από το ϵ . Οι φοιτητές πρέπει να εξασκηθούν αρκετά με τέτοιους υπολογισμούς *ακριβώς σε ένα «υπολογιστικό» μάθημα*, πριν αντιμετωπίσουν πιο θεωρητικές καταστάσεις σε επόμενα μαθήματα. Είναι αρκετοί οι φοιτητές οι οποίοι αντιμετωπίζουν δυσκολίες με την κατανόηση του ρόλου των ποσοτήτων δ και ϵ (και των ανάλογων ποσοτήτων στις άλλες περιπτώσεις), αλλά υπάρχουν και πολλοί άλλοι οι οποίοι, με κάποια εξάσκηση, ξεπερνούν σχετικά εύκολα τις όποιες αρχικές δυσκολίες.

5. Στο πρώτο κεφάλαιο περιγράφονται οι γεωμετρικοί ορισμοί των τριγωνομετρικών αριθμών και αποδεικνύονται γεωμετρικά οι βασικές ιδιότητές τους (παρά το ότι αυτό έχει γίνει και στο Λύκειο). Αυτό κρίνεται απαραίτητο, διότι, αφ' ενός οι αναλυτικοί ορισμοί μπορούν να δοθούν μόνο πολύ αργότερα, αφ' ετέρου οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι τόσο βασικές ώστε δεν είναι (και παιδαγωγικά) σωστό να μαθαίνει κάποιος τις έννοιες του Απειροστικού Λογισμού χωρίς, ταυτόχρονα, να τις εφαρμόζει στις συναρτήσεις αυτές.

6. Ο ορισμός του ολοκληρώματος περιγράφεται βάσει των αθροισμάτων Riemann και όχι βάσει των αθροισμάτων Darboux. Ο λόγος είναι διπλός. Αφ' ενός ο ορισμός του ολοκληρώματος μέσω των αθροισμάτων Darboux απαιτεί μεγαλύτερη προετοιμασία αλλά και την έννοια του supremum, αφ' ετέρου τα αθροίσματα Riemann συνδέονται σαφώς πολύ πιο άμεσα και φυσιολογικά με τις εφαρμογές των ολοκληρωμάτων.

7. Οι αποδείξεις οι οποίες περιέχονται στις σημειώσεις αυτές είναι πολλές. Ας αποφασίσει ο εκάστοτε διδάσκων ποιες από αυτές τις αποδείξεις θα παρουσιάσει στον πίνακα: η πίεση χρόνου δεν αφήνει πολλά περιθώρια! Στους φοιτητές δίνεται η συμβουλή να προσπαθήσουν (με την καθοδήγηση, ίσως, και του διδάσκοντος ως προς την επιλογή) να δοκιμάσουν τις δυνάμεις τους μελετώντας, κάποιες τουλάχιστον, από τις αποδείξεις: όσο περισσότερες τόσο το καλύτερο.

8. Η μεγαλύτερη ωφέλεια για τους φοιτητές θα προκύψει από την επίλυση **όσο το δυνατόν περισσότερων ασκήσεων**. Στις σημειώσεις αυτές δεν υπάρχουν (συνειδητά, τουλάχιστον) πολύ δύσκολες ή πολύ θεωρητικές ασκήσεις. Μάλιστα, σε ασκήσεις κάπως πιο δύσκολες ή πιο απροσδόκητες υπάρχουν υποδείξεις. Η επιλογή των ασκήσεων έγινε όχι για να δυσκολευτούν οι εξαιρετικοί φοιτητές, αλλά περισσότερο για να ανεβάσουν το επίπεδό τους οι καλοί φοιτητές.

9. Επειδή ο χρόνος ενός εξαμήνου δεν είναι ποτέ αρκετός, αναπόφευκτα γίνεται επιλογή των θεμάτων τα οποία θα διδαχθούν. Η δική μου επιλογή είναι η εξής: Σε γενικές γραμμές, διδάσκω τα κεφάλαια 3 έως 9, ως έχουν, αλλά με κυμαινόμενη έμφαση ως προς τα διάφορα θέματά τους. Από το κεφάλαιο 6 παραλείπω τις έννοιες της τάξης μεγέθους και της ασυμπτωτικής ισότητας, καθώς και την προσεγγιστική επίλυση εξίσωσης. Από το κεφάλαιο 7 παραλείπω τον προσεγγιστικό υπολογισμό ολοκληρώματος και από το κεφάλαιο 8 μερικές από τις εφαρμογές των ολοκληρωμάτων. Επίσης, παραλείπω ολόκληρο το κεφάλαιο 10 και για τον πρόσθετο λόγο ότι στο Τμήμα μου υπάρχει ξεχωριστό, υποχρεωτικό μάθημα για απλές διαφορικές εξισώσεις, το οποίο καλύπτει περισσότερα θέματα. Τέλος, για τα θέματα του κεφαλαίου 11 υπάρχουν στο Τμήμα μου τα μαθήματα Εισαγωγή στην Ανάλυση I και II. Τα περισσότερα θέματα των κεφαλαίων 1 και 2 είναι γνωστά από το Λύκειο, αλλά ανατρέχω σε αυτά όποτε κρίνω ότι πρέπει. Για παράδειγμα, όποτε χρειαστεί

αναφέρω και χρησιμοποιώ τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής και βάσει αυτής αποδεικνύω την ανισότητα του Bernoulli όταν χρειαστεί. Αναφέρω το ακέραιο μέρος αριθμού ως παράδειγμα συνάρτησης και αναλύω –όταν χρειαστεί να μιλήσω για τα όριά τους– με λεπτομέρεια τον γεωμετρικό ορισμό των τριγωνομετρικών συναρτήσεων –αν και είναι ήδη γνωστές από το Λύκειο– αλλά και των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Πάντως, οι φοιτητές πρέπει να παρακινηθούν να διαβάσουν τα κεφάλαια 1 και 2.

10. Τα διάφορα σχήματα μέσα στις σημειώσεις αυτές απέχουν πολύ από το να είναι τέλεια. Αυτό έγινε –εν μέρει– επίτηδες. Όλα τα σχήματα έγιναν με το χέρι. Για τις ευθείες γραμμές χρησιμοποιήθηκε χάρακας, για τις ορθές γωνίες ορθογώνιο τρίγωνο και για τους λίγους κύκλους διαβήτη. Όλες οι άλλες καμπύλες, π.χ. τα γραφήματα όλων των συναρτήσεων –γενικών αλλά και συγκεκριμένων–, έγιναν με το χέρι. Αυτό είναι εμφανές. Ο λόγος είναι ότι θέλω να παρακινηθούν οι φοιτητές να σχεδιάζουν με το ίδιο τους το χέρι, και όχι με μηχανή, τα σχήματα του Απειροστικού Λογισμού αλλά και γενικότερα. Πιστεύω ακράδαντα ότι η «χειρωνακτική» δουλειά με το χέρι βοηθά καταλυτικά την ταυτόχρονη πνευματική δουλειά με τις σχετικές έννοιες.

11. Μετά από πολλές αλλαγές, η παρούσα μορφή των σημειώσεων είναι αποτέλεσμα πολύχρονης διδασκαλίας. Επειδή είναι σαφές ότι και αυτή η μορφή απέχει αρκετά από το να είναι βέλτιστη, είναι ευπρόσδεκτες οποιεσδήποτε επισημάνσεις λαθών αλλά και παρατηρήσεις ως προς το στίλ παρουσίασης ή την επιλογή των θεμάτων.

Μιχάλης Παπαδημητράκης,

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Πανεπιστημίου Κρήτης,

Οκτώβριος 2024.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1.1 Σύνοψη

Το μεγαλύτερο μέρος αυτού του κεφαλαίου αποτελείται από ύλη ήδη γνωστή από το Λύκειο: οι πραγματικοί αριθμοί (φυσικοί, ακέραιοι, ρητοί, άρρητοι), οι απλές ιδιότητες των ανισοτήτων και της απόλυτης τιμής, η γεωμετρική αναπαράσταση των αριθμών πάνω στην πραγματική ευθεία, τα διαστήματα, το σύμβολο του απείρου, οι ιδιότητες των δυνάμεων και των ριζών, οι λογάριθμοι και οι τριγωνομετρικοί αριθμοί (οι οποίοι ορίζονται με γεωμετρικό τρόπο μέσω του τριγωνομετρικού κύκλου). Στο κεφάλαιο αυτό αναφέρονται και κάποιες έννοιες όχι ίσως τόσο γνωστές από το Λύκειο: η Αρχιμήδεια ιδιότητα των αριθμών, το ακέραιο μέρος αριθμού, το σύμβολο Σ του αθροίσματος και η μαθηματική επαγωγή.

Προαπαιτούμενη γνώση: Μαθηματικά του Λυκείου.

1.2 Φυσικοί, ακέραιοι, ρητοί και άρρητοι

Τους πραγματικούς αριθμούς θα τους λέμε, απλώς, *αριθμούς*. Το άθροισμα $x + y$, η διαφορά $x - y$, το γινόμενο xy και ο λόγος $\frac{x}{y}$ αριθμών x, y είναι αριθμοί. Για να έχει νόημα ο λόγος $\frac{x}{y}$ προϋποτίθεται, φυσικά, ότι $y \neq 0$. Οι ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αριθμών (μεταθετικότητα, προσεταιριστικότητα, επιμεριστικότητα κ.τ.λ.) είναι γνωστές από το Γυμνάσιο.

Οι απλούστεροι αριθμοί είναι οι **φυσικοί** $1, 2, 3, \dots$, οι **ακέραιοι** $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$ και οι **ρητοί**, δηλαδή οι λόγοι $\frac{m}{n}$, όπου m, n είναι ακέραιοι και $n \neq 0$.

Το άθροισμα και το γινόμενο φυσικών είναι φυσικοί. Το άθροισμα, το γινόμενο και η διαφορά ακέραιων είναι ακέραιοι. Το άθροισμα, το γινόμενο, η διαφορά και ο λόγος ρητών είναι ρητοί.

Οι αριθμοί οι οποίοι δεν είναι ρητοί χαρακτηρίζονται **άρρητοι**.

Τα σύνολα των πραγματικών, των φυσικών, των ακεραίων και των ρητών τα συμβολίζουμε

$$\mathbb{R}, \quad \mathbb{N}, \quad \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q},$$

αντιστοίχως. *Προσέξτε:* μερικά βιβλία θεωρούν φυσικό και το 0, οπότε με $\mathbb{N}$ συμβολίζουν το σύνολο των $0, 1, 2, 3, \dots$ και με $\mathbb{N}^*$ το σύνολο των $1, 2, 3, \dots$. Σε αυτές τις σημειώσεις $\mathbb{N}$ είναι το σύνολο των $1, 2, 3, \dots$.

1.3 Ανισότητες και απόλυτες τιμές

Οι ιδιότητες των ανισοτήτων είναι γνωστές από το Γυμνάσιο και δεν χρειάζεται να τις αποδείξουμε. Οι πιο βασικές είναι οι εξής:

Παπαδημητράκης, Μ. (2024) «Απειροστικός Λογισμός».

Αθήνα: Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. <http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-1011>

 Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Μη Εμπορική Χρήση - Παρόμοια Διανομή 4.0

Πρόταση 1.1. (i) Αν $x \leq y$ και $y \leq z$, τότε $x \leq z$. Αν μία τουλάχιστον από τις δύο αρχικές ανισότητες είναι γνήσια, τότε και η τελική ανισότητα είναι γνήσια.

(ii) Αν $x \leq y$, τότε $x + z \leq y + z$ και $x - z \leq y - z$.

(iii) Αν $x \leq y$ και $z \leq w$, τότε $x + z \leq y + w$. Αν μία τουλάχιστον από τις δύο αρχικές ανισότητες είναι γνήσια, τότε και η τελική ανισότητα είναι γνήσια.

(iv) Αν $x \leq y$ και $z > 0$, τότε $xz \leq yz$ και $\frac{x}{z} \leq \frac{y}{z}$.

(v) Αν $x \leq y$ και $z < 0$, τότε $xz \geq yz$ και $\frac{x}{z} \geq \frac{y}{z}$.

(vi) Αν $0 < x \leq y$ και $0 < z \leq w$, τότε $0 < xz \leq yw$. Αν μία τουλάχιστον από τις δύο αρχικές ανισότητες είναι γνήσια, τότε και η τελική ανισότητα είναι γνήσια.

Ορισμός 1.1. Η απόλυτη τιμή ενός αριθμού x συμβολίζεται $|x|$ και ορίζεται με τον τύπο:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{αν } x \geq 0, \\ -x, & \text{αν } x \leq 0. \end{cases}$$

Προφανώς, η απόλυτη τιμή κάθε αριθμού είναι μη-αρνητικός αριθμός. Η απόλυτη τιμή ενός αριθμού εκφράζει το μέγεθος του αριθμού.

Οι ιδιότητες της απόλυτης τιμής στην Πρόταση 1.2 είναι γνωστές από το Γυμνάσιο.

Πρόταση 1.2. (i) $|xy| = |x||y|$.

(ii) Αν $y \neq 0$, τότε $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

(iii) Η τριγωνική ανισότητα:

$$||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|.$$

(iv) $|x| \leq a$, αν και μόνο αν $-a \leq x \leq a$.

(v) $|x| < a$, αν και μόνο αν $-a < x < a$.

Ορισμός 1.2. Ο μεγαλύτερος και ο μικρότερος από τους αριθμούς $x_1, \dots, x_n$ συμβολίζονται, αντιστοίχως,

$$\max\{x_1, \dots, x_n\}, \quad \min\{x_1, \dots, x_n\}.$$

Γενικότερα, αν το σύνολο A έχει μέγιστο στοιχείο ή/και ελάχιστο στοιχείο, τότε αυτά συμβολίζονται, αντιστοίχως,

$$\max A, \quad \min A.$$

Παράδειγμα 1.1. Προφανώς, το 0 είναι το ελάχιστο στοιχείο του συνόλου των μη-αρνητικών αριθμών $A = \{x | x \geq 0\}$. Δηλαδή, $\min A = 0$.

Όμως, το σύνολο A δεν έχει μέγιστο στοιχείο, διότι όποιο $x \in A$ και αν πάρουμε υπάρχει κάποιο άλλο στοιχείο του A , π.χ. το $x + 1$, το οποίο είναι μεγαλύτερο από το x .

Παράδειγμα 1.2. Το σύνολο των θετικών αριθμών $A = \{x | x > 0\}$ δεν έχει ελάχιστο στοιχείο, διότι όποιο $x \in A$ και αν πάρουμε υπάρχει κάποιο άλλο στοιχείο του A , π.χ. το $\frac{x}{2}$, το οποίο είναι μικρότερο από το x . Το ότι το A δεν έχει ούτε μέγιστο στοιχείο προκύπτει όπως στο προηγούμενο παράδειγμα.

Ασκήσεις

1.1. Αν $x \leq y < 0$, $z \leq w < 0$, αποδείξτε ότι $0 < yw \leq xz$.

1.2. (i) Αν $x \leq y$, $z \leq w$, $t \leq s$, $x + z + t = y + w + s$, αποδείξτε ότι $x = y$, $z = w$, $t = s$.

(ii) Αν $0 < x \leq y$, $0 < z \leq w$, $0 < t \leq s$, $xzt = yws$, αποδείξτε ότι $x = y$, $z = w$, $t = s$.

- 1.3. (i) Αποδείξτε ότι $|x + y| = |x| + |y|$, αν και μόνο αν $x \geq 0, y \geq 0$ ή $x \leq 0, y \leq 0$.
 (ii) Αποδείξτε ότι $|x + y + z| \leq |x| + |y| + |z|$. Επίσης, αποδείξτε ότι $|x + y + z| = |x| + |y| + |z|$, αν και μόνο αν $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ ή $x \leq 0, y \leq 0, z \leq 0$.

1.4. Αποδείξτε ότι

$$\max\{x, y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2}, \quad \min\{x, y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

Υπόδειξη: Και για τις δύο ισότητες να διακρίνετε τις περιπτώσεις $x \leq y$ και $x \geq y$ και να απλοποιήσετε τη δεξιά μεριά τους.

1.5. (i) Έστω $w_1 > 0, \dots, w_n > 0, w_1 + \dots + w_n = 1$. Αν $l \leq x_1 \leq u, \dots, l \leq x_n \leq u$, αποδείξτε ότι $l \leq w_1 x_1 + \dots + w_n x_n \leq u$.

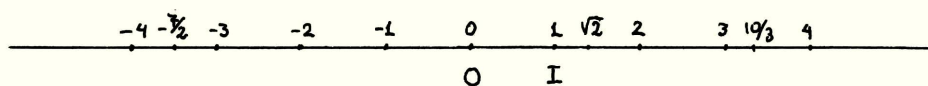
(ii) Έστω $y_1 > 0, \dots, y_n > 0$. Αν $l \leq \frac{x_1}{y_1} \leq u, \dots, l \leq \frac{x_n}{y_n} \leq u$, αποδείξτε ότι $l \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{y_1 + \dots + y_n} \leq u$.

1.4 Η γεωμετρική αναπαράσταση του συνόλου $\mathbb{R}$

Θεωρούμε αυθαίρετη ευθεία, αυθαίρετο σημείο O της ευθείας το οποίο αναπαριστά τον αριθμό 0 και δεύτερο αυθαίρετο σημείο I της ευθείας το οποίο αναπαριστά τον αριθμό 1. Η απόσταση του I από το O παίζει τον ρόλο της μονάδας μέτρησης αποστάσεων πάνω στην ευθεία. Τώρα, κάθε αριθμός $x > 0$ αναπαρίσταται από το αντίστοιχο σημείο X της ευθείας το οποίο βρίσκεται στην ίδια μεριά του O στην οποία βρίσκεται και το I και του οποίου η απόσταση από το O είναι ίση με $|x| = x$. Επίσης, κάθε αριθμός $x < 0$ αναπαρίσταται από το αντίστοιχο σημείο X της ευθείας το οποίο βρίσκεται στην αντίθετη μεριά του O από την οποία βρίσκεται το I και του οποίου η απόσταση από το O είναι ίση με $|x| = -x$. Επομένως, κάθε σημείο της ευθείας αναπαριστά ακριβώς έναν αριθμό και κάθε αριθμός αναπαρίσταται από ακριβώς ένα σημείο της ευθείας. Δηλαδή, τα σημεία της ευθείας είναι σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με τους αριθμούς.

Κάθε ευθεία την οποία χρησιμοποιούμε για να αναπαραστήσουμε τους αριθμούς την ονομάζουμε **πραγματική ευθεία** και από τώρα και στο εξής δεν θα κάνουμε διάκριση ανάμεσα στο οποιοδήποτε σημείο X μίας πραγματικής ευθείας και στον αριθμό x ο οποίος αναπαρίσταται από το σημείο αυτό: θα μιλάμε για τον αριθμό x καθώς και για το σημείο x .

Είναι φανερό από τον κανόνα τον οποίο αναφέραμε για την αντιστοίχιση αριθμών και σημείων ότι η απόσταση κάθε σημείου x της πραγματικής ευθείας από το σημείο 0 είναι ίση με $|x|$, δηλαδή ίση με το μέγεθος του x . Επίσης, γενικότερα, η απόσταση ανάμεσα σε δύο οποιαδήποτε σημεία x, y της πραγματικής ευθείας είναι ίση με $|x - y|$.



Σχήμα 1.1

Από τώρα και στο εξής, για τη γεωμετρική αναπαράσταση των αριθμών θα χρησιμοποιούμε *οριζόντια ευθεία* με το σημείο 1 να είναι δεξιά του σημείου 0. Αυτό συνεπάγεται ότι κάθε σημείο $x > 0$ βρίσκεται δεξιά του σημείου 0 και κάθε σημείο $x < 0$ βρίσκεται αριστερά του σημείου 0. Είναι φανερό, επίσης, ότι το σημείο x είναι αριστερά του σημείου y , αν και μόνο αν $x < y$. Στο σχήμα 1.1 βλέπουμε την πραγματική ευθεία με μερικά συγκεκριμένα σημεία της.

Θα δούμε αργότερα ότι μερικές φορές, ειδικά όταν σχεδιάζουμε γραφήματα συναρτήσεων, χρειαζόμαστε και μία δεύτερη ευθεία και τότε θα χρησιμοποιούμε και *κατακόρυφη ευθεία* με το σημείο 1 πάνω από το σημείο 0. Σε μία τέτοια ευθεία τα σημεία $x > 0$ βρίσκονται πάνω από το σημείο 0 και τα σημεία $x < 0$ βρίσκονται κάτω από το σημείο 0. Επίσης, το σημείο x είναι κάτω από το σημείο y , αν και μόνο αν $x < y$.

Ασκήσεις

1.6. Μέσω της γεωμετρικής αναπαράστασης, αιτιολογήστε την εξής πρόταση: αν $a \leq x \leq b$, $a \leq y \leq b$, τότε $|x - y| \leq b - a$. Κατόπιν, αποδείξτε την με μαθηματικό τρόπο.

1.7. Ποιο είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο των (iv), (v) στην Πρόταση 1.2;

1.8. Αν γνωρίζουμε τα σημεία X, Y της πραγματικής ευθείας τα οποία αναπαριστούν τους αριθμούς x, y , τότε περιγράψτε γεωμετρικές κατασκευές οι οποίες καταλήγουν στην εύρεση των σημείων τα οποία αναπαριστούν τους αριθμούς $x + y, x - y, xy$ και $\frac{x}{y}$.

Υπόδειξη για το xy . Έστω $x > 0, y > 0$. Φτιάξτε δεύτερη πραγματική ευθεία ώστε οι δύο ευθείες να έχουν την ίδια μονάδα μέτρησης και το σημείο τομής τους να αναπαριστά τον αριθμό 0 και στις δύο τους. Έστω I', Y' τα σημεία της δεύτερης ευθείας τα οποία αναπαριστούν τους αριθμούς 1, y , αντιστοίχως. Από το σημείο Y' φέρτε ευθεία παράλληλη προς την ευθεία η οποία διέρχεται από τα σημεία I', X . Αν αυτή τέμνει την πρώτη πραγματική ευθεία στο σημείο K , τότε χρησιμοποιήστε δύο κατάλληλα όμοια τρίγωνα για να βρείτε ποιον αριθμό αναπαριστά το σημείο K .

1.5 Διαστήματα και το σύμβολο του απείρου

Κάποια χαρακτηριστικά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι τα **φραγμένα διαστήματα**:

$$\begin{aligned}(a, b) &= \{x \mid a < x < b\}, & (a, b] &= \{x \mid a < x \leq b\}, \\ [a, b) &= \{x \mid a \leq x < b\}, & [a, b] &= \{x \mid a \leq x \leq b\}.\end{aligned}$$

Για τα τρία πρώτα διαστήματα προϋποτίθεται ότι $a < b$, ενώ για το τέταρτο ότι $a \leq b$. Από αυτά, το (a, b) χαρακτηρίζεται **ανοικτό** διάστημα και το $[a, b]$ **κλειστό** διάστημα. Έχουμε και τα **μη-φραγμένα διαστήματα** (ή **ημιευθείες**):

$$\begin{aligned}(a, +\infty) &= \{x \mid x > a\}, & (-\infty, b) &= \{x \mid x < b\}, \\ [a, +\infty) &= \{x \mid x \geq a\}, & (-\infty, b] &= \{x \mid x \leq b\}.\end{aligned}$$

Τα δύο πρώτα χαρακτηρίζονται **ανοικτά** διαστήματα (ή **ανοικτές ημιευθείες**), ενώ τα δύο τελευταία χαρακτηρίζονται **κλειστά** διαστήματα (ή **κλειστές ημιευθείες**). Έχουμε και το μη-φραγμένο διάστημα

$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R},$$

δηλαδή ολόκληρη την πραγματική ευθεία, το οποίο χαρακτηρίζεται **κλειστό** και **ανοικτό**.

Τονίζουμε ότι τα σύμβολα $+\infty, -\infty$ δεν είναι τίποτε άλλο παρά σκέτα σύμβολα, δημιουργήματα της φαντασίας. Φανταζόμαστε το $+\infty$ ως ένα «σημείο» το οποίο είναι δεξιά κάθε σημείου της πραγματικής ευθείας ή ως μία «θετική ποσότητα» με μέγεθος μεγαλύτερο από κάθε θετικό αριθμό, και το $-\infty$ ως ένα «σημείο» το οποίο είναι αριστερά κάθε σημείου της πραγματικής ευθείας ή ως μία «αρνητική ποσότητα» με μέγεθος μεγαλύτερο από κάθε θετικό αριθμό. Οπότε επεκτείνουμε τη χρήση των συμβόλων $<$ και $>$ των ανισοτήτων, γράφοντας για κάθε αριθμό x :

$$-\infty < x, \quad x < +\infty, \quad -\infty < +\infty.$$



Σχήμα 1.2

Δηλαδή επεκτείνουμε την πραγματική ευθεία, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.2, επισυνάπτοντας σε αυτήν δύο φανταστικά σημεία: ένα «αριστερό άκρο», το $-\infty$, και ένα «δεξιό άκρο», το $+\infty$.

Με το σύμβολο $\mathbb{R}$ δηλώνουμε το λεγόμενο **επεκτεταμένο $\mathbb{R}$** , δηλαδή το σύνολο

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty].$$

Θα ξανασυζητήσουμε για τα σύμβολα $\pm\infty$ όταν θα μελετήσουμε την έννοια του *ορίου*.

Προηγουμένως χρησιμοποιήσαμε τον χαρακτηρισμό *φραγμένα* για κάποια διαστήματα. Ο χαρακτηρισμός αυτός χρησιμοποιείται, γενικότερα, για κάποια υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Ορισμός 1.3. Έστω μη-κενό σύνολο A .

Λέμε ότι το A είναι **άνω φραγμένο**, αν υπάρχει u ώστε να ισχύει $x \leq u$ για κάθε $x \in A$ και κάθε τέτοιο u χαρακτηρίζεται **άνω φράγμα** του A .

Λέμε ότι το A είναι **κάτω φραγμένο**, αν υπάρχει l ώστε να ισχύει $l \leq x$ για κάθε $x \in A$ και κάθε τέτοιο l χαρακτηρίζεται **κάτω φράγμα** του A .

Τέλος, λέμε ότι το A είναι **φραγμένο**, αν είναι άνω φραγμένο και κάτω φραγμένο, δηλαδή αν υπάρχουν l, u ώστε να ισχύει $l \leq x \leq u$ για κάθε $x \in A$.

Είναι προφανές ότι αν το u είναι άνω φράγμα του μη-κενού συνόλου A , τότε κάθε $u' \geq u$ είναι και αυτό άνω φράγμα του A . Επίσης, αν το l είναι κάτω φράγμα του A , τότε κάθε $l' \leq l$ είναι και αυτό κάτω φράγμα του A .

Παράδειγμα 1.3. Το a , όπως και κάθε αριθμός $\leq a$, είναι κάτω φράγμα των $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b) , $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$. Ομοίως, το b , όπως και κάθε αριθμός $\geq b$, είναι άνω φράγμα των $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b) , $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$.

Παράδειγμα 1.4. Τα διαστήματα $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$ δεν είναι άνω φραγμένα και τα διαστήματα $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, +\infty)$ δεν είναι κάτω φραγμένα.

Παράδειγμα 1.5. Το σύνολο $\mathbb{N}$ είναι κάτω φραγμένο. Το 1 είναι το ελάχιστο στοιχείο του $\mathbb{N}$, οπότε το 1, όπως και κάθε αριθμός ≤ 1 , είναι κάτω φράγμα του $\mathbb{N}$. Στην επόμενη ενότητα θα συζητήσουμε για το αν το $\mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένο ή όχι.

Παράδειγμα 1.6. Όπως είδαμε, το διάστημα $[a, b]$ είναι φραγμένο: το a είναι κάτω φράγμα και το b είναι άνω φράγμα του $[a, b]$.

Επίσης, το a είναι το ελάχιστο στοιχείο του $[a, b]$: $\min[a, b] = a$.

Όμως το $[a, b]$ δεν έχει μέγιστο στοιχείο, διότι όποιο $x \in [a, b]$ και αν πάρουμε υπάρχει κάποιο άλλο στοιχείο του $[a, b]$, π.χ. το $\frac{x+b}{2}$, το οποίο είναι μεγαλύτερο από το x .

Ασκήσεις

1.9. (i) Για καθεμία από τις ανισότητες $|x+1| > 2$, $|x-1| \leq |x+1|$, $\frac{x}{x+2} > \frac{x+3}{3x+1}$, $\frac{(x-1)(x+4)}{(x-7)(x+5)} > 0$, $\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2} \leq 0$ γράψτε ως διάστημα ή ως ένωση διαστημάτων το σύνολο των x για τα οποία αυτή είναι αληθής.

(ii) Για καθένα από τα σύνολα $(-\infty, 3]$, $(3, 7)$, $[-1, 4) \cup (4, 8]$, $(-\infty, -2] \cup [1, 4) \cup [7, +\infty)$ βρείτε μία ανισότητα με μεταβλητή x ώστε το σύνολο αυτό να είναι το σύνολο των x για τα οποία η ανισότητα είναι αληθής.

1.10. Έχουν τα διαστήματα $[a, b]$, $(a, b]$, (a, b) , $[a, +\infty)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$ μέγιστο ή ελάχιστο στοιχείο; Δικαιολογήστε.

1.6 Η Αρχιμήδεια ιδιότητα

Θεωρούμε δύο ευθύγραμμα τμήματα με μήκη 1 το πρώτο και $u > 0$ το δεύτερο. Αν πάρουμε έναν *αρκετά μεγάλο* αριθμό n αντιγράφων του πρώτου ευθύγραμμου τμήματος και τα κολλήσουμε το ένα μετά το άλλο πάνω στην ίδια ευθεία, τότε το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο θα προκύψει θα έχει μήκος $n1 = n$ μεγαλύτερο από το μήκος u του δεύτερου ευθύγραμμου τμήματος. Με μαθηματική γλώσσα: αν $u > 0$, τότε υπάρχει *αρκετά μεγάλος* φυσικός n ώστε $n > u$. Από την άλλη μεριά, αν $u \leq 0$, τότε είναι προφανές ότι ισχύει $n > u$ για κάθε φυσικό n . Αποδείξαμε, λοιπόν, το Θεώρημα 1.1 το οποίο ακολουθεί, αλλά η απόδειξή μας είναι γεωμετρική και όχι αυστηρά αναλυτική. Η αυστηρά αναλυτική απόδειξη του Θεωρήματος 1.1 βρίσκεται στην ενότητα 11.3 του Κεφαλαίου 11.¹

Θεώρημα 1.1. Για κάθε u υπάρχει φυσικός n ώστε $n > u$.

Το Θεώρημα 1.1 συμπληρώνεται ως εξής. Αφού υπάρχει κάποιος φυσικός n μεγαλύτερος του u , τότε και όλοι οι επόμενοι φυσικοί $n+1, n+2, n+3, \dots$ είναι και αυτοί μεγαλύτεροι του u . Δηλαδή, όσο μεγάλος και αν είναι ένας αριθμός, όλοι οι φυσικοί από κάποιον και πέρα είναι μεγαλύτεροί του.

Το Θεώρημα 1.1 λέει ότι:

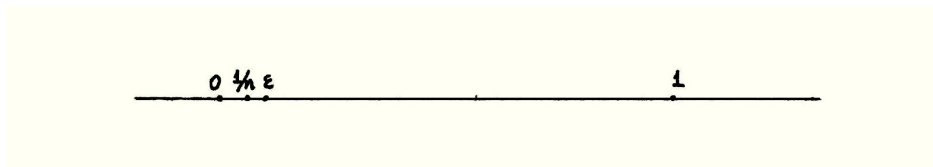
Το σύνολο $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο.

Πράγματι, κανένα u δεν είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$, διότι όποιο και αν είναι το u υπάρχει στοιχείο του $\mathbb{N}$ μεγαλύτερο του u .

Το ότι το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο συνεπάγεται μία σημαντική ιδιότητα των φυσικών, την Αρχιμήδεια ιδιότητα. Δείτε το σχήμα 1.3.

Αρχιμήδεια ιδιότητα. Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει φυσικός n ώστε $\frac{1}{n} < \epsilon$.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 1.1 με $u = \frac{1}{\epsilon}$. □



Σχήμα 1.3

Παρατηρούμε πάλι ότι αφού υπάρχει κάποιο $\frac{1}{n}$ μικρότερο του ϵ , συνεπάγεται ότι όλοι οι επόμενοι αριθμοί $\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+3}, \dots$ είναι και αυτοί μικρότεροι του ϵ . Δηλαδή, όσο μικρός και αν είναι ένας θετικός αριθμός, όλοι οι αντίστροφοι φυσικών από κάποιον και πέρα είναι μικρότεροί του.

Το Θεώρημα 1.1 και η ισοδύναμη Αρχιμήδεια ιδιότητα θα παίξουν σημαντικό ρόλο αργότερα στη μελέτη της έννοιας του ορίου ακολουθίας.

1.7 Ακέραιο μέρος

Τα άπειρα διαδοχικά διαστήματα

$$\dots, [-3, -2), [-2, -1), [-1, 0), [0, 1), [1, 2), [2, 3), \dots$$

είναι ξένα ανά δύο και είναι γεωμετρικά φανερό ότι η ένωσή τους είναι ολόκληρη η πραγματική ευθεία. Με άλλα λόγια, κάθε αριθμός x ανήκει σε ακριβώς ένα διάστημα $[k, k+1)$, όπου k είναι ακέραιος, δηλαδή υπάρχει ακριβώς ένας ακέραιος k ώστε το x να ανήκει στο διάστημα $[k, k+1)$.

¹Για πληρέστερη παρουσίαση τέτοιων θεωρητικών θεμάτων δείτε τις σημειώσεις «Ανάλυση» [1].

Ορισμός 1.4. Ο μοναδικός ακέραιος k ο οποίος έχει την ιδιότητα $x \in [k, k+1)$ η, ισοδύναμα, $k \leq x < k+1$ ονομάζεται **ακέραιο μέρος** του x και συμβολίζεται $[x]$. Επομένως, όταν βλέπουμε το σύμβολο $[x]$, τότε καταλαβαίνουμε ότι ισχύουν δύο πράγματα:

$$[x] \in \mathbb{Z}, \quad [x] \leq x < [x] + 1.$$

Παράδειγμα 1.7. $[3] = 3$, $[-4] = -4$, $[2.5] = 2$, $[-2.5] = -3$, $[\frac{8}{5}] = 1$, $[\frac{2}{3}] = 0$, $[-\frac{8}{5}] = -2$.

Ασκήσεις

1.11. Για ποια $x > 0$ ισχύει $[x^2] > 16$; Για ποια $x > 0$ ισχύει $[\frac{1}{x}] \geq 16$;

1.12. Αν $n \in \mathbb{Z}$, αποδείξτε ότι $[x+n] = [x] + n$.

Υπόδειξη: Ισχύει $[x] \in \mathbb{Z}$ και $[x] \leq x < [x] + 1$.

1.13. Αποδείξτε ότι $[x+y] = [x] + [y]$ ή $[x+y] = [x] + [y] + 1$ και βρείτε παραδείγματα και για τις δύο περιπτώσεις.

1.14. Αν $0 < x \leq 1$, αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $n \in \mathbb{N}$ ώστε να είναι $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$ και γράψτε τύπο για το n συναρτήσει του x .

Υπόδειξη: Θεωρήστε το $\frac{1}{x}$.

1.15. (i) Γνωρίζουμε ότι για κάθε u υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε να είναι $n > u$. Πώς θα εκφράσετε το ελάχιστο τέτοιο n συναρτήσει του u ;

Υπόδειξη: Να διακρίνετε περιπτώσεις: $u \geq 0$ και $u < 0$.

(ii) Πώς θα εκφράσετε συναρτήσει του u το ελάχιστο $n \in \mathbb{N}$ ώστε να είναι $n \geq u$;

1.8 Η πυκνότητα των ρητών και των άρρητων

Μία βασική ιδιότητα των ρητών είναι η λεγόμενη *πυκνότητά* τους ανάμεσα στους αριθμούς.

Πυκνότητα των ρητών. Για κάθε a, b με $a < b$ υπάρχει ρητός r ώστε $a < r < b$.

Απόδειξη. Επειδή $b - a > 0$, συνεπάγεται, σύμφωνα με την Αρχιμήδεια ιδιότητα, ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < b - a$. Επομένως, $na + 1 < nb$, οπότε

$$na < [na] + 1 \leq na + 1 < nb.$$

Τότε για τον ρητό $r = \frac{[na]+1}{n}$ (γιατί είναι ρητός;) ισχύει $a < r < b$. □

Με άλλα λόγια, κάθε ανοικτό διάστημα, οσοδήποτε μικρό, περιέχει τουλάχιστον έναν ρητό.

Την ίδια ιδιότητα πυκνότητας έχουν και οι άρρητοι. Όμως, προτού το αποδείξουμε πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας άρρητος. Πράγματι, στην επόμενη ενότητα θα δούμε ότι η εξίσωση $x^2 = 2$ έχει ακριβώς μία θετική λύση την οποία συμβολίζουμε $\sqrt{2}$ και θα δούμε, αν και αυτό είναι γνωστό από το Γυμνάσιο, ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

Πυκνότητα των άρρητων. Για κάθε a, b με $a < b$ υπάρχει άρρητος x ώστε $a < x < b$.

Απόδειξη. Επειδή $a - \sqrt{2} < b - \sqrt{2}$, υπάρχει, λόγω της πυκνότητας των ρητών, ρητός r ώστε $a - \sqrt{2} < r < b - \sqrt{2}$. Θεωρούμε το $x = r + \sqrt{2}$. Αν το x είναι ρητός, τότε το $\sqrt{2} = x - r$ είναι και αυτό ρητός και έχουμε άτοπο. Άρα το x είναι άρρητος και ισχύει $a < x < b$. □

Ασκήσεις

1.16. Αν $a < b$, πόσοι ρητοί υπάρχουν ανάμεσα στα a, b ; Η πυκνότητα των ρητών λέει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας τέτοιος ρητός.

1.9 Δυνάμεις και ρίζες

Ορισμός 1.5. Είναι γνωστό ότι η δύναμη a^n με εκθέτη $n \in \mathbb{N}$ ορίζεται με τον τύπο

$$a^n = \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ φορές}}$$

Αν $a \neq 0$, τότε η δύναμη a^0 καθώς και η a^n με εκθέτη $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$ ορίζονται με τους τύπους

$$a^0 = 1, \quad a^n = \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{\underbrace{a \cdots a}_{-n \text{ φορές}}}$$

Η δύναμη 0^n δεν ορίζεται για κανένα $n \in \mathbb{Z}$, $n \leq 0$.

Από τον κανόνα πολλαπλασιασμού προσήμων προκύπτει ότι: (i) $(-a)^n = a^n$, αν το n είναι άρτιο, (ii) $(-a)^n = -a^n$, αν το n είναι περιττό. Επίσης, αν το n είναι άρτιο, τότε $a^n > 0$ για κάθε $a \neq 0$. Τέλος, αν το n είναι περιττό, τότε: (i) $a^n > 0$ για κάθε $a > 0$, (ii) $a^n < 0$ για κάθε $a < 0$.

Το Θεώρημα 1.2 το οποίο ακολουθεί είναι σημαντικό, διότι εξασφαλίζει ότι κάποιες απλές αλγεβρικές εξισώσεις, όπως οι εξισώσεις δευτέρου βαθμού, έχουν λύση. Η απόδειξη του Θεωρήματος 1.2 βρίσκεται στην ενότητα 11.4 του Κεφαλαίου 11.²

Θεώρημα 1.2. Θεωρούμε $n \in \mathbb{N}$ και την εξίσωση $x^n = a$ με άγνωστο το x .

Αν το n είναι άρτιο, τότε η εξίσωση έχει: (i) ακριβώς δύο λύσεις, μία θετική και την αντίθετη αρνητική, αν $a > 0$, (ii) ακριβώς μία λύση, το 0, αν $a = 0$, (iii) καμία λύση, αν $a < 0$.

Αν το n είναι περιττό, τότε η εξίσωση έχει: (i) ακριβώς μία λύση, θετική, αν $a > 0$, (ii) ακριβώς μία λύση, το 0, αν $a = 0$, (iii) ακριβώς μία λύση, αρνητική, αν $a < 0$.

Ορισμός 1.6. Από το Θεώρημα 1.2 προκύπτει ότι αν $n \in \mathbb{N}$ και $a \geq 0$, τότε η εξίσωση $x^n = a$ με άγνωστο το x έχει μοναδική μη-αρνητική λύση την οποία ονομάζουμε **n -οστή ρίζα** του a και τη συμβολίζουμε $\sqrt[n]{a}$. Δηλαδή, όταν βλέπουμε το σύμβολο $\sqrt[n]{a}$, τότε καταλαβαίνουμε ότι

$$\sqrt[n]{a} \geq 0, \quad (\sqrt[n]{a})^n = a.$$

Αν $a < 0$, τότε δεν ορίζεται το $\sqrt[n]{a}$ για κανένα $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Άρα $\sqrt[n]{0} = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, $\sqrt[n]{a} > 0$ για κάθε $a > 0$ και $n \in \mathbb{N}$.

Αν $n = 2, 3, 4, \dots$, τότε το $\sqrt[n]{a}$ ονομάζεται **δεύτερη, τρίτη, τέταρτη, ... ρίζα** του a . Στην περίπτωση $n = 2$, το $\sqrt[n]{a}$ συμβολίζεται και $\sqrt{a}$ και ονομάζεται και **τετραγωνική ρίζα** ή, πιο απλά, **ρίζα** του a . Στην περίπτωση $n = 3$, το $\sqrt[n]{a}$ ονομάζεται και **κυβική ρίζα** του a .

Προσέξτε: σε κάποια βιβλία η n -οστή ρίζα $\sqrt[n]{a}$ ορίζεται και όταν $a < 0$ και ο φυσικός n είναι περιττός. Επειδή, όμως, τότε πρέπει να είναι κανείς προσεκτικός στην εφαρμογή διάφορων αλγεβρικών τύπων με ρίζες, είναι ίσως προτιμότερο να αποφύγουμε τη χρήση του συμβόλου $\sqrt[n]{a}$ όταν $a < 0$. Έτσι θα κάνουμε σε αυτές τις σημειώσεις.

Παράδειγμα 1.8. Η εξίσωση $x^4 = 16$ έχει δύο λύσεις, το $\sqrt[4]{16} = 2$ και το $-\sqrt[4]{16} = -2$. Όμως, η εξίσωση $x^4 = -16$ δεν έχει καμία λύση.

Παράδειγμα 1.9. Η εξίσωση $x^5 = 32$ έχει μία λύση, το $\sqrt[5]{32} = 2$. Η εξίσωση $x^5 = -32$ έχει μία λύση, το $-\sqrt[5]{32} = -2$. Προσέξτε: δεν ορίζεται το $\sqrt[5]{-32}$.

Όπως είπαμε πιο πριν, το Θεώρημα 1.2 εξασφαλίζει ότι οι εξισώσεις δευτέρου βαθμού έχουν λύση. Πράγματι, έστω η εξίσωση

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

²Δείτε και τις σημειώσεις «Ανάλυση» [1].

με $a \neq 0$. Με τη λεγόμενη μέθοδο εμφάνισης τέλειου τετραγώνου, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a}) \\ &= a((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}), \end{aligned} \quad (1.1)$$

όπου $\Delta = b^2 - 4ac$ είναι η λεγόμενη διακρίνουσα της εξίσωσης.

Από την (1.1) προκύπτουν αμέσως τα εξής.

Αν $\Delta = 0$, τότε η εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$ γράφεται, ισοδύναμα, $x + \frac{b}{2a} = 0$ και έχει μοναδική λύση, το $\rho = -\frac{b}{2a}$.

Αν $\Delta > 0$, τότε η εξίσωση γράφεται, ισοδύναμα, $x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ και έχει ακριβώς δύο λύσεις, τις $\rho_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ και $\rho_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Αν $\Delta < 0$, τότε η εξίσωση, προφανώς, δεν έχει πραγματική λύση. Έχει, όμως, δύο μιγαδικές λύσεις.

Πράγματι, η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $x + \frac{b}{2a} = \pm i \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ και έχει τις συζυγείς μιγαδικές λύσεις $\rho_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ και $\rho_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Τέλος, από την (1.1) βρίσκουμε, ανάλογα με το αν $\Delta = 0$ ή $\Delta > 0$ ή $\Delta < 0$, την αντίστοιχη παραγοντοποίηση του πολωνύμου $ax^2 + bx + c$:

$$ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 = a(x - \rho)^2 \quad \text{αν } \Delta = 0,$$

$$ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a})(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}) = a(x - \rho_1)(x - \rho_2) \quad \text{αν } \Delta > 0,$$

$$ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a})(x + \frac{b}{2a} - i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}) = a(x - \rho_1)(x - \rho_2) \quad \text{αν } \Delta < 0.$$

Αξίζει να αναφέρουμε ότι ένα πόρισμα του Θεωρήματος 1.2 είναι το ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας άρρητος. Πράγματι, το Θεώρημα 1.2 εξασφαλίζει το ότι η εξίσωση $x^2 = 2$ έχει ακριβώς μία θετική λύση την οποία, όπως είπαμε, συμβολίζουμε $\sqrt{2}$ και είναι γνωστή από το Γυμνάσιο η απόδειξη του ότι το $\sqrt{2}$ είναι άρρητος. Αξίζει, όμως, να επαναλάβουμε σύντομα την απόδειξη αυτή. Θα υποθέσουμε ότι ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Έστω, λοιπόν, ότι $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, όπου $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$. Κάνοντας απλοποίηση, αν χρειάζεται, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι m, n δεν έχουν κοινό διαιρέτη > 1 . Από την $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ συνεπάγεται $2n^2 = m^2$. Τότε το m^2 είναι άρτιο, οπότε το m είναι άρτιο, οπότε ισχύει $m = 2k$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Συνεπάγεται $2n^2 = 4k^2$, οπότε $n^2 = 2k^2$. Τότε το n^2 είναι άρτιο, οπότε το n είναι άρτιο, οπότε ισχύει $n = 2l$ για κάποιο $l \in \mathbb{N}$. Καταλήγουμε στο ότι οι m, n έχουν κοινό διαιρέτη το 2, αλλά αυτό έρχεται σε αντίφαση με την αρχική μας υπόθεση. Άρα το $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

Τώρα θα ορίσουμε τη δύναμη a^r , όταν ο εκθέτης r είναι ρητός.

Ορισμός 1.7. Αν $a > 0$ και $r \in \mathbb{Q}$, δηλαδή $r = \frac{m}{n}$ όπου $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, τότε είναι γνωστό ότι η δύναμη a^r ορίζεται με τον τύπο

$$a^r = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Επίσης, αν $a = 0$ και $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$, τότε ορίζουμε

$$0^r = 0.$$

Το 0^r δεν ορίζεται για κανένα $r \in \mathbb{Q}$, $r \leq 0$. Επίσης, αν $a < 0$, τότε δεν ορίζεται το a^r , παρά μόνο όταν $r \in \mathbb{Z}$ (σύμφωνα με τον Ορισμό 1.5).

Παράδειγμα 1.10. Τα 0^{-2} , $0^{-\frac{3}{4}}$, $0^{-\frac{3}{5}}$, 0^0 , $(-2)^{\frac{5}{3}}$, $(-2)^{\frac{5}{2}}$ δεν ορίζονται. Το $(-2)^{\frac{4}{2}}$ ορίζεται και είναι ίσο με $(-2)^2 = 4$.

Σχετικά με το πρόσημο του a^r , είναι προφανές ότι $a^r = (\sqrt[n]{a})^m > 0$ για κάθε $a > 0$, αφού τότε είναι $\sqrt[n]{a} > 0$.

Αφού έχουμε ορίσει τις δυνάμεις με ρητούς εκθέτες, μπορούμε να αποδείξουμε τις αλγεβρικές ιδιότητες αυτών των δυνάμεων. Αυτές οι ιδιότητες περιγράφονται παρακάτω, στην Πρόταση

1.4: θεωρήστε ότι στην πρόταση αυτή όλοι οι εκθέτες είναι ρητοί, δηλαδή στη θέση των διάφορων x, y, x_1, x_2 τοποθετήστε αντίστοιχους ρητούς r, s, r_1, r_2 . Δεν θα ασχοληθούμε με τις αποδείξεις αυτών των ιδιοτήτων για ρητούς εκθέτες, διότι είναι γνωστές από το Γυμνάσιο και το Λύκειο.

Ας δούμε, τώρα, πώς θα ορίσουμε δυνάμεις με *άρρητους* εκθέτες. Κατ' αρχάς, θα περιγράψουμε μια ιδέα που θα μας οδηγήσει σε έναν τέτοιον ορισμό. Στην περίπτωση που είναι $a > 1$, αναμένουμε η δύναμη a^x να αυξάνεται, όταν ο εκθέτης αυξάνεται. Τουλάχιστον, σύμφωνα με την Πρόταση 1.4 για ρητούς εκθέτες, αυτό ισχύει όταν ο εκθέτης είναι ρητός και αυξάνεται, οπότε, «λογικά», αυτή η ιδιότητα θα επεκτείνεται και στην περίπτωση που ο γενικός πραγματικός εκθέτης αυξάνεται. Επομένως, είναι αναμενόμενο ότι όταν ένας άρρητος εκθέτης x είναι ανάμεσα σε δύο ρητούς εκθέτες r, s , δηλαδή όταν $r < x < s$, τότε θα συνεπάγεται ότι $a^r < a^x < a^s$. Οπότε, όπως και αν ορίσουμε τη δύναμη a^x , θα πρέπει να ισχύει αυτή η ιδιότητα. Όμως, αυτό ακριβώς μάς επιτρέπει να κάνουμε η ακόλουθη Πρόταση 1.3: εξασφαλίζει την ύπαρξη και τη μοναδικότητα ενός αριθμού y ο οποίος βρίσκεται ανάμεσα στις δυνάμεις a^r και a^s , όταν οι ρητοί r, s ικανοποιούν την $r < x < s$, οπότε η δύναμη a^x *πρέπει* να είναι αυτός ο μοναδικός αριθμός y .

Πρόταση 1.3. Έστω $a > 1$ και $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Τότε υπάρχει μοναδικός αριθμός y με την ιδιότητα:

$$a^r < y < a^s \quad \text{για κάθε } r \in \mathbb{Q}, \quad s \in \mathbb{Q} \text{ με } r < x < s.$$

Η απόδειξη της Πρότασης 1.3 βρίσκεται στην ενότητα 11.5 του Κεφαλαίου 11.

Τώρα, βάσει όσων είπαμε παραπάνω, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.8. Έστω $a > 1$ και $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Ορίζουμε το a^x να είναι ο μοναδικός αριθμός y , η ύπαρξη του οποίου εξασφαλίζεται από την Πρόταση 1.3.

Αν $a = 1$ και $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, τότε ορίζουμε

$$1^x = 1.$$

Αν $0 < a < 1$ και $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, τότε $\frac{1}{a} > 1$, οπότε έχουμε ήδη ορίσει το $(\frac{1}{a})^x$ και αυτό το $(\frac{1}{a})^x$ το χρησιμοποιούμε για να ορίσουμε

$$a^x = \frac{1}{(\frac{1}{a})^x}.$$

Τέλος, αν $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $x > 0$, τότε ορίζουμε

$$0^x = 0.$$

Το 0^x δεν ορίζεται για κανένα $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $x < 0$. Επίσης, αν $a < 0$, τότε το a^x δεν ορίζεται για κανένα $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Πριν προχωρήσουμε, αξίζει να κάνουμε ένα πρακτικό σχόλιο πάνω στον ορισμό της δύναμης a^x , όταν $a > 1$ και το x είναι θετικός άρρητος. Όταν, λοιπόν, το x είναι θετικός άρρητος, τότε υπάρχουν κάποιοι πολύ συγκεκριμένοι ρητοί r, s με την ιδιότητα $r < x < s$ οι οποίοι είναι πολύ κοντά στο x . Τότε είναι αναμενόμενο ότι και οι αντίστοιχες δυνάμεις a^r, a^s θα είναι πολύ κοντά στο a^x , οπότε θα είναι χρήσιμες για έναν προσεγγιστικό υπολογισμό του a^x . Για να περιγράψουμε τους συγκεκριμένους ρητούς r, s , θεωρούμε το δεκαδικό ανάπτυγμα του x :

$$x = X_N \dots X_1 X_0 . x_1 x_2 x_3 \dots,$$

όπου τα δεκαδικά ψηφία $X_N, \dots, X_1, X_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ του x παίρνουν τιμές από τους αριθμούς $0, 1, \dots, 9$. Το ακριβές μαθηματικό νόημα του δεκαδικού αναπτύγματος θα το μελετήσουμε αργότερα, στην υποενότητα 9.3.3 του ένατου κεφαλαίου, όπου θα μιλήσουμε για γενικότερα p -αδικά αναπτύγματα (δυναδικά, τριαδικά κ.τ.λ.), αλλά ήδη γνωρίζουμε «διαισθητικά» από το Γυμνάσιο ότι μπορούμε να σχηματίσουμε τις λεγόμενες δεκαδικές προσεγγίσεις του x , δηλαδή τους διαδοχικούς αριθμούς

$$r_1 = X_N \dots X_1 X_0 . x_1, \quad r_2 = X_N \dots X_1 X_0 . x_1 x_2, \quad r_3 = X_N \dots X_1 X_0 . x_1 x_2 x_3, \quad \dots,$$

και ότι οι αριθμοί $r_1, r_2, r_3, \dots$, οι οποίοι είναι ρητοί μικρότεροι του x , αυξάνονται και προσεγγίζουν το x . Οι αντίστοιχοι ρητοί αριθμοί

$$s_1 = r_1 + \frac{1}{10}, \quad s_2 = r_2 + \frac{1}{10^2}, \quad s_3 = r_3 + \frac{1}{10^3}, \quad \dots$$

είναι μεγαλύτεροι του x , μειώνονται και προσεγγίζουν, επίσης, το x :

$$r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq \dots < x < \dots \leq s_3 \leq s_2 \leq s_1.$$

Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις τιμές των ρητών $r_1, r_2, r_3, \dots$ ή των $s_1, s_2, s_3, \dots$, ώστε με τις αντίστοιχες δυνάμεις $a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \dots$ ή τις $a^{s_1}, a^{s_2}, a^{s_3}, \dots$ να προσεγγίσουμε το a^x .

Παράδειγμα 1.11. Ο άρρητος $\sqrt{2}$ έχει το δεκαδικό ανάπτυγμα

$$\sqrt{2} = 1.4142135 \dots$$

και τις διαδοχικές δεκαδικές προσεγγίσεις

$$1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, 1.414213, 1.4142135, \dots$$

Άρα, αν $a > 1$, τότε η δύναμη $a^{\sqrt{2}}$ προσεγγίζεται από τις διαδοχικές δυνάμεις

$$a^{1.4}, a^{1.41}, a^{1.414}, a^{1.4142}, a^{1.41421}, a^{1.414213}, a^{1.4142135}, \dots$$

Οι εκθέτες όλων αυτών των δυνάμεων, δηλαδή οι διαδοχικές δεκαδικές προσεγγίσεις του $\sqrt{2}$, είναι ρητοί αριθμοί. Για παράδειγμα:

$$1.41 = \frac{141}{100}, \quad \text{οπότε} \quad a^{1.41} = \sqrt[100]{a^{141}}.$$

$$1.41421 = \frac{141421}{100000}, \quad \text{οπότε} \quad a^{1.41421} = \sqrt[100000]{a^{141421}}.$$

Έχουμε τελειώσει με την περιγραφή του πώς ορίζεται η δύναμη a^x , όταν το x είναι πραγματικός αριθμός: φυσικός, ακέραιος, ρητός, άρρητος. Συνοψίζουμε:

Αν $a > 0$, τότε το a^x ορίζεται για κάθε πραγματικό x .

Αν $a = 0$, τότε το 0^x ορίζεται και είναι ίσο με 0 για κάθε πραγματικό $x > 0$, αλλά όχι για $x \leq 0$.

Αν $a < 0$, τότε το a^x ορίζεται μόνο για ακέραιο x .

Σχετικά με το πρόσημο του a^x έχουμε ότι $a^x > 0$ για κάθε $a > 0$ και κάθε x .

Οι βασικές ιδιότητες των δυνάμεων καταγράφονται στην Πρόταση 1.4 η οποία ακολουθεί. Η απόδειξή της στη γενική περίπτωση πραγματικών εκθετών έχει πολλές τεχνικές λεπτομέρειες, μάλλον χωρίς ιδιαίτερη σημασία, και δεν υπάρχει σε αυτές τις σημειώσεις³. Επαναλαμβάνουμε, όμως, ότι στην περίπτωση ρητών εκθετών η απόδειξη των ιδιοτήτων είναι απλή και είναι γνωστή από το Γυμνάσιο και το Λύκειο.

Πρόταση 1.4. (i) Έστω $a > 0, b > 0$. Τότε:

$$a^x b^x = (ab)^x, \quad a^x a^y = a^{x+y}, \quad (a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}.$$

(ii) Έστω $0 < a_1 < a_2$. Αν $x > 0$, τότε $a_1^x < a_2^x$. Αν $x < 0$, τότε $a_1^x > a_2^x$.

(iii) Έστω $x_1 < x_2$. Αν $a > 1$, τότε $a^{x_1} < a^{x_2}$. Αν $0 < a < 1$, τότε $a^{x_1} > a^{x_2}$.

Ασκήσεις

1.17. Ποιες από τις δυνάμεις $(-3)^0, (-3)^{\frac{7}{3}}, (-3)^{\frac{16}{4}}, (-3)^{-\frac{10}{12}}, (-3)^{\sqrt{2}}, 0^{\frac{7}{3}}, 0^{-3}, 0^{-\sqrt{2}}, 0^{\sqrt{2}}$ ορίζονται;

³ Δείτε τις σημειώσεις «Ανάλυση» [1].

1.18. (i) Ορίζονται οι δύο μεριές της ισότητας $((-1)^2)^{\frac{5}{2}} = (-1)^{2\frac{5}{2}}$; Είναι σωστή αυτή η ισότητα; Υπάρχει αντίφαση με το (i) της Πρότασης 1.4;

(ii) Ορίζονται οι δύο μεριές της ισότητας $((-1)^2)^{\sqrt{2}} = (-1)^{2\sqrt{2}}$;

(iii) Ορίζονται οι δύο μεριές της ισότητας $((-1)^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{2}} = (-1)^{\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{2}}$;

1.19. (i) Για ποια x ισχύει $(-2)^x < 0$;

(ii) Για ποια x ισχύει $((-1)^x)^{\sqrt{2}} = (-1)^{x\sqrt{2}}$;

1.20. (i) Αποδείξτε ότι $(\sqrt[17]{3})^{24} < 3^{\sqrt{2}} < (\sqrt[17]{3})^{25}$.

(ii) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $2^{\sqrt{3}}$ και $3^{\frac{2}{\sqrt{5}}}$.

(iii) Υπολογίστε τους ακέραιους $[2^{\sqrt{2}}10]$ και $[2^{\sqrt{2}}100]$.

1.21. Έστω $n \in \mathbb{N}$.

(i) Αν το n είναι περιττό, αποδείξτε ότι $x^n < y^n$, αν και μόνο αν $x < y$.

(ii) Αν το n είναι άρτιο, αποδείξτε ότι $x^n < y^n$, αν και μόνο αν $|x| < |y|$.

1.22. Έστω $n \in \mathbb{N}$.

(i) Αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{a^n} = a$ για κάθε $a \geq 0$.

(ii) Αν το n είναι άρτιο, αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ για κάθε a .

1.23. Έστω $a \geq 0, b \geq 0$. Αποδείξτε ότι $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Αποδείξτε ότι $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, αν και μόνο αν $a = 0$ ή $b = 0$.

1.24. Αποδείξτε ότι για κάθε $a \geq 0, b \geq 0$ ισχύει

$$\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}.$$

Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι και τα δύο μέρη της πρώτης ισότητας έχουν την ίδια n -οστή δύναμη. Επίσης, αποδείξτε ότι και τα τρία μέρη της δεύτερης ισότητας έχουν την ίδια nm -οστή δύναμη.

1.25. Αν $n \in \mathbb{N}$ και $0 \leq a < b$, αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

1.26. (i) Περιγράψτε γεωμετρική κατασκευή του $\sqrt{a}$.

Υπόδειξη: Έστω $1 < a$. Αν O, I και A είναι τα σημεία της πραγματικής ευθείας τα οποία αναπαριστούν τους αριθμούς $0, 1$ και a , τότε φτιάξτε ημικύκλιο με διάμετρο OA και ευθεία κάθετη στην πραγματική ευθεία στο σημείο I η οποία να τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο B . Αν x είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος OB , αποδείξτε ότι $x^2 = a$. Τι θα κάνετε, αν $0 < a < 1$;

(ii) Περιγράψτε γεωμετρική κατασκευή των $\sqrt[4]{a}$ και $\sqrt[8]{a}$.

1.10 Λογάριθμοι

Η απόδειξη του ακόλουθου θεωρήματος βρίσκεται στην ενότητα 11.6 του Κεφαλαίου 11.⁴

Θεώρημα 1.3. Έστω $a > 0, a \neq 1$. Για κάθε $y > 0$ υπάρχει μοναδικό x , ώστε $a^x = y$.

Βάσει του Θεωρήματος 1.3 προχωράμε στον ακόλουθο γνωστό ορισμό.

⁴Για περισσότερα δείτε τις σημειώσεις «Ανάλυση» [1].

Ορισμός 1.9. Έστω $a > 0$, $a \neq 1$ και $y > 0$. Η μοναδική λύση της εξίσωσης $a^x = y$ με άγνωστο το x ονομάζεται **λογάριθμος** του y με **βάση** a και συμβολίζεται $\log_a y$. Δηλαδή, με το σύμβολο $\log_a y$ καταλαβαίνουμε ότι:

$$a^{\log_a y} = y.$$

Με άλλα λόγια, ισχύει η ισοδυναμία:

$$x = \log_a y \Leftrightarrow a^x = y.$$

Η Πρόταση 1.5 περιέχει τις βασικές ιδιότητες των λογάριθμων. Οι αποδείξεις τους είναι γνωστές από το Λύκειο.

Πρόταση 1.5. Έστω $a > 0$, $a \neq 1$.

(i) Για κάθε $y > 0$, $z > 0$ ισχύει

$$\log_a(yz) = \log_a y + \log_a z.$$

(ii) Για κάθε $y > 0$, $z > 0$ ισχύει

$$\log_a \frac{y}{z} = \log_a y - \log_a z.$$

(iii) Για κάθε $y > 0$ και κάθε z ισχύει

$$\log_a y^z = z \log_a y.$$

(iv) $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$.

(v) Έστω $0 < y_1 < y_2$. Αν $a > 1$, τότε $\log_a y_1 < \log_a y_2$. Αν $0 < a < 1$, τότε $\log_a y_1 > \log_a y_2$.

Ασκήσεις

1.27. Υπολογίστε τα $\log_2 4$, $\log_{\frac{1}{2}} 2$, $\log_{\frac{1}{2}} 4$.

1.28. Να συγκρίνετε τα $\log_2 3$ και $\log_3 4$.

1.29. Έστω $a > 0$, $a \neq 1$. Αποδείξτε ότι $\log_{\frac{1}{a}} y = -\log_a y$ για κάθε $y > 0$.

1.30. Έστω $a > 0$, $a \neq 1$. Αποδείξτε ότι $\log_{a^z} y = \log_a y$ για κάθε $y > 0$, $z \neq 0$.

1.31. (i) Έστω $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$. Αποδείξτε ότι

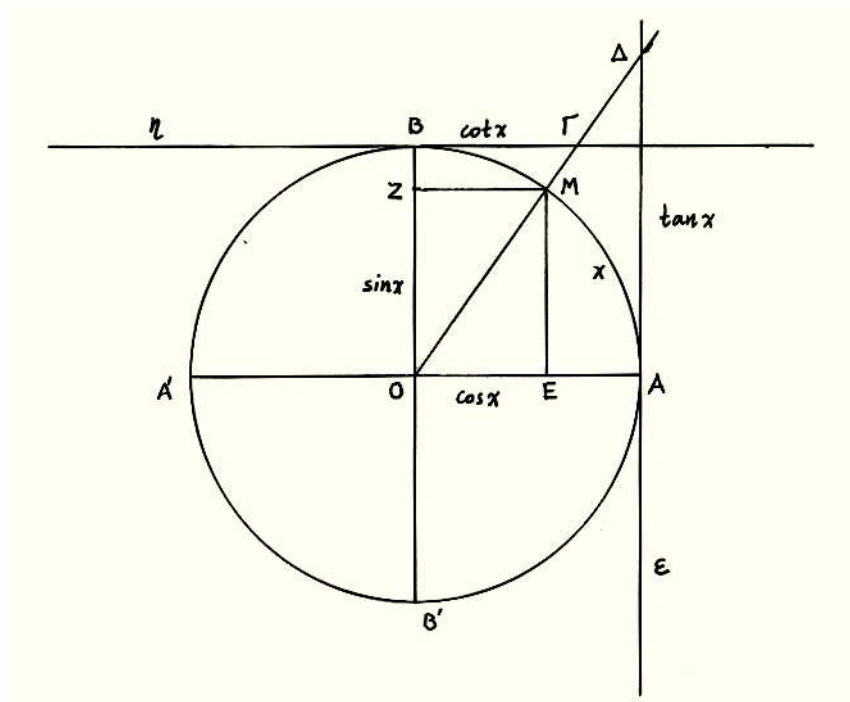
$$\log_b y = \frac{1}{\log_a b} \log_a y$$

για κάθε $y > 0$. Αυτός είναι ο λεγόμενος τύπος **αλλαγής βάσης** λογάριθμου.

(ii) Υπολογίστε το γινόμενο $\log_2 3 \log_3 5 \log_5 7 \log_7 10 \log_{10} 8$, χρησιμοποιώντας τον τύπο αλλαγής βάσης λογάριθμου.

1.11 Τριγωνομετρικοί αριθμοί

Τώρα θα περιγράψουμε πώς ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί: το συνημίτονο, το ημίτονο, η εφαπτόμενη και η συνεφαπτόμενη. Οι ορισμοί που θα εκτεθούν εδώ είναι γεωμετρικής φύσεως, παραλλαγές, κατ' ουσίαν, των γεωμετρικών ορισμών που μαθαίνουμε στο Λύκειο. Οι ορισμοί αυτοί δεν είναι αποδεκτοί από την Ανάλυση, αλλά, επειδή κάθε αυστηρά αναλυτικός ορισμός των τριγωνομετρικών αριθμών χρειάζεται αρκετή προεργασία, θα περιοριστούμε τώρα στους γεωμετρικούς ορισμούς. Κάποιοι αυστηρά αναλυτικοί ορισμοί υπάρχουν στην ενότητα 11.17 του Κεφαλαίου 11, αλλά θα κοιτάξετε εκεί αφού πρώτα έχετε διαβάσει τα σχετικά με τις δυναμοσειρές στο ένατο κεφάλαιο.



Σχήμα 1.4

Παρατηρήστε το σχήμα 1.4. Θεωρούμε κύκλο κέντρου O και ακτίνας 1 και δύο κάθετες μεταξύ τους διαμέτρους, την οριζόντια $A'O A$ (το A είναι δεξιά του O) και την κατακόρυφη $B'O B$ (το B είναι πάνω από το O). Θεωρούμε οποιοδήποτε x και γράφουμε πάνω στον κύκλο τόξο AM μήκους $|x|$, αρχίζοντας από το A και πηγαίνοντας προς την αντίθετη κατεύθυνση της κίνησης των δεικτών του ρολογιού, αν $x > 0$ ή προς την κατεύθυνση της κίνησης των δεικτών του ρολογιού, αν $x < 0$. Όταν το x μεταβάλλεται, τότε το σημείο M μεταβάλλεται αναλόγως: αν το x αυξάνεται, τότε το σημείο M περιστρέφεται πάνω στον κύκλο με φορά περιστροφής αντίθετη της φοράς περιστροφής των δεικτών του ρολογιού και, αναλόγως, αν το x μειώνεται, τότε το σημείο M περιστρέφεται πάνω στον κύκλο με φορά περιστροφής ίδια με τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού.

Είναι γνωστό ότι το γράμμα π χρησιμοποιείται για να συμβολίσει το μισό του μήκους οποιουδήποτε κύκλου με ακτίνα 1. Επομένως, το $\frac{\pi}{2}$ αντιστοιχεί στο σημείο B , το π στο σημείο A' , το $\frac{3\pi}{2}$ στο σημείο B' και το 2π στο σημείο A . Όταν το x αυξάνεται στο διάστημα $[0, 2\pi]$, τότε το σημείο M διατρέχει τον κύκλο $ABA'B'A$ με φορά περιστροφής αντίθετη εκείνης των δεικτών του ρολογιού και, αν το x ξεπεράσει το 2π , τότε το M ξαναρχίζει να διατρέχει τον κύκλο. Ακριβώς το ίδιο γίνεται όταν το x αυξάνεται στο διάστημα $[k2\pi, k2\pi + 2\pi] = [2k\pi, 2(k+1)\pi]$ με $k \in \mathbb{Z}$: η κίνηση του σημείου M είναι **περιοδική** με περίοδο 2π . Αυτό οφείλεται στο ότι, αν ένα σημείο M αντιστοιχεί σε κάποιο x , τότε το ίδιο M αντιστοιχεί και σε όλα τα $x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Το σημείο A αντιστοιχεί στα $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Το σημείο B αντιστοιχεί στα $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi = (4k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Το σημείο A' αντιστοιχεί στα $x = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Τέλος, το σημείο B' αντιστοιχεί στα $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi = (4k+3)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Κατόπιν, ζωγραφίζουμε την ευθεία ε η οποία εφάπτεται στον κύκλο στο σημείο A και την ευθεία η η οποία εφάπτεται στον κύκλο στο σημείο B .

Τώρα έχουμε τέσσερις πραγματικές ευθείες. Την οριζόντια ευθεία της διαμέτρου $A'O A$ στην οποία το σημείο O αναπαριστά τον αριθμό 0, την κατακόρυφη ευθεία της διαμέτρου $B'O B$ στην οποία το σημείο O αναπαριστά τον αριθμό 0, την ευθεία ε στην οποία το σημείο A αναπαριστά τον αριθμό 0 και την ευθεία η στην οποία το σημείο B αναπαριστά τον αριθμό 0. Και στις τέσσερις ευθείες η μονάδα μέτρησης είναι ίση με 1, δηλαδή η ακτίνα του κύκλου.

Κατόπιν, από το σημείο M θα προκύψουν τα τέσσερα σημεία E , Z , Δ , Γ , όπως περιγράφει ο ακόλουθος ορισμός, στα οποία αντιστοιχούν οι λεγόμενοι *τριγωνομετρικοί αριθμοί* του x . Εφεξής θα συνεχίσουμε να αναφερόμαστε στο σχήμα 1.4.

Ορισμός 1.10. Για κάθε x προσδιορίζουμε το αντίστοιχο σημείο M του κύκλου και

(i) φέρνουμε κάθετη ME στη διάμετρο $A'O A$. Συμβολίζουμε

$$\cos x$$

και ονομάζουμε **συνημίτονο** του x τον αριθμό ο οποίος αντιστοιχεί στο σημείο E της πραγματικής ευθείας της διαμέτρου $A'O A$.

(ii) φέρνουμε κάθετη MZ στη διάμετρο $B'O B$. Συμβολίζουμε

$$\sin x$$

και ονομάζουμε **ημίτονο** του x τον αριθμό ο οποίος αντιστοιχεί στο σημείο Z της πραγματικής ευθείας της διαμέτρου $B'O B$.

(iii) προεκτείνουμε την OM μέχρι να συναντήσει την ευθεία ε στο σημείο Δ . Συμβολίζουμε

$$\tan x$$

και ονομάζουμε **εφαπτόμενη** του x τον αριθμό ο οποίος αντιστοιχεί στο σημείο Δ της πραγματικής ευθείας ε .

(iv) προεκτείνουμε την OM μέχρι να συναντήσει την ευθεία η στο σημείο Γ . Συμβολίζουμε

$$\cot x$$

και ονομάζουμε **συνεφαπτόμενη** του x τον αριθμό ο οποίος αντιστοιχεί στο σημείο Γ της πραγματικής ευθείας η .

Οι αριθμοί $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$, $\cot x$ ονομάζονται **τριγωνομετρικοί αριθμοί** του x . Επίσης, ο κύκλος βάσει του οποίου ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί ονομάζεται **τριγωνομετρικός κύκλος**. Οι ευθείες $A'O A$ και $B'O B$ ονομάζονται άξονες των συνημιτόνων και των ημιτόνων, αντιστοίχως, ενώ οι ευθείες ε και η ονομάζονται άξονες των εφαπτόμενων και των συνεφαπτόμενων, αντιστοίχως.

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός $\tan x$ δεν ορίζεται όταν το M ταυτίζεται με το B ή με το B' ή, ισοδύναμα, όταν $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, διότι και στις δύο περιπτώσεις η προέκταση της OM δεν τέμνει την ευθεία ε . Ομοίως, ο αριθμός $\cot x$ δεν ορίζεται όταν το M ταυτίζεται με το A ή με το A' ή, ισοδύναμα, όταν $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, διότι και στις δύο περιπτώσεις η προέκταση της OM δεν τέμνει την ευθεία η .

Είναι φανερό ότι το $(\cos x, \sin x)$ είναι το ζεύγος συντεταγμένων του M στο επίπεδο του κύκλου, με την ευθεία της διαμέτρου $A'O A$ ως άξονα πρώτων συντεταγμένων και την ευθεία της διαμέτρου $B'O B$ ως άξονα δεύτερων συντεταγμένων.

Παράδειγμα 1.12. $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, $\tan 0 = 0$. Δεν ορίζεται το $\cot 0$.

$\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\cot \frac{\pi}{2} = 0$. Δεν ορίζεται το $\tan \frac{\pi}{2}$.

$\cos \pi = -1$, $\sin \pi = 0$, $\tan \pi = 0$. Δεν ορίζεται το $\cot \pi$.

$\cos \frac{3\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$, $\cot \frac{3\pi}{2} = 0$. Δεν ορίζεται το $\tan \frac{3\pi}{2}$.

Για το πρόσημο των $\cos x$ και $\sin x$ έχουμε τα εξής. Τα x του διαστήματος $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ αντιστοιχούν στα σημεία του δεξιού ημικυκλίου του τριγωνομετρικού κύκλου, οπότε ισχύει $\cos x > 0$ στο διάστημα αυτό. Τα x του διαστήματος $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ αντιστοιχούν στα σημεία του αριστερού ημικυκλίου, οπότε ισχύει $\cos x < 0$ στο διάστημα αυτό. Τα x του διαστήματος $(0, \pi)$ αντιστοιχούν στα σημεία του πάνω ημικυκλίου, οπότε ισχύει $\sin x > 0$ στο διάστημα αυτό. Τέλος, τα x του διαστήματος $(\pi, 2\pi)$ αντιστοιχούν στα σημεία του κάτω ημικυκλίου, οπότε ισχύει $\sin x < 0$ στο διάστημα αυτό.

Είναι, επίσης, φανερό ότι

$$-1 \leq \cos x \leq 1, \quad -1 \leq \sin x \leq 1.$$

Η Πρόταση 1.6 συγκεντρώνει μερικές βασικές ιδιότητες των τριγωνομετρικών αριθμών. Οι αποδείξεις τις οποίες θα δούμε είναι γεωμετρικής φύσεως και βασίζονται στον τριγωνομετρικό κύκλο. Συνεχίζουμε να αναφερόμαστε στο σχήμα 1.4.

Πρόταση 1.6. (i)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

(ii)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

(iii) $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$, $\tan(-x) = -\tan x$, $\cot(-x) = -\cot x$.(iv) $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$, $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$, $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \cot x$, $\cot(\frac{\pi}{2} - x) = \tan x$.(v) $\cos(x + 2\pi) = \cos x$, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\tan(x + 2\pi) = \tan x$, $\cot(x + 2\pi) = \cot x$.(vi) $\cos(x + \pi) = -\cos x$, $\sin(x + \pi) = -\sin x$, $\tan(x + \pi) = \tan x$, $\cot(x + \pi) = \cot x$.

(vii)

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \quad \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

(viii)

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x-y}{2} \sin \frac{x+y}{2}, \quad \sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}.$$

(ix) Αν $0 \leq x_1 < x_2 \leq \pi$, τότε $\cos x_1 > \cos x_2$. Αν $\pi \leq x_1 < x_2 \leq 2\pi$, τότε $\cos x_1 < \cos x_2$.(x) Αν $-\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2}$, τότε $\sin x_1 < \sin x_2$. Αν $\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{3\pi}{2}$, τότε $\sin x_1 > \sin x_2$.

Απόδειξη. (i) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο OEM .

(ii) Για τα όμοια τρίγωνα OAA' , OEM ισχύει $\frac{\text{μήκος του } AA'}{\text{μήκος του } OA} = \frac{\text{μήκος του } EM}{\text{μήκος του } OE}$, οπότε $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Για τα όμοια τρίγωνα OBF , OZM ισχύει $\frac{\text{μήκος του } BF}{\text{μήκος του } OB} = \frac{\text{μήκος του } ZM}{\text{μήκος του } OZ}$, οπότε $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

(iii) Τα σημεία του τριγωνομετρικού κύκλου τα οποία αντιστοιχούν στους αριθμούς x και $-x$ είναι συμμετρικά ως προς τη διάμετρο $A'OA$.

(iv) Τα σημεία του τριγωνομετρικού κύκλου τα οποία αντιστοιχούν στους αριθμούς x και $\frac{\pi}{2} - x$ είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο της γωνίας AOB .

(v) Τα σημεία του τριγωνομετρικού κύκλου τα οποία αντιστοιχούν στους αριθμούς x και $x + 2\pi$ ταυτίζονται.

(vi) Τα σημεία του τριγωνομετρικού κύκλου τα οποία αντιστοιχούν στους αριθμούς x και $x + \pi$ είναι συμμετρικά ως προς το σημείο O .

(vii) Έστω M , N και K τα σημεία του τριγωνομετρικού κύκλου τα οποία αντιστοιχούν στα x , $-y$ και $x + y$. Τα τόξα AK , αυτό το οποίο περιέχει το M , και NM , αυτό το οποίο περιέχει το A , έχουν ίδιο μήκος. Επομένως, οι χορδές AK και NM έχουν ίδιο μήκος, οπότε

$$\sqrt{(\cos(x+y) - 1)^2 + (\sin(x+y) - 0)^2} = \sqrt{(\cos x - \cos(-y))^2 + (\sin x - \sin(-y))^2}.$$

Κάνοντας πράξεις και χρησιμοποιώντας τις (i) και (iii), προκύπτει η πρώτη ισότητα στην (vii). Η δεύτερη ισότητα προκύπτει από την πρώτη χρησιμοποιώντας τις (iii) και (iv):

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (x+y)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + (-y)\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos(-y) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin(-y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y. \end{aligned}$$

(viii) Από την (vii) έχουμε

$$\cos x = \cos\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) = \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} - \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2},$$

$$\cos y = \cos\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right) = \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} + \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

$$\text{Άρα } \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει και η δεύτερη ισότητα.

(ix) Αν $0 \leq x_1 < x_2 \leq \pi$, τότε τα σημεία M_1, M_2 του τριγωνομετρικού κύκλου τα οποία αντιστοιχούν στους αριθμούς x_1, x_2 είναι στο πάνω ημικύκλιο και το M_1 είναι δεξιά του M_2 , οπότε $\cos x_1 > \cos x_2$. Αν $\pi \leq x_1 < x_2 \leq 2\pi$, τότε τα ίδια σημεία M_1, M_2 είναι στο κάτω ημικύκλιο και το M_1 είναι αριστερά του M_2 , οπότε $\cos x_1 < \cos x_2$.

(x) Αν $-\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2}$, τότε τα σημεία M_1, M_2 του τριγωνομετρικού κύκλου τα οποία αντιστοιχούν στους αριθμούς x_1, x_2 είναι στο δεξιό ημικύκλιο και το M_1 είναι κάτω από το M_2 , οπότε $\sin x_1 < \sin x_2$. Αν $\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{3\pi}{2}$, τότε τα ίδια σημεία M_1, M_2 είναι στο αριστερό ημικύκλιο και το M_1 είναι πάνω από το M_2 , οπότε $\sin x_1 > \sin x_2$. $\square$

Ασκήσεις

1.32. Περιγράψτε ακριβώς την κίνηση του σημείου M πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο όταν: (i) το x αυξάνεται στο διάστημα $[0, \pi]$, (ii) το x μειώνεται στο διάστημα $[-\pi, 0]$, (iii) το x αυξάνεται στο διάστημα $[-\pi, \pi]$.

1.33. Υπολογίστε με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου και απλών γεωμετρικών ιδιοτήτων τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των $0, \pm\frac{\pi}{6}, \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{2\pi}{3}, \pm\frac{5\pi}{6}, \pi$.

1.34. Με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου λύστε τις εξισώσεις: $\cos x = \frac{1}{2}$, $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan x = 0$, $\tan x = -1$, $\tan x = \sqrt{3}$.

1.35. Αποδείξτε ότι $|a \cos x + b \sin x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$.

1.36. (i) Αποδείξτε με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου ότι για κάθε a, b με την ιδιότητα $a^2 + b^2 = 1$ υπάρχει μοναδικό $\theta \in [0, 2\pi)$, ώστε $\cos \theta = a$, $\sin \theta = b$.

(ii) Έστω $a^2 + b^2 > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $p > 0$ και $\theta \in [0, 2\pi)$ τα οποία εξαρτώνται από τα a, b , ώστε να ισχύει

$$a \cos x + b \sin x = p \cos(x - \theta)$$

για κάθε x .

Υπόδειξη: $a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right)$.

1.37. Αποδείξτε τα παρακάτω.

(i) $\cos y = \cos x$, αν και μόνο αν $y = x + 2k\pi$ ή $y = -x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(ii) $\sin y = \sin x$, αν και μόνο αν $y = x + 2k\pi$ ή $y = \pi - x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(iii) $\tan y = \tan x$, αν και μόνο αν $y = x + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(iv) $\cot y = \cot x$, αν και μόνο αν $y = x + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

1.38. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.6, αποδείξτε τα παρακάτω.

$$\begin{aligned} 1 + \tan^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x}, & 1 + \cot^2 x &= \frac{1}{\sin^2 x}, \\ \tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, & \cot(x+y) &= \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot x + \cot y}, \\ \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x, & \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x, \\ \cos(2x) &= \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}, & \sin(2x) &= \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}, & \tan(2x) &= \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}, & \cot(2x) &= \frac{1 - \tan^2 x}{2 \tan x}, \\ \sin x \sin y &= \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}, & \cos x \cos y &= \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}, & \sin x \cos y &= \frac{\sin(x-y) + \sin(x+y)}{2}. \end{aligned}$$

1.39. Χρησιμοποιώντας την τελευταία γραμμή της άσκησης 1.38 αποδείξτε ότι

$$\cos x + \cos(2x) + \cdots + \cos((n-1)x) + \cos(nx) = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}},$$

$$\sin x + \sin(2x) + \cdots + \sin((n-1)x) + \sin(nx) = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Υπόδειξη: Πολλαπλασιάστε με το $\sin \frac{x}{2}$.

1.12 Το σύμβολο Σ του αθροίσματος

Πολλές φορές συναντάμε αθροίσματα με προσθετέους οι οποίοι είναι αριθμημένοι ως εξής: $a_m, a_{m+1}, \dots, a_{n-1}, a_n$, όπου $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$ με $m \leq n$. Έχουμε, δηλαδή, τους αριθμούς a_k , όπου το k παίρνει όλες τις ακέραιες τιμές από το m μέχρι το n . Το άθροισμα αυτών των αριθμών το γράφουμε

$$a_m + a_{m+1} + \dots + a_{n-1} + a_n$$

ή, για συντόμευση, με το σύμβολο $\sum_{k=m}^n a_k$. Δηλαδή,

$$\sum_{k=m}^n a_k = a_m + a_{m+1} + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

Πρέπει να πούμε ότι το σύμβολο το οποίο χρησιμοποιούμε για τον δείκτη των προσθετέων δεν παίζει ιδιαίτερο ρόλο: τα $\sum_{k=m}^n a_k, \sum_{i=m}^n a_i, \sum_{j=m}^n a_j, \sum_{l=m}^n a_l$ είναι μεταξύ τους ίσα και όλα δηλώνουν το ίδιο άθροισμα $a_m + a_{m+1} + \dots + a_{n-1} + a_n$.

Παράδειγμα 1.13. $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} = \sum_{k=5}^{14} \frac{1}{k}$.

Παράδειγμα 1.14. $3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots + 18^2 + 19^2 = \sum_{j=3}^{19} j^2$.

Παράδειγμα 1.15. $2^{-3} + 2^{-2} + 2^{-1} + \dots + 2^{n-1} + 2^n = \sum_{l=-3}^n 2^l$.

Θα δούμε τώρα μερικούς απλούς αλγεβρικούς κανόνες χειρισμού του συμβόλου $\sum_{k=m}^n$.

Ο γνωστός τύπος αναδιάρθρωσης των προσθετέων

$$(a_m + a_{m+1} + \dots + a_n) + (b_m + b_{m+1} + \dots + b_n) = (a_m + b_m) + (a_{m+1} + b_{m+1}) + \dots + (a_n + b_n)$$

γράφεται

$$\sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n b_k = \sum_{k=m}^n (a_k + b_k).$$

Ομοίως, ο τύπος εξαγωγής κοινού παράγοντα, δηλαδή η επιμεριστική ιδιότητα,

$$\lambda a_m + \lambda a_{m+1} + \dots + \lambda a_n = \lambda(a_m + a_{m+1} + \dots + a_n)$$

γράφεται

$$\sum_{k=m}^n \lambda a_k = \lambda \sum_{k=m}^n a_k.$$

Επίσης, ο τύπος διαδοχικής άθροισης

$$(a_m + a_{m+1} + \dots + a_n) + (a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_l) = (a_m + a_{m+1} + \dots + a_l)$$

γράφεται

$$\sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=n+1}^l a_k = \sum_{k=m}^l a_k.$$

Υπάρχει και μία σχέση με ανισότητες. Αν $a_m \leq b_m, a_{m+1} \leq b_{m+1}, \dots, a_n \leq b_n$, τότε, όπως γνωρίζουμε, αν προσθέσουμε κατά μέλη τις ανισότητες παίρνουμε

$$a_m + a_{m+1} + \dots + a_n \leq b_m + b_{m+1} + \dots + b_n.$$

Δηλαδή,

$$a_k \leq b_k \text{ για } k = m, \dots, n \Rightarrow \sum_{k=m}^n a_k \leq \sum_{k=m}^n b_k.$$

Τέλος, πολλές φορές βοηθά μια απλή αλλαγή μεταβλητής στον δείκτη της αρίθμησης των προσθετέων. Π.χ. η προφανής ισότητα

$$a_{(m+l)-l} + a_{(m+l+1)-l} + \dots + a_{(n+l)-l} = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$$

γράφεται

$$\sum_{k=m+l}^{n+l} a_{k-l} = \sum_{j=m}^n a_j.$$

Σκεφτόμαστε ως εξής: αν ο δείκτης k παίρνει όλες τις ακέραιες τιμές από το $m+l$ μέχρι το $n+l$, τότε ο δείκτης $j = k-l$ παίρνει όλες τις ακέραιες τιμές από το m μέχρι το n .

Ασκήσεις

- 1.40. Αποδείξτε ότι $\sum_{k=m}^n (b_k - b_{k+1}) = b_m - b_{n+1}$.
- 1.41. Αποδείξτε ότι $\sum_{k=m}^n a_k - \sum_{k=m}^n b_k = \sum_{k=m}^n (a_k - b_k)$.
- 1.42. Αποδείξτε ότι $\lambda \sum_{k=m}^n a_k + \mu \sum_{k=m}^n b_k = \sum_{k=m}^n (\lambda a_k + \mu b_k)$.
- 1.43. Αποδείξτε ότι $\sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n b_k + \sum_{k=m}^n c_k = \sum_{k=m}^n (a_k + b_k + c_k)$.
- 1.44. Αποδείξτε ότι $\sum_{k=m}^n (a_k + b_k)^2 = \sum_{k=m}^n a_k^2 + 2 \sum_{k=m}^n a_k b_k + \sum_{k=m}^n b_k^2$.
- 1.45. Αποδείξτε ότι $2 \sum_{k=m}^n a_k b_k \leq \sum_{k=m}^n a_k^2 + \sum_{k=m}^n b_k^2$.

1.13 Μαθηματική επαγωγή

Η *μαθηματική επαγωγή* ή, πιο απλά, *επαγωγή* είναι μία πολύ χρήσιμη μέθοδος απόδειξης προτάσεων στη διατύπωση των οποίων εμφανίζεται ο γενικός φυσικός n . Η μέθοδος αυτή περιγράφεται ως ακολούθως:

Μαθηματική επαγωγή. Έστω ότι έχουμε μία πρόταση στη διατύπωση της οποίας εμφανίζεται ο φυσικός n . Αν

- (i) αποδείξουμε ότι η πρόταση είναι σωστή για τον φυσικό 1,
 - (ii) υποθέτοντας ότι η πρόταση είναι σωστή για τον φυσικό n , αποδείξουμε ότι η πρόταση είναι σωστή για τον επόμενο φυσικό $n + 1$,
- τότε συμπεραίνουμε ότι η πρόταση είναι σωστή για κάθε φυσικό n .

Παράδειγμα 1.16. Θα αποδείξουμε έναν χρήσιμο τύπο για το άθροισμα των φυσικών αριθμών από το 1 μέχρι το n :

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Για $n = 1$ ο τύπος αυτός γράφεται $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ και είναι, προφανώς, σωστός.

Υποθέτουμε ότι ο τύπος $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ είναι σωστός για τον φυσικό n και προσθέτουμε και στα δύο μέλη του το $n + 1$. Τότε βρίσκουμε

$$1 + 2 + \cdots + n + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Άρα ο τύπος είναι σωστός και για τον φυσικό $n + 1$.

Συμπεραίνουμε ότι ο τύπος είναι σωστός για κάθε φυσικό n .

Παράδειγμα 1.17. Θα αποδείξουμε μία πολύ χρήσιμη ανισότητα, την **ανισότητα του Bernoulli**. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$(x + 1)^n \geq nx + 1 \quad \text{για κάθε } x \geq -1.$$

Θεωρούμε οποιοδήποτε $x \geq -1$.

Για $n = 1$ η ανισότητα γράφεται $(x + 1)^1 \geq 1x + 1$ και είναι προφανώς σωστή και, μάλιστα, ισχύει ως ισότητα.

Υποθέτουμε ότι η ανισότητα $(x + 1)^n \geq nx + 1$ είναι σωστή για τον φυσικό n και πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της με το $x + 1$ το οποίο είναι ≥ 0 . Βρίσκουμε

$$(x + 1)^{n+1} \geq (nx + 1)(x + 1) = nx^2 + (n + 1)x + 1 \geq (n + 1)x + 1.$$

Άρα η ανισότητα είναι σωστή και για τον φυσικό $n + 1$.

Συμπεραίνουμε ότι η ανισότητα είναι σωστή για κάθε φυσικό n .

Υπάρχει και η εξής παραλλαγή της μαθηματικής επαγωγής.

- (i) Αποδεικνύουμε ότι η πρόταση είναι σωστή για κάποιον φυσικό n_0 .
 (ii) Υποθέτοντας ότι η πρόταση είναι σωστή για τον φυσικό $n \geq n_0$, αποδεικνύουμε ότι η πρόταση είναι σωστή για τον επόμενο φυσικό $n + 1$.
 Τότε συμπεραίνουμε ότι η πρόταση είναι σωστή για κάθε φυσικό $n \geq n_0$.

Παράδειγμα 1.18. Θα αποδείξουμε ότι $2^n \geq n^2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

Για $n = 4$ η ανισότητα γράφεται $2^4 \geq 4^2$ και είναι προφανώς σωστή και, μάλιστα, ισχύει ως ισότητα. Παρατηρήστε ότι η ανισότητα δεν είναι σωστή, αν $n = 3$.

Υποθέτουμε ότι η ανισότητα $2^n \geq n^2$ είναι σωστή για τον φυσικό $n \geq 4$ και πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της με το 2. Συνεπάγεται $2^{n+1} \geq 2n^2$ και τώρα εύκολα αποδεικνύουμε αλγεβρικά ότι ισχύει $2n^2 \geq (n+1)^2$, οπότε ισχύει $2^{n+1} \geq (n+1)^2$. Άρα η ανισότητα είναι σωστή και για τον φυσικό $n+1$ και συμπεραίνουμε ότι η ανισότητα είναι σωστή για κάθε φυσικό $n \geq 4$.

Παράδειγμα 1.19. Θα αποδείξουμε μία απλή ταυτότητα γνωστή από το Γυμνάσιο. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε t ισχύει

$$1 - t^n = (1 - t)(1 + t + \cdots + t^{n-2} + t^{n-1}) = (1 - t) \sum_{k=0}^{n-1} t^k.$$

Για $n = 1$ η ταυτότητα γράφεται $1 - t^1 = (1 - t)1$ και είναι προφανώς σωστή.

Υποθέτουμε ότι η ταυτότητα $1 - t^n = (1 - t)(1 + t + \cdots + t^{n-2} + t^{n-1})$ είναι σωστή για τον φυσικό n και προσθέτουμε και στα δύο μέλη της το $t^n - t^{n+1} = (1 - t)t^n$. Τότε παίρνουμε

$$1 - t^n + t^n - t^{n+1} = (1 - t)(1 + t + \cdots + t^{n-2} + t^{n-1}) + (1 - t)t^n,$$

οπότε

$$1 - t^{n+1} = (1 - t)(1 + t + \cdots + t^{n-2} + t^{n-1} + t^n).$$

Άρα η ταυτότητα είναι σωστή και για τον φυσικό $n+1$ και συμπεραίνουμε ότι είναι σωστή για κάθε φυσικό n .

Φυσικά, η παραπάνω ταυτότητα αποδεικνύεται και πολλαπλασιάζοντας τις παρενθέσεις στη δεξιά μεριά και, κατόπιν, διαγράφοντας όμοιους όρους με αντίθετα πρόσημα.

Αν στην προηγούμενη ταυτότητα γράψουμε το $\frac{y}{x}$ στη θέση του t και την πολλαπλασιάσουμε με το x^n , τότε προκύπτει η γενικότερη ταυτότητα

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}) = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k.$$

Επίσης, αν το $n \in \mathbb{N}$ είναι περιττό και γράψουμε το $-y$ στη θέση του y , τότε έχουμε ότι

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \cdots - xy^{n-2} + y^{n-1}) = (x + y) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{n-1-k}y^k.$$

Ορισμός 1.11. Ονομάζουμε **παραγοντικό** του $n \in \mathbb{N}$ το γινόμενο των φυσικών από το 1 μέχρι το n και το συμβολίζουμε $n!$. Δηλαδή,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n.$$

Επίσης, ορίζουμε: $0! = 1$.

Παράδειγμα 1.20. $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $n! = (n-1)!n$.

Ορισμός 1.12. Ορίζουμε τον **διωνομικό συντελεστή** $\binom{n}{m}$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq m \leq n$, με τον τύπο

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Παράδειγμα 1.21. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$, $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Αν $1 \leq m \leq n-1$, τότε, απλοποιώντας το

$$\frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)\cdots 2 \cdot 1}{m!(n-m)\cdots 2 \cdot 1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)(n-m)\cdots 2 \cdot 1}{m!(n-m)\cdots 2 \cdot 1},$$

βρίσκουμε

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!},$$

το οποίο ισχύει και για $m = n$.

Παράδειγμα 1.22. Θα δούμε τον λεγόμενο **διωνυμικό τύπο του Newton** ως ένα ακόμη παράδειγμα απόδειξης με επαγωγή. Για κάθε x, y και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}x^{n-k}y^k.$$

Για $n = 1$ ο τύπος γράφεται $(x+y)^1 = \binom{1}{0}x^1 + \binom{1}{1}y^1$ και είναι σωστός, διότι $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$. Κατόπιν, υποθέτουμε ότι ο τύπος είναι σωστός για τον φυσικό n και τον πολλαπλασιάζουμε με το $x+y$: πρώτα με το x και μετά με το y , βάσει της επιμεριστικής ιδιότητας. Τότε βρίσκουμε

$$\begin{aligned} (x+y)^{n+1} &= (x+y)^n x + (x+y)^n y = \binom{n}{0}x^{n+1} + \binom{n}{1}x^n y + \binom{n}{2}x^{n-1}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^2 y^{n-1} + \binom{n}{n}xy^n \\ &\quad + \binom{n}{0}x^n y + \binom{n}{1}x^{n-1}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-2}x^2 y^{n-1} + \binom{n}{n-1}xy^n + \binom{n}{n}y^{n+1}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}$ και $\binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1}$. Επίσης, για το άθροισμα όμοιων μονωνύμων χρησιμοποιούμε την ισότητα $\binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} = \binom{n+1}{m}$ την οποία σας ζητά να αποδείξετε η άσκηση 1.51, για να βρούμε ότι

$$\binom{n}{m}x^{n-m+1}y^m + \binom{n}{m-1}x^{n-m+1}y^m = \left(\binom{n}{m} + \binom{n}{m-1}\right)x^{n-m+1}y^m = \binom{n+1}{m}x^{n-m+1}y^m.$$

Έτσι καταλήγουμε στην ισότητα

$$(x+y)^{n+1} = \binom{n+1}{0}x^{n+1} + \binom{n+1}{1}x^n y + \cdots + \binom{n+1}{n}xy^n + \binom{n+1}{n+1}y^{n+1}.$$

Άρα ο τύπος είναι σωστός και για το $n+1$ και συμπεραίνουμε ότι είναι σωστός για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Οι ισότητες

$$\begin{aligned} (x+y)^1 &= x+y \\ (x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\ (x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\ (x+y)^4 &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 \\ (x+y)^5 &= x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5 \\ (x+y)^6 &= x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6 \end{aligned} \tag{1.2}$$

είναι ειδικές περιπτώσεις του διωνυμικού τύπου του Newton. Οι πρώτες τρεις ισότητες είναι αρκετά γνωστές.

Ασκήσεις

1.46. Με τη μέθοδο της επαγωγής αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

1.47. Αποδείξτε ότι $2^n \geq n^3$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 10$.

1.48. Αποδείξτε ότι $\binom{2n}{n} \leq 4^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

1.49. Αποδείξτε ότι η ανισότητα του Bernoulli ισχύει ως γνήσια ανισότητα $(x+1)^n > nx+1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ και κάθε $x \geq -1$, $x \neq 0$.

1.50. (i) Αν τα x, y δεν είναι και τα δύο 0, αποδείξτε ότι $x^2+xy+y^2 > 0$, $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4 > 0$. Ποια είναι η γενίκευση αυτών των ανισοτήτων;

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε μία από τις αλγεβρικές ταυτότητες στο παράδειγμα 1.19.

(ii) Τι μπορείτε να πείτε για τις ανισότητες $x^3+x^2y+xy^2+y^3 > 0$, $x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5 > 0$; Ποια είναι η γενίκευσή τους;

1.51. Αν $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$, $1 \leq m \leq n$, αποδείξτε την ισότητα $\binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} = \binom{n+1}{m}$ η οποία χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη του διωνυμικού τύπου του Newton.

1.52. Αποδείξτε ότι τα $\binom{n}{m}$ αυξάνονται, όταν αυξάνεται το n από το m και πέρα.

Αυξάνονται τα $\binom{n}{m}$, όταν αυξάνεται το m ανάμεσα στα 0 και n ;

1.53. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αποδείξτε ότι

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n, \quad \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

1.54. Έστω σύνολο $\{a_1, \dots, a_n\}$ το οποίο αποτελείται από n διαφορετικούς αριθμούς και έστω $m \in \mathbb{Z}$, $0 \leq m \leq n$. Αποδείξτε ότι, επιλέγοντας οποιαδήποτε m στοιχεία από τα $a_1, \dots, a_n$, μπορούμε να φτιάξουμε ακριβώς $\binom{n}{m}$ διαφορετικά υποσύνολα του $\{a_1, \dots, a_n\}$.

1.55. Το ακόλουθο τρίγωνο αποκαλείται **τρίγωνο Pascal** και εκτείνεται απεριόριστα προς τα κάτω:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 1 \\ & & & & & & \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\ & & & & & & & \dots \end{array}$$

Κάθε γραμμή, από τη δεύτερη και μετά, του τριγώνου Pascal προκύπτει από την προηγούμενή της ως εξής: τα δύο ακριανά στοιχεία της είναι 1 και κάθε άλλο στοιχείο της είναι το άθροισμα των δύο στοιχείων της προηγούμενης γραμμής τα οποία βρίσκονται ακριβώς από πάνω του.

Παρατηρήστε την ομοιότητα των αρχικών γραμμών του τριγώνου Pascal με τις ισότητες (1.2). Βάσει αυτής της παρατήρησης είναι λογικό να δεχτούμε ότι τα στοιχεία της n -οστής γραμμής του τριγώνου Pascal είναι οι συντελεστές $\binom{n}{m}$, $0 \leq m \leq n$, στον διωνυμικό τύπο του Newton για το $(x+y)^n$. Αυτό δικαιολογείται από τον τρόπο κατασκευής του τριγώνου Pascal, δηλαδή από το ότι από κάθε γραμμή προκύπτει η επόμενη γραμμή με τον τρόπο που περιγράψαμε, και από την ισότητα $\binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} = \binom{n+1}{m}$, $1 \leq m \leq n$, ανάμεσα στους διωνυμικούς συντελεστές.

1.14 Βιβλιογραφία

Βασική βιβλιογραφία

- Anton, H. (1984). *Calculus with Analytic Geometry*. Wiley.
- Apostol, T. (1967). *Calculus, Vol I*. Wiley.
- Courant, R. (1988). *Differential and Integral Calculus, Vol I*. Wiley.
- Courant, R., John, F. (1989). *Introduction to Calculus and Analysis, Vol I*. Springer.
- Hardy, G. (2008). *A Course of Pure Mathematics*. Cambridge Univ. Press.
- Smirnov, V. I. (1964). *A Course of Higher Mathematics, Vol I*. Pergammon Press.
- Spiegel, M. (1963). *Schaum's Outline of Advanced Calculus*. McGraw Hill.
- Spivak, M. (1994). *Calculus*. Cambridge Univ. Press.
- Thomas, G. (2018). *Calculus*. Pearson.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΙΑΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

2.1 Σύνοψη

Και αυτό το κεφάλαιο απαρτίζεται από ύλη ήδη γνωστή από το Λύκειο: πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών συνάρτησης (με έμφαση σε πραγματικές συναρτήσεις μίας πραγματικής μεταβλητής), γραφισμα συνάρτησης, μονοτονία συνάρτησης, φραγμένες συναρτήσεις, ύπαρξη αντίστροφης συνάρτησης και παραδείγματα ειδικών συναρτήσεων, όπως είναι οι πολυωνυμικές, οι ρητές, οι δυνάμεις, η εκθετική, η λογαριθμική, και οι τριγωνομετρικές. Υπάρχουν εδώ και οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις οι οποίες δεν είναι γνωστές από το Λύκειο. Δίνεται έμφαση στα γραφήματα των παραπάνω ειδικών συναρτήσεων και περιγράφονται απλές τεχνικές σχεδίασης γραφημάτων νέων συναρτήσεων από γραφήματα ήδη γνωστών συναρτήσεων.

Προαπαιτούμενη γνώση: Μαθηματικά του Λυκείου, καθώς και το προηγούμενο κεφάλαιο.

2.2 Πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών

Ορισμός 2.1. Όταν υπάρχει ένας συγκεκριμένος κανόνας ο οποίος για κάθε τιμή της μεταβλητής x σε ένα σύνολο A καθορίζει μία μοναδική αντίστοιχη τιμή της μεταβλητής y σε ένα σύνολο B , τότε λέμε ότι η μεταβλητή y είναι **συνάρτηση** της μεταβλητής x και αυτό το συμβολίζουμε με

$$y = f(x) \quad \text{ή} \quad y = F(x) \quad \text{ή} \quad y = g(x),$$

ή με οποιαδήποτε άλλη παρόμοια έκφραση. Γράφουμε, επίσης,

$$f : A \rightarrow B \quad \text{ή} \quad F : A \rightarrow B \quad \text{ή} \quad g : A \rightarrow B,$$

αντιστοίχως, και λέμε ότι η f (ή F ή g ή όποιο άλλο σύμβολο χρησιμοποιήσουμε) είναι **συνάρτηση**, με **τύπο** ή **κανόνα** $y = f(x)$, από το σύνολο A στο σύνολο B . Λέμε, ακόμη, ότι η x είναι η **ανεξάρτητη μεταβλητή** και ότι η y είναι η **εξαρτημένη μεταβλητή** της συνάρτησης f . Το σύνολο A των τιμών της ανεξάρτητης μεταβλητής x ονομάζεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης. Το σύνολο των αντίστοιχων τιμών $f(x)$ της εξαρτημένης μεταβλητής, το οποίο είναι υποσύνολο του B , το συμβολίζουμε $f(A)$ και το ονομάζουμε **σύνολο τιμών** της συνάρτησης:

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Στα πλαίσια του Απειροστικού Λογισμού εξετάζουμε συναρτήσεις $f : A \rightarrow B$ με τα A, B να είναι σύνολα αριθμών: $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$. Τα πιο συνηθισμένα αυτού του τύπου σύνολα είναι

Παπαδημητράκης, Μ. (2024) «Απειροστικός Λογισμός».

Αθήνα: Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. <http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-1011>

 Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Μη Εμπορική Χρήση - Παρόμοια Διανομή 4.0

διαστήματα ή ενώσεις διαστημάτων. Ο τύπος $y = f(x)$ είναι, συνήθως, ένας *μαθηματικός τύπος*.

Η γενική έκφραση $y = f(x)$ χρησιμοποιείται, ειδικά αν δεν γνωρίζουμε τον συγκεκριμένο τύπο ή κανόνα ο οποίος καθορίζει τις τιμές της y από τις τιμές της x . Μερικές φορές γνωρίζουμε τον τύπο, αλλά προτιμάμε να συντομεύουμε κάνοντας χρήση των απλούστερων συμβόλων.

Παράδειγμα 2.1. Ο τύπος $y = (\frac{\tan x}{3x+1})^3 (2^{5x+\sin(4^x)} + \log_2(x+3))$ καθορίζει το y ως συνάρτηση του x . Για να μην επαναλαμβάνουμε αυτόν τον κουραστικό τύπο, μπορούμε να συμφωνήσουμε να γράφουμε $f(x)$ αντί $(\frac{\tan x}{3x+1})^3 (2^{5x+\sin(4^x)} + \log_2(x+3))$ και να μιλάμε για τη *συνάρτηση* f με *τύπο* $y = f(x)$.

Πολλές φορές, χάριν συντομίας, αντί «η συνάρτηση f με *τύπο* $y = f(x)$ », λέμε «η συνάρτηση $y = f(x)$ » ή, ακόμη πιο απλά, «η συνάρτηση $f(x)$ ». Επίσης, αντί «η συνάρτηση f », θα λέμε «η συνάρτηση $y = f(x)$ », αν θέλουμε να δείξουμε τα σύμβολα x και y τα οποία χρησιμοποιούμε για την ανεξάρτητη και την εξαρτημένη μεταβλητή ή θα λέμε «η συνάρτηση $f(x)$ », αν θέλουμε να δείξουμε το σύμβολο x το οποίο χρησιμοποιούμε για την ανεξάρτητη μεταβλητή.

Τα πιο συνηθισμένα σύμβολα είναι το x για την ανεξάρτητη μεταβλητή και το y για την εξαρτημένη μεταβλητή. Δεν είναι, όμως, τα αποκλειστικά σύμβολα. Οποιαδήποτε σύμβολα μπορούν να χρησιμοποιηθούν ακόμη και για την ίδια συνάρτηση: $u = f(v)$, $t = f(x)$, $x = f(y)$ κ.τ.λ.

Αν δεν προκαθορίζεται το πεδίο ορισμού μίας συνάρτησης, π.χ. από το φυσικό ή το γεωμετρικό περιεχόμενό της, τότε θεωρούμε ως πεδίο ορισμού της το μεγαλύτερο σύνολο το οποίο είναι συμβατό με τον κανόνα ο οποίος καθορίζει την εξαρτημένη μεταβλητή ως συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής. Για παράδειγμα, για τη συνάρτηση με *τύπο* $y = \frac{3}{x}$ αν δεν προκαθορίζεται κάποιο σύνολο από το οποίο παίρνει τιμές το x , τότε θα θεωρούμε ως πεδίο ορισμού το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Ας δούμε πώς καθορίζεται το σύνολο τιμών μίας συνάρτησης. Έστω συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ με γνωστό πεδίο ορισμού A και γνωστό σύνολο B . Το ότι ένα $y \in B$ ανήκει στο σύνολο τιμών $f(A)$ της f είναι ισοδύναμο με το ότι υπάρχει κάποιο, τουλάχιστον ένα, $x \in A$ ώστε $f(x) = y$. Με άλλα λόγια,

Στο σύνολο τιμών της $f : A \rightarrow B$ ανήκουν ακριβώς εκείνα τα $y \in B$ για τα οποία η εξίσωση $f(x) = y$ με άγνωστο το x έχει μία τουλάχιστον λύση στο πεδίο ορισμού A .

Παράδειγμα 2.2. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 3x - 1$. Το πεδίο ορισμού της είναι το $(-\infty, +\infty)$ και θα βρούμε το σύνολο τιμών της. Θεωρούμε την $3x - 1 = y$ ως εξίσωση με άγνωστο το x και θα βρούμε για ποια y αυτή έχει μία τουλάχιστον λύση. Είναι προφανές ότι για κάθε y η εξίσωση αυτή λύνεται και έχει ως λύση το $x = \frac{y+1}{3}$. Άρα κάθε y ανήκει στο σύνολο τιμών, οπότε $f((-\infty, +\infty)) = (-\infty, +\infty)$.

Παράδειγμα 2.3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 3^{-2x}$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$. Για να βρούμε το σύνολο τιμών της, θα δούμε για ποια y η εξίσωση $3^{-2x} = y$ με άγνωστο το x έχει μία τουλάχιστον λύση. Προφανώς, για κάθε $y \leq 0$ η $3^{-2x} = y$ δεν έχει καμία λύση, ενώ για κάθε $y > 0$ έχει τη λύση $x = -\frac{1}{2} \log_3 y$. Επομένως, $f((-\infty, +\infty)) = (0, +\infty)$.

Μερικές φορές έχουμε μία συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ και μας ενδιαφέρει να βρούμε το σύνολο των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής, οι οποίες αντιστοιχούν σε τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής από κάποιο υποσύνολο A' του πεδίου ορισμού A . Με άλλα λόγια, μας ενδιαφέρει να βρούμε το σύνολο τιμών

$$f(A') = \{f(x) \mid x \in A'\}$$

το οποίο αντιστοιχεί σε κάποιο $A' \subseteq A$.

Παράδειγμα 2.4. Έστω, πάλι, η συνάρτηση $f(x) = 3x - 1$. Θα βρούμε το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο υποδιάστημα $[-2, 5)$ του πεδίου ορισμού $(-\infty, +\infty)$. Θεωρούμε την $3x - 1 = y$ ως εξίσωση με άγνωστο το x και τώρα θα βρούμε για ποια y αυτή έχει μία τουλάχιστον λύση στο $[-2, 5)$. Λύνουμε, όπως πριν, την εξίσωση βρίσκοντας τη λύση $x = \frac{y+1}{3}$ και πρέπει να ελέγξουμε για ποια y η λύση ανήκει στο $[-2, 5)$, δηλαδή $-2 \leq \frac{y+1}{3} < 5$ ή, ισοδύναμα, $-7 \leq y < 14$. Άρα $f([-2, 5)) = [-7, 14)$.

Παράδειγμα 2.5. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Θεωρούμε την $\frac{2x}{x-1} = y$ ως εξίσωση με άγνωστο το x και θα δούμε για ποια y αυτή έχει μία τουλάχιστον λύση. Η $\frac{2x}{x-1} = y$ ισοδυναμεί με την $(y-2)x = y$. Αν $y = 2$, τότε η εξίσωση δεν έχει καμία λύση. Αν $y \neq 2$, τότε η εξίσωση έχει τη λύση $x = \frac{y}{y-2}$. Πρέπει, επίσης, να ελέγξουμε αν αυτή η λύση ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, δηλαδή αν $\frac{y}{y-2} \neq 1$. Αυτό όμως ισχύει, διότι, προφανώς, $y \neq y-2$. Άρα $f((-\infty, 1) \cup (1, +\infty)) = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$. Ας δούμε, επίσης, ποια είναι τα σύνολα τιμών τα οποία αντιστοιχούν στα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$ του πεδίου ορισμού.

Για το $(1, +\infty)$ θεωρούμε την $\frac{2x}{x-1} = y$ ως εξίσωση με άγνωστο το x και θα δούμε για ποια y αυτή έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(1, +\infty)$. Όπως πριν, αφού αποκλείσουμε το $y = 2$, βρίσκουμε τη λύση $x = \frac{y}{y-2}$ και πρέπει να ελέγξουμε αν αυτή ανήκει στο $(1, +\infty)$, δηλαδή αν $\frac{y}{y-2} > 1$ ή, ισοδύναμα, $y > 2$. Άρα $f((1, +\infty)) = (2, +\infty)$.

Ομοίως, βρίσκουμε ότι $f((-\infty, 1)) = (-\infty, 2)$.

Ασκήσεις

2.1. Βρείτε τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων $x^2 - 4x + 3$, $\frac{2x-1}{x+4}$, $\frac{x^2+1}{x^2-1}$, $\log_{10} x + 4$, 7^{-x} , $3^{2x} - 2e^x + 3$, $\frac{5^x+1}{5^x-1}$, $\frac{x}{\sqrt{x-1}}$.

2.2. Θεωρήστε τις παρακάτω συναρτήσεις και τα διάφορα υποδιαστήματα του πεδίου ορισμού τους και βρείτε τα αντίστοιχα σύνολα τιμών.

(i) $x^2 - 4x + 3$, στα διαστήματα $(-\infty, 1]$, $(1, 3]$, $(3, +\infty)$, $(-\infty, 2]$, $[2, +\infty)$.

(ii) $\frac{2x-1}{x+4}$, στα διαστήματα $(-\infty, -4)$, $(-4, +\infty)$.

(iii) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$, στα διαστήματα $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$.

(iv) $\frac{5^x+1}{5^x-1}$, στα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$.

(v) $\sqrt{1 + \frac{1}{x}}$, στα διαστήματα $(-\infty, -1]$, $(0, +\infty)$.

(vi) $\frac{x}{\sqrt{x-1}}$, στα διαστήματα $[0, 1)$, $(1, +\infty)$.

2.3. Βρείτε τα πεδία ορισμού των $\sqrt{-x^2}$, $\sqrt{-x^2-1}$, $\sqrt{x^2(x-1)}$, $\sqrt{\frac{x^2}{x-1}}$, $\log_{10}(x^2(x-1))$.

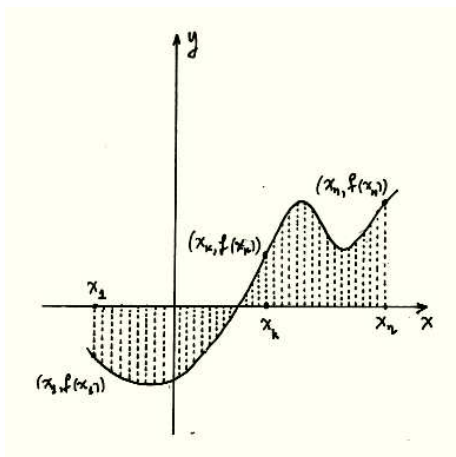
2.3 Γράφημα, μονοτονία και φράγματα

Έστω συνάρτηση $y = f(x)$ με πεδίο ορισμού το A . Θεωρούμε δύο κάθετες μεταξύ τους πραγματικές ευθείες στο ίδιο επίπεδο, μία οριζόντια, τον x -άξονα, και μία κατακόρυφη, τον y -άξονα, ώστε το σημείο τομής τους να αναπαριστά το 0 και στις δύο ευθείες, με τα θετικά x προς τα δεξιά και τα θετικά y προς τα πάνω. Στον x -άξονα τοποθετούμε τα στοιχεία του πεδίου ορισμού A και στον y -άξονα τα στοιχεία του συνόλου τιμών $f(A)$. Τέλος, για κάθε x στο πεδίο ορισμού βρίσκουμε το αντίστοιχο $f(x)$ στο σύνολο τιμών και σχεδιάζουμε το σημείο $(x, f(x))$ του επιπέδου.

Ορισμός 2.2. Τα σημεία $(x, f(x))$ σχηματίζουν τη **γραφική παράσταση** ή **γράφημα** της f :

$$\text{γράφημα της } f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}.$$

Πρακτικά, είναι αδύνατον να επαναλάβουμε τη διαδικασία αυτή για όλα τα $x \in A$, ειδικά αν αυτά είναι άπειρα, π.χ. αν το πεδίο ορισμού A περιέχει ένα ολόκληρο διάστημα. Οπότε περιοριζόμαστε στο να σχεδιάσουμε σημεία $(x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$ για όσο το δυνατόν περισσότερα $x_1, \dots, x_n$ τα οποία κατανέμονται όσο το δυνατόν πυκνότερα στο A . Υπό ορισμένες προϋποθέσεις, από τα σημεία, τα οποία θα σχεδιάσουμε, μπορούμε να μαντέψουμε όλα τα ενδιάμεσα σημεία τα οποία λείπουν και να σχεδιάσουμε με καλή προσέγγιση το γράφημα της συνάρτησης. Δείτε το ενδεικτικό σχήμα 2.1. Συνήθως, το γράφημα μίας συνάρτησης είναι μία καμπύλη ή, πιο γενικά, ένωση πεπερασμένου πλήθους καμπυλών.

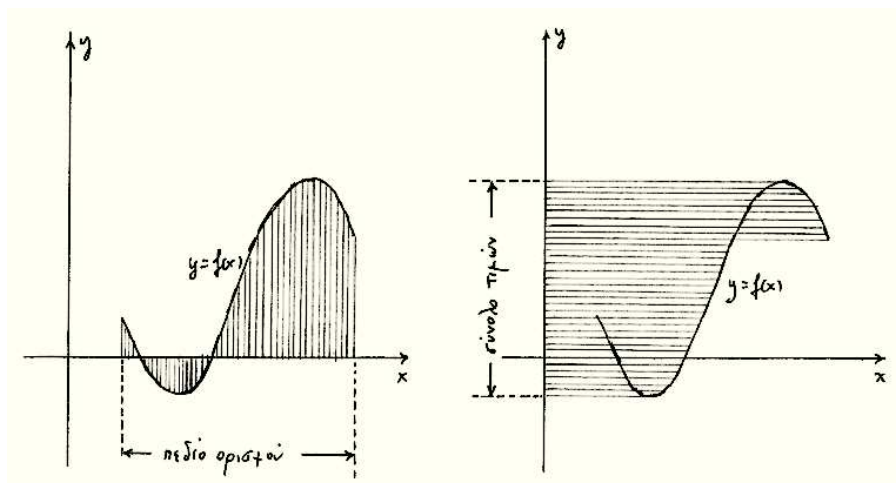


Σχήμα 2.1

Αν γνωρίζουμε το γράφημα της $y = f(x)$, τότε μπορούμε να βρούμε το πεδίο ορισμού της και το σύνολο τιμών της με την αντίστροφη διαδικασία από αυτήν με την οποία σχεδιάζουμε το γράφημα της συνάρτησης. Από κάθε σημείο $(x, f(x))$ του γραφήματος φέρνουμε μία κατακόρυφη και μία οριζόντια ευθεία. Η κατακόρυφη ευθεία τέμνει τον x -άξονα στο σημείο x του πεδίου ορισμού και η οριζόντια τέμνει τον y -άξονα στο σημείο $f(x)$ του συνόλου τιμών. Επομένως:

Το πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ είναι η κατακόρυφη προβολή του γραφήματός της πάνω στον x -άξονα και το σύνολο τιμών της είναι η οριζόντια προβολή του γραφήματός της πάνω στον y -άξονα.

Δείτε και το ενδεικτικό σχήμα 2.2.



Σχήμα 2.2

Παράδειγμα 2.6. Η συνάρτηση

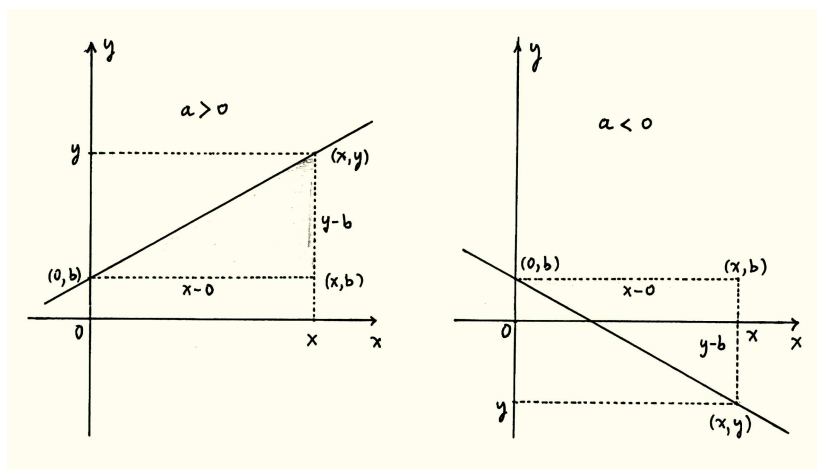
$$y = f(x) = ax + b$$

έχει ως πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$.

Παρατηρήστε τα σχήματα 2.3: το ένα αντιστοιχεί στην περίπτωση $a > 0$ και το άλλο στην περίπτωση $a < 0$.

Ένα από τα σημεία του γραφήματος είναι το $(0, f(0)) = (0, b)$. Για κάθε σημείο (x, y) του γραφήματος ισχύει $y = f(x) = ax + b$, οπότε $y - b = a(x - 0)$. Άρα η κλίση του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα $(0, b)$ και (x, y) είναι ίση με $\frac{y-b}{x-0} = a$. Επομένως, κάθε σημείο (x, y) του γραφήματος ανήκει στην **ευθεία** l η οποία περιέχει το σημείο $(0, b)$ και έχει κλίση a . Το αντίστροφο είναι προφανές: για κάθε σημείο (x, y) της ευθείας l η κλίση $\frac{y-b}{x-0}$ του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα $(0, b)$ και (x, y) είναι ίση με a , οπότε ισχύει $\frac{y-b}{x-0} = a$, δηλαδή $y = ax + b = f(x)$, οπότε το σημείο (x, y) ανήκει

στο γράφημα της f . Επομένως, το γράφημα της f ταυτίζεται με την ευθεία l . Αν $a > 0$, τότε η κλίση της l είναι θετική και η l ανεβαίνει από τα αριστερά προς τα δεξιά. Αν $a < 0$, τότε η κλίση της l είναι αρνητική και η l κατεβαίνει από τα αριστερά προς τα δεξιά. Αν $a = 0$, τότε η κλίση της l είναι μηδενική και η l είναι οριζόντια. Στις δύο πρώτες περιπτώσεις, δηλαδή αν $a \neq 0$, η οριζόντια προβολή της l στον y -άξονα είναι ολόκληρος ο y -άξονας, οπότε το σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty, +\infty)$. Αυτό αποδεικνύεται και με μαθηματικό τρόπο, όπως στο παράδειγμα 2.2. Στην τρίτη περίπτωση, δηλαδή αν $a = 0$, η l είναι οριζόντια, οπότε η οριζόντια προβολή της στον y -άξονα είναι μόνο το σημείο b , οπότε το σύνολο τιμών της f είναι το $\{b\}$.



Σχήμα 2.3

Ορισμός 2.3. Έστω συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω $A' \subseteq A$.

Η f χαρακτηρίζεται **αύξουσα** στο A' , αν για κάθε $x_1 \in A'$, $x_2 \in A'$ η ανισότητα $x_1 < x_2$ συνεπάγεται την $f(x_1) \leq f(x_2)$. Αν για κάθε $x_1 \in A'$, $x_2 \in A'$ η $x_1 < x_2$ συνεπάγεται την $f(x_1) < f(x_2)$, τότε η f χαρακτηρίζεται **γνησίως αύξουσα** στο A' .

Η f χαρακτηρίζεται **φθίνουσα** στο A' , αν για κάθε $x_1 \in A'$, $x_2 \in A'$ η $x_1 < x_2$ συνεπάγεται την $f(x_1) \geq f(x_2)$. Αν για κάθε $x_1 \in A'$, $x_2 \in A'$ η $x_1 < x_2$ συνεπάγεται την $f(x_1) > f(x_2)$, τότε η f χαρακτηρίζεται **γνησίως φθίνουσα** στο A' .

Η f χαρακτηρίζεται **μονότονη** στο A' , αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα στο A' , και **γνησίως μονότονη** στο A' , αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο A' .

Το γράφημα μίας γνησίως αύξουσας συνάρτησης ανεβαίνει από τα αριστερά προς τα δεξιά, ενώ το γράφημα μίας αύξουσας συνάρτησης ανεβαίνει, αλλά μπορεί και να μένει οριζόντιο σε υποδιαστήματα. Αναλόγως, το γράφημα μίας γνησίως φθίνουσας συνάρτησης κατεβαίνει από τα αριστερά προς τα δεξιά, ενώ το γράφημα μίας φθίνουσας συνάρτησης κατεβαίνει, αλλά μπορεί και να μένει οριζόντιο σε υποδιαστήματα.

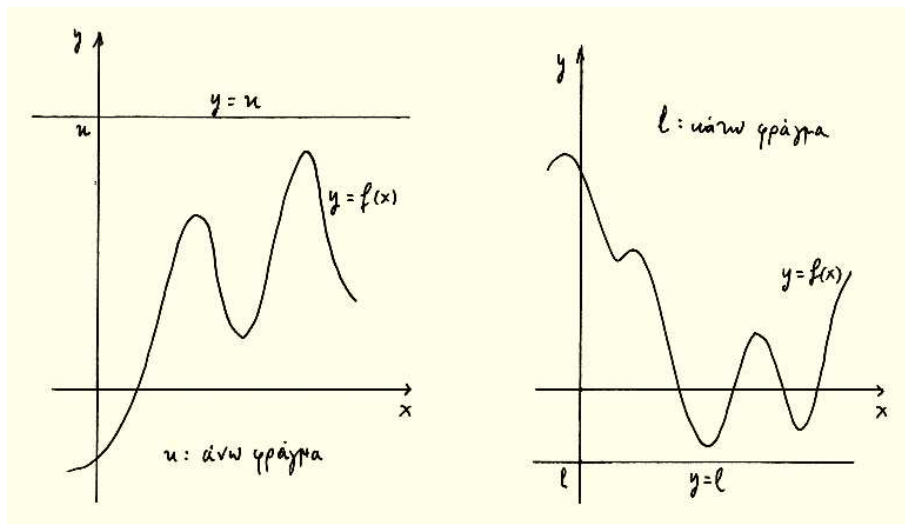
Παράδειγμα 2.7. Η $y = f(x) = ax + b$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$, αν $a > 0$, και γνησίως φθίνουσα, αν $a < 0$. Αν $a = 0$, τότε η συνάρτηση είναι **σταθερή** στο $(-\infty, +\infty)$.

Ορισμός 2.4. Έστω συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω $A' \subseteq A$.

Η f χαρακτηρίζεται **άνω φραγμένη** στο A' , αν υπάρχει u ώστε να ισχύει $f(x) \leq u$ για κάθε $x \in A'$ και ένα τέτοιο u χαρακτηρίζεται **άνω φράγμα** της συνάρτησης στο σύνολο A' .

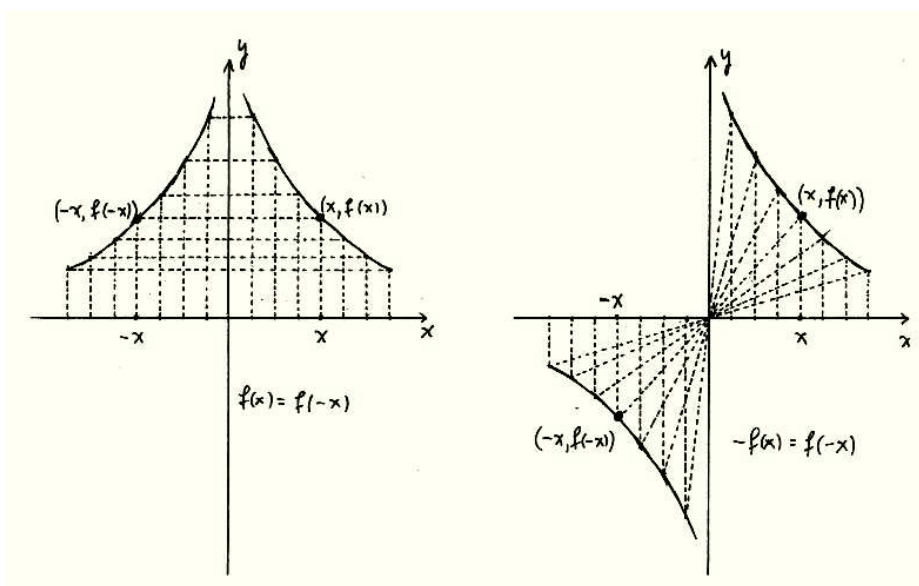
Η f χαρακτηρίζεται **κάτω φραγμένη** στο A' , αν υπάρχει l ώστε να ισχύει $f(x) \geq l$ για κάθε $x \in A'$ και ένα τέτοιο l χαρακτηρίζεται **κάτω φράγμα** της συνάρτησης στο A' .

Τέλος, η f χαρακτηρίζεται **φραγμένη** στο A' , αν είναι άνω φραγμένη και κάτω φραγμένη στο A' , δηλαδή αν υπάρχουν u, l ώστε να ισχύει $l \leq f(x) \leq u$ για κάθε $x \in A'$.



Σχήμα 2.4

Παρατηρήστε το σχήμα 2.4. Το ότι το u είναι άνω φράγμα της f στο A' σημαίνει ότι το μέρος του γραφήματός της το οποίο αντιστοιχεί στο A' είναι κάτω από την οριζόντια ευθεία με εξίσωση $y = u$. Ομοίως, το ότι το l είναι κάτω φράγμα της f στο A' σημαίνει ότι το μέρος του γραφήματός της το οποίο αντιστοιχεί στο A' είναι πάνω από την οριζόντια ευθεία με εξίσωση $y = l$. Αν, λοιπόν, τα u και l είναι άνω φράγμα και κάτω φράγμα, αντιστοίχως, της f στο A' , τότε το μέρος του γραφήματός της το οποίο αντιστοιχεί στο A' βρίσκεται ανάμεσα στις οριζόντιες ευθείες με εξισώσεις $y = u$ και $y = l$.



Σχήμα 2.5

Ορισμός 2.5. Έστω συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Η f χαρακτηρίζεται **άρτια**, αν ισχύει $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in A$.

Παρατηρήστε το αριστερό από τα σχήματα 2.5. Αν η $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι άρτια, τότε σύμφωνα με τον ορισμό πρέπει για κάθε $x \in A$ να ισχύει $-x \in A$, δηλαδή το πεδίο ορισμού A στον x -άξονα πρέπει να είναι συμμετρικό ως προς το 0. Επίσης, αν το σημείο (x, y) είναι στο γράφημα της f , δηλαδή αν $y = f(x)$, τότε $y = f(-x)$, οπότε και το σημείο $(-x, y)$ ανήκει στο γράφημα της f . Τα σημεία (x, y) και $(-x, y)$ είναι συμμετρικά ως προς τον y -άξονα. Επομένως, αν πάρουμε οποιοδήποτε σημείο του γραφήματος μίας άρτιας συνάρτησης, τότε το συμμετρικό του ως προς τον y -άξονα είναι και αυτό σημείο του γραφήματος. Αυτό σημαίνει ότι:

Το γράφημα άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρικό ως προς τον y -άξονα.

Ορισμός 2.6. Έστω συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Η f χαρακτηρίζεται **περιττή**, αν ισχύει $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in A$.

Τώρα παρατηρήστε το δεξιό από τα σχήματα 2.5. Αν η $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή, τότε πρέπει για κάθε $x \in A$ να ισχύει $-x \in A$, δηλαδή το πεδίο ορισμού A στον x -άξονα πρέπει να είναι συμμετρικό ως προς το 0. Επίσης, αν το σημείο (x, y) είναι στο γράφημα της f , δηλαδή αν $y = f(x)$, τότε $-y = -f(x) = f(-x)$, οπότε και το σημείο $(-x, -y)$ ανήκει στο γράφημα της f . Τα σημεία (x, y) και $(-x, -y)$ είναι συμμετρικά ως προς το σημείο $(0, 0)$. Επομένως, αν πάρουμε οποιοδήποτε σημείο του γραφήματος μίας περιττής συνάρτησης, τότε το συμμετρικό του ως προς το σημείο $(0, 0)$ είναι και αυτό σημείο του γραφήματος. Άρα:

Το γράφημα περιττής συνάρτησης είναι συμμετρικό ως προς το σημείο $(0, 0)$.

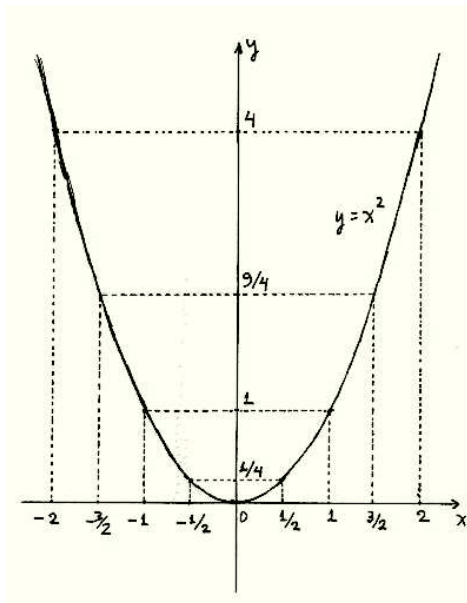
Παράδειγμα 2.8. Η

$$y = f(x) = x^2$$

έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

Λύνοντας την εξίσωση $x^2 = y$ με άγνωστο το x , βλέπουμε εύκολα ότι $f([0, +\infty)) = [0, +\infty)$ και $f((-\infty, 0]) = [0, +\infty)$.

Είναι φανερό ότι η f είναι κάτω φραγμένη στο $(-\infty, +\infty)$ και το 0 είναι κάτω φράγμα της συνάρτησης, αφού το σύνολο τιμών είναι το $[0, +\infty)$. Για τον ίδιο λόγο η f δεν είναι άνω φραγμένη στο $(-\infty, +\infty)$ ούτε και σε κανένα από τα $(-\infty, 0]$, $[0, +\infty)$.



Σχήμα 2.6

Παρατηρήστε το σχήμα 2.6. Το μέρος του γραφήματος της f , το οποίο αντιστοιχεί στο $[0, +\infty)$, είναι μία καμπύλη η οποία αρχίζει από το σημείο $(0, 0)$, προς τα δεξιά ανεβαίνει και περιέχει, ενδεικτικά, τα σημεία $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $(1, 1)$, $(2, 4)$. Η κατακόρυφη προβολή της καμπύλης στον x -άξονα είναι το διάστημα $[0, +\infty)$ και η οριζόντια προβολή της στον y -άξονα είναι το σύνολο τιμών, το οποίο αντιστοιχεί στο $[0, +\infty)$, δηλαδή το $[0, +\infty)$. Αυτό σημαίνει ότι η καμπύλη προς τα δεξιά ανεβαίνει απεριόριστα.

Τέλος, το μέρος του γραφήματος της f , το οποίο αντιστοιχεί στο $(-\infty, 0]$, είναι καμπύλη η οποία αρχίζει από το σημείο $(0, 0)$, ανεβαίνει προς τα αριστερά και περιέχει, ενδεικτικά, τα σημεία $(0, 0)$, $(-2, 4)$, $(-1, 1)$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. Η κατακόρυφη προβολή της καμπύλης στον x -άξονα είναι το διάστημα $(-\infty, 0]$ και η οριζόντια προβολή της στον y -άξονα είναι το σύνολο τιμών, το οποίο αντιστοιχεί

στο $(-\infty, 0]$, δηλαδή το $[0, +\infty)$. Δηλαδή η καμπύλη προς τα αριστερά *ανεβαίνει απεριόριστα*. Το συνολικό γράφημα της f είναι η γνωστή μας **παραβολή**. Τώρα, επειδή η f είναι άρτια, η παραβολή είναι συμμετρική ως προς τον y -άξονα.

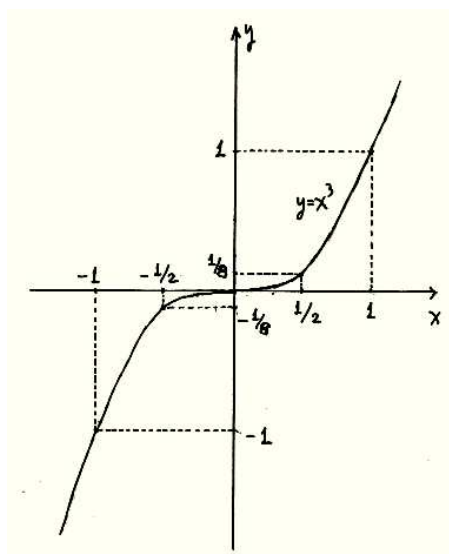
Παράδειγμα 2.9. Η

$$y = f(x) = x^3$$

είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της $(-\infty, +\infty)$.

Θεωρώντας την $x^3 = y$ ως εξίσωση με άγνωστο x , βλέπουμε ότι $f((-\infty, +\infty)) = (-\infty, +\infty)$.

Η f δεν είναι ούτε άνω φραγμένη ούτε κάτω φραγμένη στο $(-\infty, +\infty)$, αφού το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, +\infty)$.



Σχήμα 2.7

Παρατηρήστε το σχήμα 2.7. Το γράφημα της f είναι καμπύλη η οποία ανεβαίνει από τα αριστερά προς τα δεξιά και περιέχει, ενδεικτικά, τα σημεία $(-2, -8)$, $(-1, -1)$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8})$, $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$, $(1, 1)$, $(2, 8)$. Η κατακόρυφη προβολή του γραφήματος στον x -άξονα είναι ίση με το πεδίο ορισμού, δηλαδή το $(-\infty, +\infty)$, και η οριζόντια προβολή του στον y -άξονα είναι το σύνολο τιμών, δηλαδή το $(-\infty, +\infty)$. Αυτό σημαίνει ότι το γράφημα προς τα αριστερά *κατεβαίνει απεριόριστα* και προς τα δεξιά *ανεβαίνει απεριόριστα*.

Τέλος, επειδή η f είναι περιττή, το γράφημά της είναι συμμετρικό ως προς το σημείο $(0, 0)$.

Παράδειγμα 2.10. Η

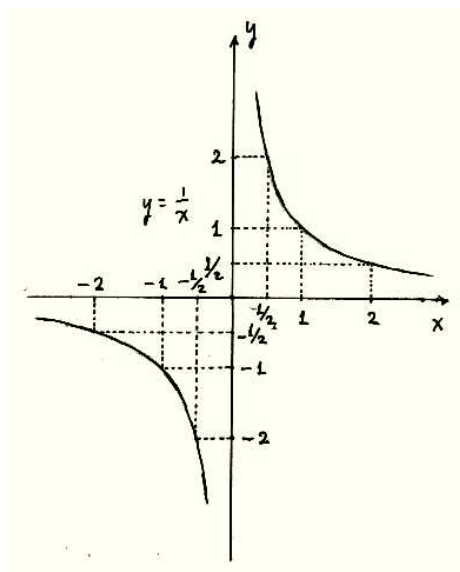
$$y = f(x) = \frac{1}{x}$$

έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και είναι γνησίως φθίνουσα και στα δύο διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$.

Θεωρούμε την $\frac{1}{x} = y$ ως εξίσωση με άγνωστο x και βρίσκουμε εύκολα ότι $f((0, +\infty)) = (0, +\infty)$ και $f((-\infty, 0)) = (-\infty, 0)$.

Η f είναι κάτω φραγμένη στο $(0, +\infty)$ με κάτω φράγμα το 0, αλλά δεν είναι άνω φραγμένη στο $(0, +\infty)$. Ομοίως, η f είναι άνω φραγμένη στο $(-\infty, 0)$ με άνω φράγμα το 0, αλλά δεν είναι κάτω φραγμένη στο $(-\infty, 0)$.

Παρατηρήστε το σχήμα 2.8. Το μέρος του γραφήματος της f , το οποίο αντιστοιχεί στο $(0, +\infty)$, είναι μία καμπύλη η οποία κατεβαίνει από τα αριστερά (μένοντας δεξιά του y -άξονα) προς τα δεξιά και περιέχει, ενδεικτικά, τα σημεία $(\frac{1}{2}, 2)$, $(1, 1)$, $(2, \frac{1}{2})$. Η κατακόρυφη προβολή της καμπύλης αυτής στον x -άξονα είναι το $(0, +\infty)$ και η οριζόντια προβολή της στον y -άξονα είναι το σύνολο τιμών, το οποίο αντιστοιχεί στο $(0, +\infty)$, δηλαδή το $(0, +\infty)$. Άρα η καμπύλη προς τα αριστερά *ανεβαίνει απεριόριστα* και *προσεγγίζει* τον y -άξονα (μένοντας, όπως είπαμε, δεξιά του y -άξονα) και προς τα δεξιά *κατεβαίνει προσεγγίζοντας* τον x -άξονα.



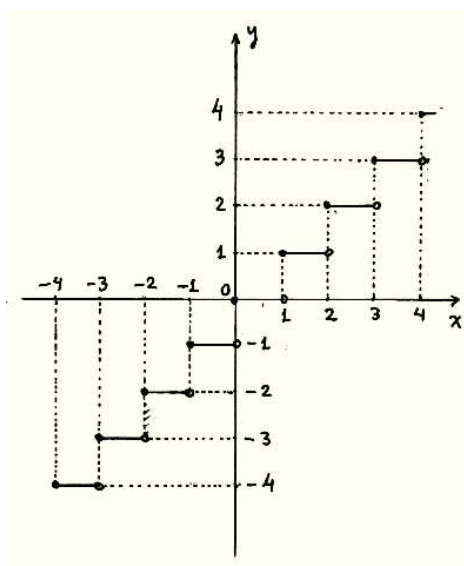
Σχήμα 2.8

Τέλος, το μέρος του γραφήματος το οποίο αντιστοιχεί στο $(-\infty, 0)$ είναι καμπύλη η οποία κατεβαίνει από τα αριστερά προς τα δεξιά (μένοντας αριστερά του y -άξονα) και περιέχει, ενδεικτικά, τα σημεία $(-2, -\frac{1}{2})$, $(-1, -1)$, $(-\frac{1}{2}, -2)$. Η κατακόρυφη προβολή της καμπύλης αυτής στον x -άξονα είναι το $(-\infty, 0)$ και η οριζόντια προβολή της στον y -άξονα είναι το σύνολο τιμών, το οποίο αντιστοιχεί στο $(-\infty, 0)$, δηλαδή το $(-\infty, 0)$. Άρα η καμπύλη προς τα αριστερά ανεβαίνει *προσεγγίζοντας* τον x -άξονα και προς τα δεξιά *κατεβαίνει απερίοριστα* και *προσεγγίζει* τον y -άξονα (μένοντας αριστερά του y -άξονα).

Το γράφημα της f ονομάζεται **υπερβολή** και, όπως είδαμε, αποτελείται από δύο ασύνδετες μεταξύ τους καμπύλες οι οποίες ονομάζονται **κλάδοι** της υπερβολής.

Η f είναι περιττή, οπότε η υπερβολή είναι συμμετρική ως προς το σημείο $(0, 0)$: καθένας από τους δύο κλάδους είναι συμμετρικός του άλλου ως προς το σημείο $(0, 0)$.

Η υπερβολή έχει και άλλο ένα χαρακτηριστικό. Αν το σημείο (x, y) ανήκει στην υπερβολή, δηλαδή αν $y = \frac{1}{x}$, τότε $x = \frac{1}{y}$, οπότε και το σημείο (y, x) ανήκει στην υπερβολή. Τα σημεία (x, y) και (y, x) είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία με εξίσωση $y = x$, την *κύρια διαγώνιο*. Άρα, αν πάρουμε οποιοδήποτε σημείο της υπερβολής, τότε το συμμετρικό του ως προς την κύρια διαγώνιο είναι και αυτό σημείο της υπερβολής. Δηλαδή, η υπερβολή είναι συμμετρική ως προς την κύρια διαγώνιο.



Σχήμα 2.9

Παράδειγμα 2.11. Η συνάρτηση

$$y = f(x) = [x],$$

το ακέραιο μέρος του x , έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και είναι αύξουσα.

Παρατηρήστε το σχήμα 2.9. Η f είναι σταθερή στο διάστημα $[k, k+1)$, όπου k είναι οποιοσδήποτε ακέραιος: ισχύει $f(x) = [x] = k$ για κάθε $x \in [k, k+1)$. Άρα το μέρος του γραφήματος, το οποίο αντιστοιχεί στο διάστημα $[k, k+1)$, είναι ένα οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα χωρίς το δεξιό άκρο του. Το πλήρες γράφημα της f αποτελείται από ασύνδετα μεταξύ τους ευθύγραμμα τμήματα.

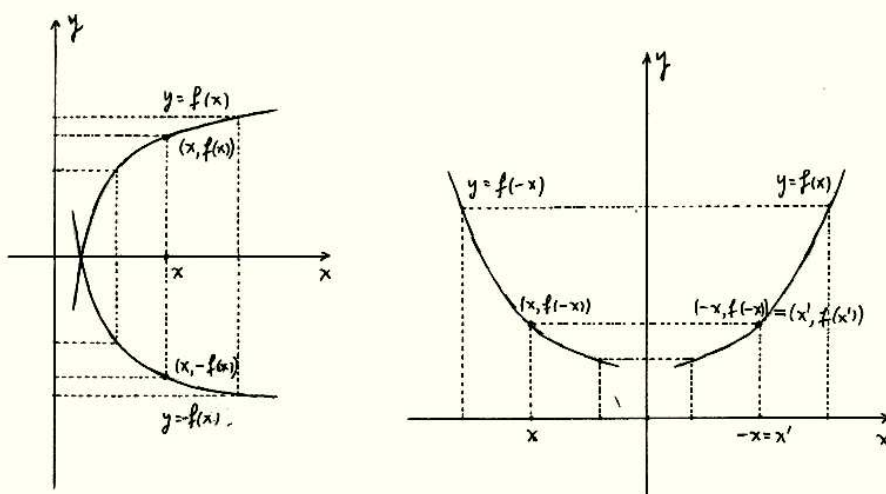
Μερικές απλές τεχνικές σχεδίασης γραφημάτων

Στο σημείο αυτό θα αναφέρουμε μερικά απλά βήματα, τα οποία βοηθούν στη σχεδίαση γραφημάτων συναρτήσεων και τα οποία έχουμε ακολουθήσει στα προηγούμενα παραδείγματα. Σε επόμενα κεφάλαια και ειδικά στο κεφάλαιο των παραγώγων θα γνωρίσουμε ισχυρότερα εργαλεία σχεδίασης.

Κατ' αρχάς, αναγνωρίζουμε το πεδίο ορισμού της f και το χωρίζουμε, αν αυτό είναι δυνατόν, σε διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης. Βρίσκουμε το σύνολο τιμών, το οποίο αντιστοιχεί σε οποιοδήποτε διάστημα μονοτονίας, και σχεδιάζουμε το αντίστοιχο μέρος του γραφήματος, το οποίο είναι, συνήθως, μία καμπύλη η οποία, ανάλογα με το είδος μονοτονίας, ανεβαίνει ή κατεβαίνει από τα αριστερά προς τα δεξιά, προσέχοντας ώστε η κατακόρυφη προβολή της στον x -άξονα να είναι το ίδιο το διάστημα μονοτονίας και η οριζόντια προβολή της στον y -άξονα να είναι το αντίστοιχο σύνολο τιμών. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για κάθε διάστημα μονοτονίας της συνάρτησης. Φυσικά, ενδέχεται να υπάρχουν και διαστήματα στα οποία η f είναι σταθερή, οπότε σε καθένα από αυτά το αντίστοιχο μέρος του γραφήματος είναι ένα οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα.

Αν η f είναι άρτια ή περιττή, τότε αρκεί να σχεδιάσουμε το μέρος του γραφήματος, το οποίο αντιστοιχεί στο μέρος του πεδίου ορισμού που περιέχεται στο $[0, +\infty)$. Αν η συνάρτηση είναι άρτια, τότε το υπόλοιπο μέρος του γραφήματος είναι το συμμετρικό του προηγούμενου ως προς τον y -άξονα, ενώ, αν η συνάρτηση είναι περιττή, τότε το υπόλοιπο μέρος του γραφήματος είναι το συμμετρικό του προηγούμενου ως προς το σημείο $(0, 0)$.

Τώρα, έστω ότι γνωρίζουμε το γράφημα της f . Θα δούμε πώς μπορούμε να σχεδιάσουμε τα γραφήματα μερικών άλλων συναρτήσεων οι οποίες σχετίζονται με την f .



Σχήμα 2.10

(i) Γνωρίζουμε ότι το συμμετρικό ως προς τον x -άξονα του σημείου (x, y) του επιπέδου είναι το σημείο $(x, -y)$.

Παρατηρήστε το αριστερό από τα σχήματα 2.10. Ας θεωρήσουμε οποιοδήποτε σημείο $(x, -f(x))$

του γραφήματος της $-f(x)$. Βλέπουμε ότι αυτό είναι το συμμετρικό ως προς τον x -άξονα του σημείου $(x, f(x))$ του γραφήματος της $f(x)$. Δηλαδή, τα σημεία του γραφήματος της $-f(x)$ είναι τα συμμετρικά ως προς τον x -άξονα των σημείων του γραφήματος της $f(x)$. Άρα:

Το γράφημα της $-f(x)$ είναι το συμμετρικό ως προς τον x -άξονα του γραφήματος της $f(x)$.

(ii) Γνωρίζουμε, επίσης, ότι το συμμετρικό ως προς τον y -άξονα του σημείου (x, y) του επιπέδου είναι το σημείο $(-x, y)$.

Τώρα παρατηρήστε το δεξιό από τα σχήματα 2.10. Ας θεωρήσουμε οποιοδήποτε σημείο $(x, f(-x))$ του γραφήματος της $f(-x)$. Το συμμετρικό σημείο ως προς τον y -άξονα είναι το $(-x, f(-x))$, οπότε, αν θέσουμε $x' = -x$, τότε βλέπουμε ότι $(-x, f(-x)) = (x', f(x'))$ και παρατηρούμε ότι το τελευταίο είναι σημείο του γραφήματος της $f(x)$. Δηλαδή, τα σημεία του γραφήματος της $f(-x)$ είναι τα συμμετρικά ως προς τον y -άξονα των σημείων του γραφήματος της $f(x)$. Άρα:

Το γράφημα της $f(-x)$ είναι το συμμετρικό ως προς τον y -άξονα του γραφήματος της $f(x)$.

(iii) Έστω αριθμός κ . Η **κατακόρυφη μεταφορά** κατά κ του σημείου (x, y) του επιπέδου είναι το σημείο $(x, y + \kappa)$.

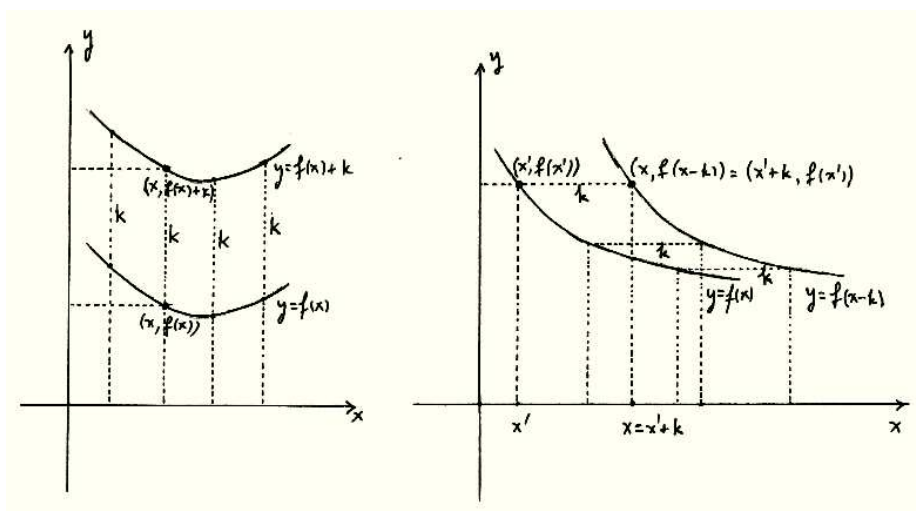
Παρατηρήστε το αριστερό από τα σχήματα 2.11. Ας θεωρήσουμε οποιοδήποτε σημείο $(x, f(x) + \kappa)$ του γραφήματος της $f(x) + \kappa$. Είναι φανερό ότι αυτό είναι η κατακόρυφη μεταφορά κατά κ του σημείου $(x, f(x))$ του γραφήματος της $f(x)$. Δηλαδή, τα σημεία του γραφήματος της $f(x) + \kappa$ είναι οι κατακόρυφες μεταφορές κατά κ των σημείων του γραφήματος της $f(x)$. Άρα:

Το γράφημα της $f(x) + \kappa$ είναι η κατακόρυφη μεταφορά κατά κ του γραφήματος της $f(x)$.

(iv) Έστω αριθμός κ . Η **οριζόντια μεταφορά** κατά κ του σημείου (x, y) του επιπέδου είναι το σημείο $(x + \kappa, y)$.

Παρατηρήστε το δεξιό από τα σχήματα 2.11. Ας θεωρήσουμε οποιοδήποτε σημείο $(x, f(x - \kappa))$ του γραφήματος της $f(x - \kappa)$. Αν θέσουμε $x' = x - \kappa$, τότε βλέπουμε ότι $(x, f(x - \kappa)) = (x' + \kappa, f(x'))$. Επομένως, το σημείο $(x, f(x - \kappa))$ είναι η οριζόντια μεταφορά κατά κ του σημείου $(x', f(x'))$ του γραφήματος της $f(x)$. Δηλαδή, τα σημεία του γραφήματος της $f(x - \kappa)$ είναι οι οριζόντιες μεταφορές κατά κ των σημείων του γραφήματος της $f(x)$. Άρα:

Το γράφημα της $f(x - \kappa)$ είναι η οριζόντια μεταφορά κατά κ του γραφήματος της $f(x)$.



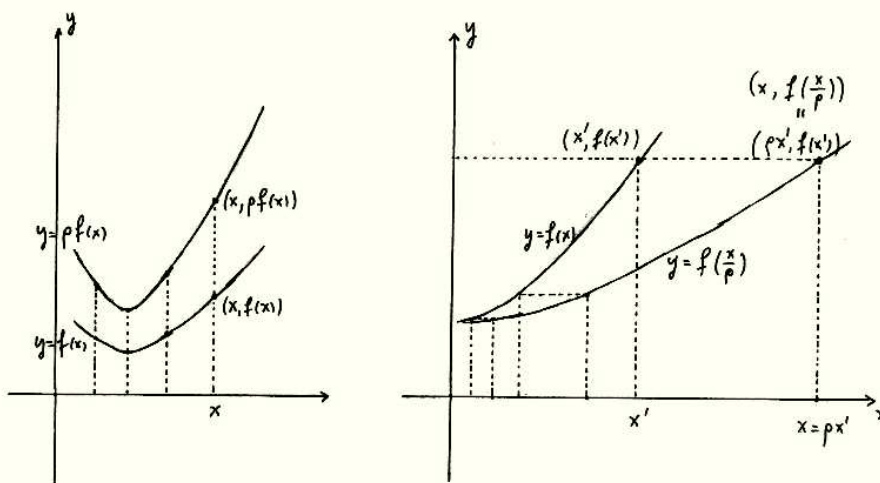
Σχήμα 2.11

(v) Έστω $\rho > 0$. Το **κατακόρυφο ομοιόθετο** με λόγο ρ του σημείου (x, y) του επιπέδου είναι το σημείο $(x, \rho y)$.

Παρατηρήστε το αριστερό από τα σχήματα 2.12. Ας θεωρήσουμε οποιοδήποτε σημείο $(x, \rho f(x))$ του γραφήματος της $\rho f(x)$. Είναι φανερό ότι αυτό είναι το κατακόρυφο ομοιόθετο με λόγο ρ του σημείου $(x, f(x))$ του γραφήματος της $f(x)$. Δηλαδή, τα σημεία του γραφήματος της $\rho f(x)$ είναι

τα κατακόρυφα ομοιόθετα με λόγο ρ των σημείων του γραφήματος της $f(x)$. Άρα:

Το γράφημα της $\rho f(x)$ είναι το κατακόρυφο ομοιόθετο με λόγο ρ του γραφήματος της $f(x)$.



Σχήμα 2.12

(vi) Έστω $\rho > 0$. Το **οριζόντιο ομοιόθετο** με λόγο ρ του σημείου (x, y) του επιπέδου είναι το σημείο $(\rho x, y)$.

Τώρα παρατηρήστε το δεξιό από τα σχήματα 2.12. Ας θεωρήσουμε οποιοδήποτε σημείο $(x, f(\frac{x}{\rho}))$ του γραφήματος της $f(\frac{x}{\rho})$. Αν θέσουμε $x' = \frac{x}{\rho}$, τότε βλέπουμε ότι $(x, f(\frac{x}{\rho})) = (\rho x', f(x'))$. Άρα το σημείο $(x, f(\frac{x}{\rho}))$ είναι το οριζόντιο ομοιόθετο με λόγο ρ του σημείου $(x', f(x'))$ του γραφήματος της $f(x)$. Δηλαδή, τα σημεία του γραφήματος της $f(\frac{x}{\rho})$ είναι τα οριζόντια ομοιόθετα με λόγο ρ των σημείων του γραφήματος της $f(x)$. Άρα:

Το γράφημα της $f(\frac{x}{\rho})$ είναι το οριζόντιο ομοιόθετο με λόγο ρ του γραφήματος της $f(x)$.

Ασκήσεις

2.4. Αρχίζοντας με το γράφημα της x^2 , σχεδιάστε τα γραφήματα των $3x^2$, $-3x^2$, $x^2 - 4$, $4 - x^2$, $(x + 4)^2$, $(3x + 4)^2$, $4 - (3x + 4)^2$. Από τα γραφήματα των συναρτήσεων να διακρίνετε τα πεδία ορισμού τους, τα σύνολα τιμών τους, τα διαστήματα μονοτονίας τους και τα αντίστοιχα σύνολα τιμών τους, καθώς και, αν υπάρχουν, τα άνω φράγματα ή τα κάτω φράγματά τους στο $(-\infty, +\infty)$.

2.5. Έστω αριθμοί $a \neq 0$ και b, c . Αρχίζοντας με το γράφημα της x^2 , περιγράψτε μέθοδο σχεδίασης του γραφήματος της

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Σε ποια περίπτωση είναι η συνάρτηση άνω φραγμένη και σε ποια περίπτωση είναι κάτω φραγμένη στο $(-\infty, +\infty)$; Ποια είναι το σύνολο τιμών της;

Υπόδειξη: Γράψτε $ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$.

2.6. Αρχίζοντας με το γράφημα της $\frac{1}{x}$, σχεδιάστε τα γραφήματα των $\frac{1}{x} + 2$, $2 - \frac{3}{x}$, $\frac{1}{x-2}$, $\frac{1}{3x-2}$, $\frac{4}{3x-2}$, $7 - \frac{4}{3x-2}$.

2.7. Έστω αριθμοί a, b, c, d με $c \neq 0$. Αρχίζοντας με το γράφημα της $\frac{1}{x}$, περιγράψτε μέθοδο σχεδίασης του γραφήματος της

$$y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται **γραμμική κλασματική** συνάρτηση.

Υπόδειξη: Γράψτε $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\frac{a}{c}(cx+d) + b - \frac{ad}{c}}{cx+d} = \frac{bc-ad}{c^2} \frac{1}{x + \frac{d}{c}} + \frac{a}{c}$.

Εφαρμόστε τα προηγούμενα για να σχεδιάσετε το γράφημα της $\frac{2x+3}{3x-1}$. Από το γράφημα να διακρίνετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, το σύνολο τιμών της, τα διαστήματα μονοτονίας της και τα αντίστοιχα σύνολα τιμών.

2.8. (i) Θεωρήστε τις συναρτήσεις $|x|$, $\frac{|x|}{x}$, $x - [x]$, $(-1)^{[x]}$, $x(-1)^{[x]}$, $(-1)^{[\frac{1}{x}]}$, $x(-1)^{[\frac{1}{x}]}$. Ποια είναι τα πεδία ορισμού τους και τα σύνολα τιμών τους; Σε ποια διαστήματα είναι οι συναρτήσεις αυτές μονότονες και ποια είναι τα αντίστοιχα σύνολα τιμών; Είναι οι συναρτήσεις άρτιες ή περιττές; Ποιες από αυτές τις συναρτήσεις είναι άνω φραγμένες ή κάτω φραγμένες στο πεδίο ορισμού τους; Σχεδιάστε τα γραφήματά τους.

(ii) Η συνάρτηση $\text{sign} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει τύπο $\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x > 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0, \\ -1, & \text{αν } x < 0. \end{cases}$ Σχεδιάστε το γράφημά της.

Σε τι διαφέρει η συνάρτηση sign από τη συνάρτηση $\frac{|x|}{x}$;

2.9. Συσχετίστε τα γραφήματα των $|f(x)|$ και $f(|x|)$ με το γράφημα της $f(x)$.

Ως εφαρμογή σχεδιάστε το γράφημα της $x^2 - 3x + 2$ και, κατόπιν, τα γραφήματα των $|x^2 - 3x + 2|$, $x^2 - 3|x| + 2$, $|x^2 - 3|x| + 2|$.

2.4 Αντίστροφη συνάρτηση

Ορισμός 2.7. Έστω συνάρτηση $f : A \rightarrow B$.

Λέμε ότι η f είναι **ένα-προς-ένα** στο A , αν για κάθε $x_1 \in A$, $x_2 \in A$ η ισότητα $f(x_1) = f(x_2)$ συνεπάγεται την ισότητα $x_1 = x_2$ ή, ισοδύναμα, αν η ανισότητα $x_1 \neq x_2$ συνεπάγεται την ανισότητα $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Λέμε ότι η f είναι **επί** του B , αν $f(A) = B$, δηλαδή αν για κάθε $y \in B$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $x \in A$ ώστε $f(x) = y$.

Η εξαρτημένη μεταβλητή μίας γνησίως μονότονης συνάρτησης δεν μπορεί να έχει την ίδια τιμή για διαφορετικές τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής. Άρα **μία γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι ένα-προς-ένα**.

Αν η $f : A \rightarrow B$ είναι ένα-προς-ένα στο A και, συγχρόνως, επί του B , τότε **για κάθε** τιμή της μεταβλητής $y \in B$ υπάρχει **μία μοναδική** αντίστοιχη τιμή της μεταβλητής $x \in A$ ώστε $f(x) = y$. Σε αυτήν την περίπτωση, οι δύο μεταβλητές μπορούν να αλλάξουν ρόλους, δηλαδή η y να είναι η ανεξάρτητη και η x να είναι η εξαρτημένη μεταβλητή ή, με άλλα λόγια, η x να είναι συνάρτηση της y .

Ορισμός 2.8. Έστω ότι η $f : A \rightarrow B$ με τύπο $y = f(x)$ είναι ένα-προς-ένα στο A και επί του B . Τότε για κάθε $y \in B$ η εξίσωση $f(x) = y$ με άγνωστο το x έχει ακριβώς μία λύση $x \in A$, οπότε έτσι καθορίζεται μία νέα συνάρτηση η οποία ονομάζεται **αντίστροφη** συνάρτηση της f , συμβολίζεται $f^{-1} : B \rightarrow A$ και έχει τύπο

$$x = f^{-1}(y).$$

Δηλαδή, για κάθε $x \in A$ και $y \in B$ ισχύει

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Έτσι, το πεδίο ορισμού A της αρχικής συνάρτησης f μετατρέπεται σε σύνολο τιμών της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} και το σύνολο τιμών B της αρχικής συνάρτησης f μετατρέπεται σε πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} .

Τώρα, έστω $f : A \rightarrow B$ η οποία είναι ένα-προς-ένα στο A , για παράδειγμα γνησίως μονότονη στο A . Η f μπορεί να μην είναι επί του B , οπότε δεν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : B \rightarrow A$.

Σε αυτήν την περίπτωση, θεωρούμε το σύνολο τιμών $B' = f(A)$ της f , το οποίο είναι υποσύνολο του B , και τότε η $f : A \rightarrow B'$ είναι ένα-προς-ένα στο A και επί του B' . Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : B' \rightarrow A$.

Παράδειγμα 2.12. Η συνάρτηση $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $y = f(x) = \frac{2x}{x-1}$ είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε και ένα-προς-ένα, στο $(1, +\infty)$. Αυτό αποδεικνύεται πολύ εύκολα με αλγεβρικό τρόπο. Όμως, η f δεν είναι επί του $\mathbb{R}$. Εύκολα βρίσκουμε ότι το σύνολο τιμών της είναι το $(2, +\infty)$. Άρα η συνάρτηση $f : (1, +\infty) \rightarrow (2, +\infty)$, με τον ίδιο τύπο, είναι ένα-προς-ένα στο $(1, +\infty)$ και επί του $(2, +\infty)$. Επομένως, ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : (2, +\infty) \rightarrow (1, +\infty)$. Ο τύπος της f^{-1} προκύπτει από τον τύπο $y = f(x) = \frac{2x}{x-1}$, «λύνοντας» αλγεβρικά, πολύ εύκολα, ως προς x :

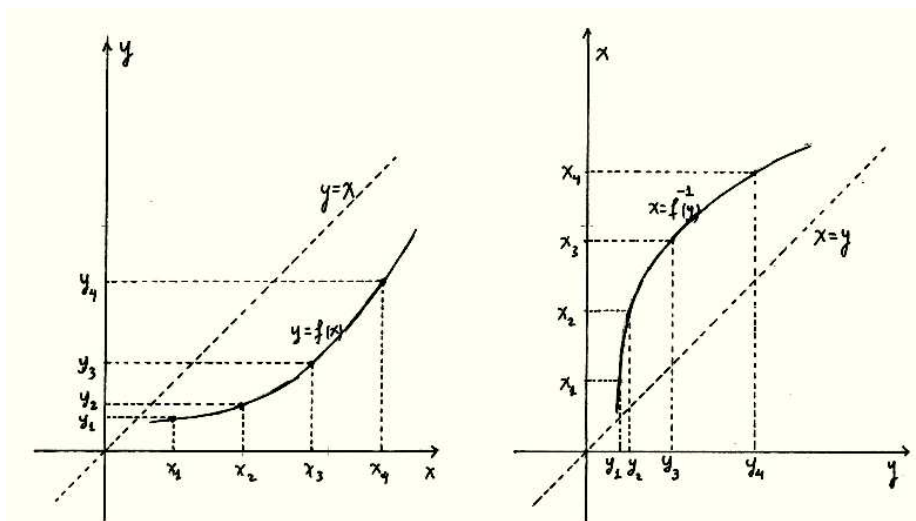
$$y = \frac{2x}{x-1} \Leftrightarrow x = \frac{y}{y-2}.$$

$$\text{Άρα } x = f^{-1}(y) = \frac{y}{y-2}.$$

Η ισοδυναμία « $y = f(x)$, αν και μόνο αν $x = f^{-1}(y)$ » αναδιατυπώνεται ως εξής: το σημείο (x, y) ανήκει στο γράφημα της f , αν και μόνο αν το σημείο (y, x) ανήκει στο γράφημα της f^{-1} . Και, επειδή τα σημεία (x, y) και (y, x) είναι συμμετρικά ως προς την κύρια διαγώνιο, δηλαδή την ευθεία με εξίσωση $y = x$, συνεπάγεται:

Τα γραφήματα μίας συνάρτησης και της αντίστροφής της είναι συμμετρικά ως προς την κύρια διαγώνιο.

Παρατηρήστε το σχήμα 2.13.



Σχήμα 2.13

Προσέξτε: Σχηματίζοντας την αντίστροφη $x = f^{-1}(y)$ της $y = f(x)$, οι μεταβλητές αλλάζουν ρόλους. Άρα, όταν σχεδιάζουμε το γράφημα της $x = f^{-1}(y)$, η οριζόντια πραγματική ευθεία πρέπει να είναι ο y -άξονας και η κατακόρυφη πραγματική ευθεία πρέπει να είναι ο x -άξονας. Αυτό επιβεβαιώνει και τον προηγούμενο κανόνα για τη σχέση ανάμεσα στα γραφήματα της συνάρτησης και της αντίστροφής της: όταν κάνουμε ανάκλαση ως προς την κύρια διαγώνιο, αυτό έχει ως αποτέλεσμα όχι μόνο να βρούμε το γράφημα της f^{-1} από το γράφημα της f αλλά και να μετατραπεί ο x -άξονας από οριζόντια σε κατακόρυφη ευθεία και ο y -άξονας από κατακόρυφη σε οριζόντια ευθεία. Όμως,

Επειδή είναι πολύ συνηθισμένο η ανεξάρτητη μεταβλητή να συμβολίζεται x και η εξαρτημένη μεταβλητή να συμβολίζεται y , πολλές φορές μετατρέπουμε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης σε $y = f^{-1}(x)$, αφού έχει προηγηθεί ο υπολογισμός του στη μορφή $x = f^{-1}(y)$ από τον τύπο $y = f(x)$. Τότε, φυσικά, πρέπει να γίνει και η ανάλογη αλλαγή στον συμβολισμό των αξόνων: ο x -άξονας θα είναι η οριζόντια ευθεία και ο y -άξονας η κατακόρυφη ευθεία.

Είναι απλό να διαπιστώσουμε ότι:

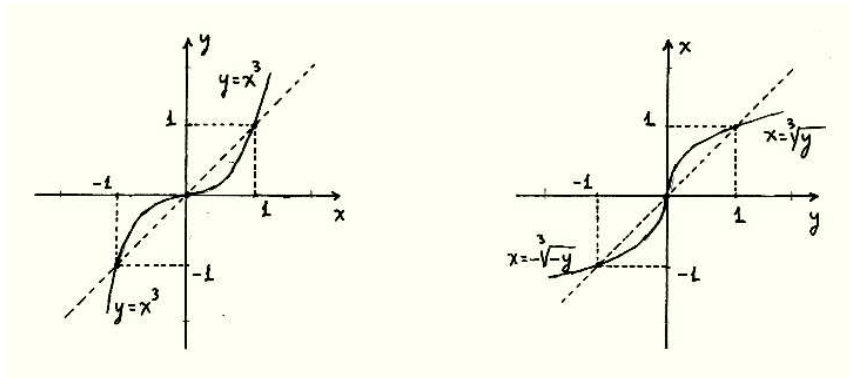
Αν μία συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα, τότε και η αντίστροφή της συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα, αντιστοίχως.

Πράγματι, έστω ότι η $f : A \rightarrow B$ είναι γνησίως αύξουσα. Θα διαπιστώσουμε ότι και η $f^{-1} : B \rightarrow A$ είναι γνησίως αύξουσα. Έστω y_1, y_2 στο B με την ιδιότητα $y_1 < y_2$. Θεωρούμε τα αντίστοιχα $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$ στο A . Προφανώς ισχύει $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$. Αν $x_1 = x_2$, τότε $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$ και καταλήγουμε σε άτοπο. Αν $x_1 > x_2$, τότε, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, συνεπάγεται $y_1 = f(x_1) > f(x_2) = y_2$ και πάλι καταλήγουμε σε άτοπο. Επομένως, πρέπει να ισχύει $x_1 < x_2$ ή, ισοδύναμα, $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.

Παράδειγμα 2.13. Η $y = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε ένα-προς-ένα, στο $(-\infty, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$. Επομένως, η αντίστροφη συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$. Λύνουμε την εξίσωση $x^3 = y$ με άγνωστο το x και βρίσκουμε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης:

$$x = \begin{cases} \sqrt[3]{y}, & \text{αν } y \geq 0, \\ -\sqrt[3]{-y}, & \text{αν } y < 0. \end{cases}$$

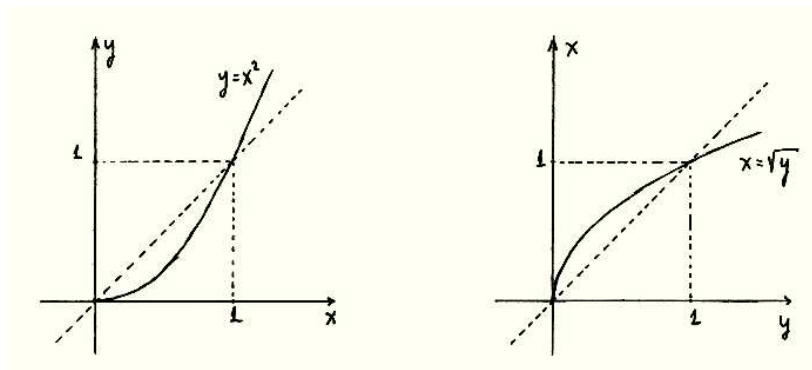
Η αντίστροφη συνάρτηση είναι και αυτή γνησίως αύξουσα. Παρατηρήστε το σχήμα 2.14.



Σχήμα 2.14

Ας δούμε τώρα κάτι αρκετά χρήσιμο.

Αν η $f : A \rightarrow B$ δεν είναι ένα-προς-ένα στο A ή αν δεν είναι επί του B , τότε δεν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : B \rightarrow A$. Όμως, μερικές φορές μπορούμε να προσδιορίσουμε κάποιο $A' \subseteq A$ ώστε η f να είναι ένα-προς-ένα στο A' , δηλαδή για κάθε $x_1 \in A'$, $x_2 \in A'$ η ισότητα $f(x_1) = f(x_2)$ να συνεπάγεται την $x_1 = x_2$. Τότε μπορούμε να θεωρήσουμε το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο A' , δηλαδή το $B' = f(A') = \{f(x) \mid x \in A'\}$, και τότε η περιορισμένη συνάρτηση $f : A' \rightarrow B'$ είναι προφανώς ένα-προς-ένα στο A' και επί του B' , οπότε ορίζεται η αντίστροφη της συνάρτηση $f^{-1} : B' \rightarrow A'$.



Σχήμα 2.15

Παράδειγμα 2.14. Η $y = x^2$, με πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$, δεν είναι ένα-προς-ένα, διότι για κάθε $y > 0$ η εξίσωση $x^2 = y$ έχει ακριβώς δύο λύσεις: $x = \sqrt{y}$ και $x = -\sqrt{y}$.

Όμως, παρατηρήστε το σχήμα 2.15. Στο διάστημα $[0, +\infty)$ η $y = x^2$ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε ένα-προς-ένα, με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση με τύπο

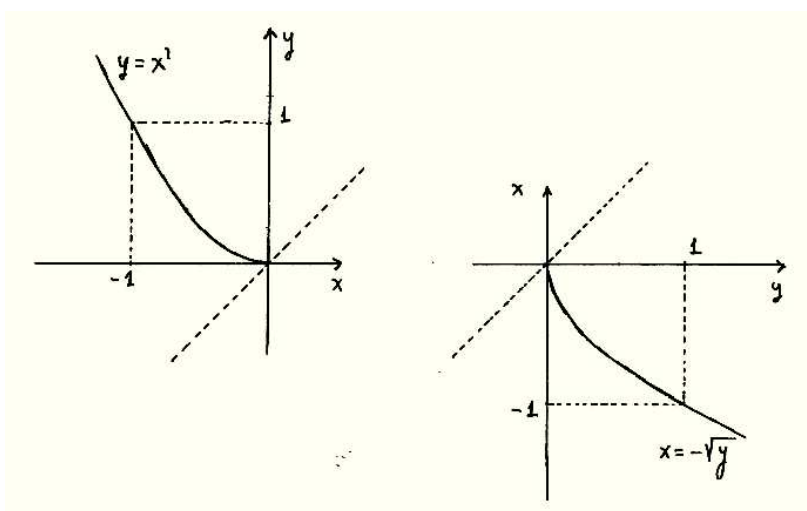
$$x = \sqrt{y},$$

με πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$, σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$ και είναι γνησίως αύξουσα.

Επίσης, παρατηρήστε και το σχήμα 2.16. Στο διάστημα $(-\infty, 0]$ η $y = x^2$ είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε ένα-προς-ένα, με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$. Άρα πάλι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση με τύπο

$$x = -\sqrt{y},$$

με πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$, σύνολο τιμών το $(-\infty, 0]$ και είναι γνησίως φθίνουσα.



Σχήμα 2.16

Ασκήσεις

2.10. Θεωρήστε την $\frac{1}{3x+1}$. Βρείτε το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών και τα διαστήματα μονοτονίας της και σχεδιάστε το γράφημά της. Βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση, καθώς και το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών και τα διαστήματα μονοτονίας της και σχεδιάστε το γράφημά της.

2.11. Έστω η γραμμική κλασματική συνάρτηση $\frac{ax+b}{cx+d}$, με $c \neq 0$, στην άσκηση 2.7. Βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση, το πεδίο ορισμού της και το σύνολο τιμών της.

Σχεδιάστε το γράφημα της αντίστροφης συνάρτησης της $\frac{2x+3}{3x-1}$.

2.12. Θεωρήστε την $x^2 + 4x + 1$. Βρείτε το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών και τα διαστήματα μονοτονίας της και σχεδιάστε το γράφημά της. Ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση; Χωρίζοντας το πεδίο ορισμού σε διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης, «μοιράστε» την σε γνησίως μονότονες συναρτήσεις, βρείτε τις αντίστροφες συναρτήσεις τους, τα πεδία ορισμού τους και τα σύνολα τιμών τους και σχεδιάστε τα γραφήματά τους.

2.5 Πολυωνυμικές και ρητές συναρτήσεις

Ορισμός 2.9. Χαρακτηρίζουμε **πολυωνυμική** κάθε συνάρτηση p με τύπο

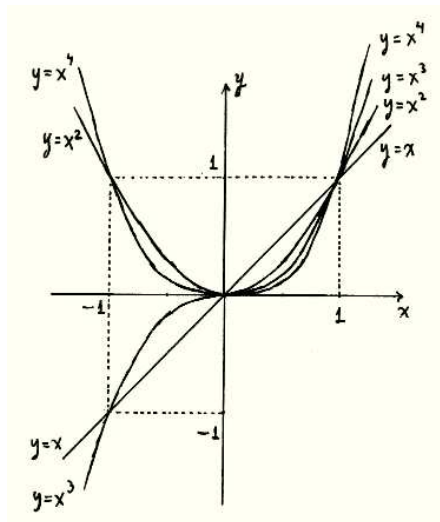
$$y = p(x) = a_N x^N + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Αν $a_N \neq 0$, τότε ο ακέραιος $N \geq 0$ ονομάζεται **βαθμός** της πολυωνυμικής συνάρτησης.

Το πεδίο ορισμού κάθε πολυωνυμικής συνάρτησης είναι, φυσικά, το $(-\infty, +\infty)$.

Παράδειγμα 2.15. Οι πιο απλές πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι οι δυνάμεις

$$y = x^n.$$



Σχήμα 2.17

Παρατηρήστε το σχήμα 2.17. Όπως το παράδειγμα x^3 , αν το n είναι περιττό, τότε η x^n είναι περιττή, γνησίως αύξουσα και με σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$. Το γράφημά της είναι καμπύλη συμμετρική ως προς το σημείο $(0, 0)$ η οποία περιέχει, ενδεικτικά, τα σημεία $(-1, -1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$ και προς τα αριστερά κατεβαίνει απερίοριστα και προς τα δεξιά ανεβαίνει απερίοριστα.

Επίσης, όπως η x^2 , αν το n είναι άρτιο, τότε η x^n είναι άρτια, γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$, και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$. Το γράφημά της είναι καμπύλη συμμετρική ως προς τον y -άξονα η οποία περιέχει, ενδεικτικά, τα σημεία $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$ και, ξεκινώντας από το σημείο $(0, 0)$, προς τα αριστερά ανεβαίνει απερίοριστα και προς τα δεξιά, επίσης, ανεβαίνει απερίοριστα.

Όπως είπαμε, τα γραφήματα των x^n περιέχουν τα σημεία $(0, 0)$, $(1, 1)$. Στο διάστημα $(0, 1)$ τα γραφήματα των x , x^2 , x^3 , ... είναι το καθένα κάτω από το προηγούμενό του, ενώ στο διάστημα $(1, +\infty)$ είναι το καθένα πάνω από το προηγούμενό του. Αυτό συμβαίνει διότι για κάθε $x \in (0, 1)$, τα ύψη των γραφημάτων πάνω από το σημείο x του x -άξονα μειώνονται: $x > x^2 > x^3 > \dots$, ενώ για κάθε $x \in (1, +\infty)$ τα ύψη των γραφημάτων πάνω από το x αυξάνονται: $x < x^2 < x^3 < \dots$.

Ορισμός 2.10. Χαρακτηρίζουμε **ρητή** κάθε συνάρτηση r με τύπο

$$y = r(x) = \frac{a_N x^N + \dots + a_1 x + a_0}{b_M x^M + \dots + b_1 x + b_0}.$$

Το πεδίο ορισμού μίας ρητής συνάρτησης αποτελείται από όλα τα x , εκτός από εκείνα τα οποία μηδενίζουν τον παρονομαστή της.

Παράδειγμα 2.16. Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι παραδείγματα ρητών συναρτήσεων. Οι απλούστερες ρητές συναρτήσεις, οι οποίες δεν είναι πολυωνυμικές, είναι οι δυνάμεις

$$y = \frac{1}{x^n} = x^{-n},$$

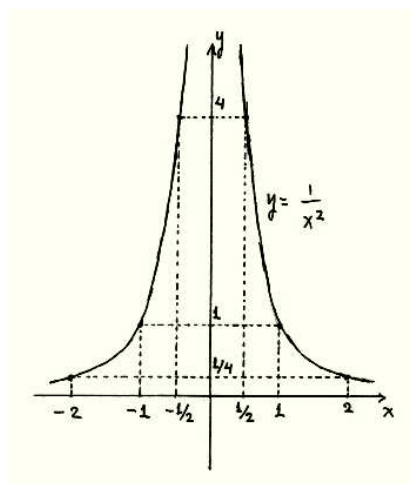
με $n \in \mathbb{N}$. Όλες έχουν πεδίο ορισμού το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Αν το $n \in \mathbb{N}$ είναι περιττό, τότε η $\frac{1}{x^n}$ είναι περιττή, γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $(-\infty, 0)$, και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$. Το μέρος του γραφήματος το οποίο αντιστοιχεί στο $(-\infty, 0)$ είναι καμπύλη η οποία περιέχει το

σημείο $(-1, -1)$ και προς τα αριστερά ανεβαίνει προσεγγίζοντας τον x -άξονα και προς τα δεξιά κατεβαίνει απεριόριστα και προσεγγίζει τον y -άξονα (μένοντας αριστερά του y -άξονα). Ομοίως, το μέρος του γραφήματος το οποίο αντιστοιχεί στο $(0, +\infty)$ είναι καμπύλη η οποία περιέχει το σημείο $(1, 1)$ και προς τα αριστερά ανεβαίνει απεριόριστα και προσεγγίζει τον y -άξονα (μένοντας δεξιά του y -άξονα) και προς τα δεξιά κατεβαίνει προσεγγίζοντας τον x -άξονα. Τα δύο αυτά μέρη του γραφήματος είναι συμμετρικά ως προς το σημείο $(0, 0)$.

Αν το $n \in \mathbb{N}$ είναι άρτιο, τότε η $\frac{1}{x^n}$ είναι άρτια, γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$, και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$. Το μέρος του γραφήματος το οποίο αντιστοιχεί στο $(-\infty, 0)$ είναι καμπύλη η οποία περιέχει το σημείο $(-1, 1)$ και προς τα αριστερά κατεβαίνει προσεγγίζοντας τον x -άξονα και προς τα δεξιά ανεβαίνει απεριόριστα και προσεγγίζει τον y -άξονα (μένοντας αριστερά του y -άξονα). Ομοίως, το μέρος του γραφήματος το οποίο αντιστοιχεί στο $(0, +\infty)$ είναι καμπύλη η οποία περιέχει το σημείο $(1, 1)$ και προς τα αριστερά ανεβαίνει απεριόριστα και προσεγγίζει τον y -άξονα (μένοντας δεξιά του y -άξονα) και προς τα δεξιά κατεβαίνει προσεγγίζοντας τον x -άξονα. Τα δύο αυτά μέρη του γραφήματος είναι συμμετρικά ως προς τον y -άξονα.

Παρατηρήστε στο σχήμα 2.18 την περίπτωση $n = 2$.



Σχήμα 2.18

Ασκήσεις

2.13. Είναι ίδιες οι συναρτήσεις $\frac{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2}}$ και $\frac{x^2(x-2)}{(x-1)^2(x+1)}$; Ποια είναι τα πεδία ορισμού τους; Είναι ίδιες στην τομή των πεδίων ορισμού τους;

2.14. Πώς συσχετίζονται τα γραφήματα των $\frac{1}{x^n}$ για τις διάφορες τιμές του $n \in \mathbb{N}$;

2.15. Ξεκινώντας με τα γραφήματα των $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{x^4}$, σχεδιάστε τα γραφήματα των $-1 - \frac{3}{(4x-1)^2}$, $\frac{5}{(2-3x)^3} + 4$, $-\frac{3}{(2x+1)^4} + 2$. Από τα γραφήματα να διακρίνετε τα πεδία ορισμού, τα σύνολα τιμών, τα διαστήματα μονοτονίας και τα αντίστοιχα σύνολα τιμών.

2.16. (i) Θεωρήστε περιττό $n \in \mathbb{N}$ και την $\frac{1}{x^n}$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Βρείτε το σύνολο τιμών και τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη και βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση.

(ii) Θεωρήστε άρτιο $n \in \mathbb{N}$ και την $\frac{1}{x^n}$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Βρείτε το σύνολο τιμών και τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης. Ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση; Χωρίζοντας το πεδίο ορισμού σε διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης, «μοιράστε» την σε γνησίως μονότονες συναρτήσεις και βρείτε τις αντίστροφες συναρτήσεις τους, τα πεδία ορισμού τους και τα σύνολα τιμών τους.

2.6 Δυνάμεις

Ορισμός 2.11. Θεωρούμε τη συνάρτηση

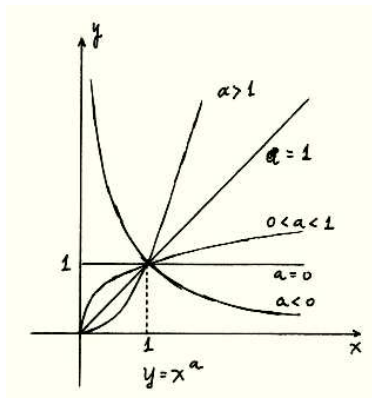
$$y = x^a$$

με πεδίο ορισμού: (i) το $[0, +\infty)$, αν $a > 0$, (ii) το $(0, +\infty)$, αν $a < 0$. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται **δύναμη** με εκθέτη a .

Το πεδίο ορισμού της x^a είναι ακριβώς αυτό το οποίο μόλις αναφέραμε, αν το a δεν είναι ακέραιος. Γνωρίζουμε φυσικά ότι αν το a είναι ακέραιος, τότε η x^a ορίζεται και για αρνητικές τιμές του x , οπότε το πεδίο ορισμού της περιέχει και το διάστημα $(-\infty, 0)$. Μάλιστα, αν το a είναι θετικός ακέραιος, τότε το πεδίο ορισμού περιέχει και το 0, οπότε είναι ολόκληρο το $(-\infty, +\infty)$. Επειδή, όμως, η περίπτωση κατά την οποία το a είναι ακέραιος έχει ήδη μελετηθεί στις προηγούμενες ενότητες, για να αποφύγουμε την περιπλοκότητα σχετικά με τον εκθέτη, θα περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της x^a , όπως ακριβώς κάναμε παραπάνω.

Αν $a > 0$, τότε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της x^a είναι και τα δύο ίσα με το $[0, +\infty)$. Αν $a < 0$, τότε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών είναι και τα δύο ίσα με το $(0, +\infty)$.

Αν $a > 0$, τότε η x^a είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Αν $a < 0$, τότε η x^a είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$. Αυτό είναι το περιεχόμενο του (ii) της Πρότασης 1.4.



Σχήμα 2.19

Παρατηρήστε το σχήμα 2.19. Αν $a > 0$, τότε το γράφημα της x^a είναι καμπύλη η οποία περιέχει τα σημεία $(0, 0)$, $(1, 1)$ και η κατακόρυφη προβολή του στον x -άξονα είναι το $[0, +\infty)$, το πεδίο ορισμού, ενώ η οριζόντια προβολή του στον y -άξονα είναι το $[0, +\infty)$, το σύνολο τιμών. Άρα το γράφημα ξεκινάει από το σημείο $(0, 0)$ και προς τα δεξιά ανεβαίνει απεριόριστα. Ομοίως, αν $a < 0$, τότε το γράφημα της x^a είναι καμπύλη η οποία περιέχει το σημείο $(1, 1)$ και η κατακόρυφη προβολή του στον x -άξονα είναι το $(0, +\infty)$, ενώ η οριζόντια προβολή του στον y -άξονα είναι το $(0, +\infty)$. Άρα το γράφημα προς τα αριστερά ανεβαίνει απεριόριστα και προσεγγίζει τον y -άξονα (μένοντας δεξιά του y -άξονα) και προς τα δεξιά κατεβαίνει προσεγγίζοντας τον x -άξονα.

Αν αντιπαραβάλλουμε τα γραφήματα των x^a και x^b όταν $a < b$, τότε βλέπουμε ότι και τα δύο γραφήματα περιέχουν το σημείο $(1, 1)$, ότι στο διάστημα $(0, 1)$ το γράφημα της x^a είναι πάνω από το γράφημα της x^b και ότι στο διάστημα $(1, +\infty)$ το γράφημα της x^a είναι κάτω από το γράφημα της x^b .

Η αντίστροφη συνάρτηση της $y = x^a$ είναι η $x = y^{\frac{1}{a}}$. Παρατηρήστε ότι οι εκθέτες a και $\frac{1}{a}$ είναι είτε και οι δύο > 0 είτε και οι δύο < 0 .

Ασκήσεις

2.17. Βρείτε τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών και σχεδιάστε τα γραφήματα των x^0 , $x^{\frac{2}{3}}$, $x^{-\frac{2}{3}}$, $x^{\frac{3}{2}}$, $x^{-\frac{3}{2}}$, $x^{\sqrt{2}}$, $x^{-\sqrt{2}}$.

2.18. Βάσει των γραφημάτων των $\sqrt{x}$, $\sqrt[4]{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[5]{x}$, $x^{\sqrt{2}}$, $x^{-\sqrt{2}}$, σχεδιάστε τα γραφήματα των $2\sqrt{x-1}+1$, $-\sqrt[4]{2-3x}+3$, $2+\sqrt[3]{2x+1}$, $1-4\sqrt[3]{3-x}$, $(2x-3)^{\sqrt{2}}$, $2-(2-3x)^{\sqrt{2}}$, $(1-x)^{-\sqrt{2}}$, $3+(2x+1)^{-\sqrt{2}}$. Από τα γραφήματα να διακρίνετε τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών.

2.7 Εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση

Ορισμός 2.12. Για οποιοδήποτε $a > 0$, η συνάρτηση

$$y = a^x$$

με πεδίο ορισμού $(-\infty, +\infty)$ ονομάζεται **εκθετική** συνάρτηση με βάση a .

Αν $a = 1$, τότε η εκθετική συνάρτηση είναι σταθερή, $1^x = 1$, και έχει σύνολο τιμών το $\{1\}$.

Αν $a > 1$ ή $0 < a < 1$, τότε το σύνολο τιμών της a^x είναι το $(0, +\infty)$.

Αν $a > 1$, τότε η a^x είναι γνησίως αύξουσα. Αν $0 < a < 1$, τότε η a^x είναι γνησίως φθίνουσα. Αυτό είναι το περιεχόμενο του (iii) της Πρότασης 1.4.

Το γράφημα της a^x είναι καμπύλη, η οποία περιέχει, ενδεικτικά, τα σημεία $(0, 1)$, $(1, a)$. Η κατακόρυφη προβολή του γραφήματος στον x -άξονα είναι το $(-\infty, +\infty)$, το πεδίο ορισμού, ενώ η οριζόντια προβολή του στον y -άξονα είναι το $(0, +\infty)$, το σύνολο τιμών. Αν $a > 1$, τότε το γράφημα προς τα αριστερά κατεβαίνει προσεγγίζοντας τον x -άξονα και προς τα δεξιά ανεβαίνει απεριόριστα. Ομοίως, αν $0 < a < 1$, τότε το γράφημα προς τα αριστερά ανεβαίνει απεριόριστα και προς τα δεξιά κατεβαίνει προσεγγίζοντας τον x -άξονα.

Αν $a = 1$, τότε η a^x είναι, όπως είδαμε, σταθερή, οπότε δεν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση. Αν $0 < a < 1$ ή $a > 1$, τότε η a^x είναι γνησίως μονότονη, οπότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση. Για να βρούμε τον τύπο της, λύνουμε την $a^x = y$ ως προς x και βρίσκουμε $x = \log_a y$. Πράγματι, θυμόμαστε από την ενότητα 1.10 του πρώτου κεφαλαίου ότι το $\log_a y$ είχε ορισθεί ως η μοναδική λύση της εξίσωσης $a^x = y$, καθώς και την ανάλογη ισοδυναμία

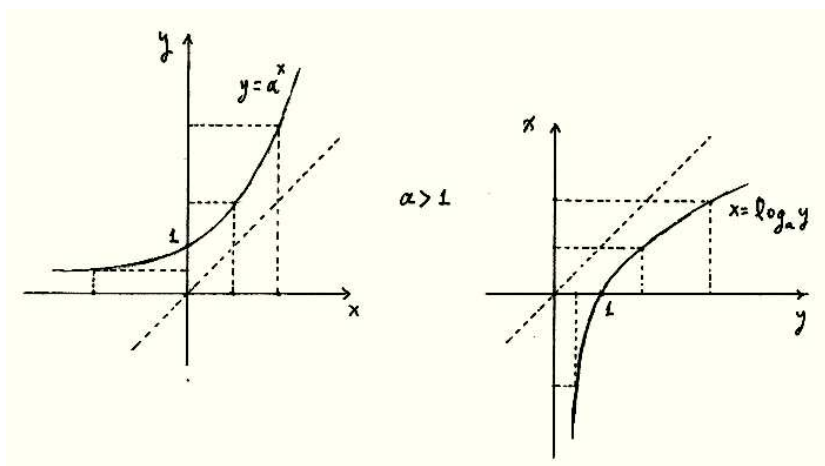
$$x = \log_a y \Leftrightarrow a^x = y \quad \text{για } x \in (-\infty, +\infty), y \in (0, +\infty).$$

Επομένως, η αντίστροφη συνάρτηση της $y = a^x$ είναι η $x = \log_a y$.

Ορισμός 2.13. Τη συνάρτηση

$$x = \log_a y$$

την ονομάζουμε **λογαριθμική** συνάρτηση με βάση a . Το πεδίο ορισμού της είναι το $(0, +\infty)$ και το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, +\infty)$.



Σχήμα 2.20

Αν $a > 1$, τότε η $\log_a y$ είναι γνησίως αύξουσα. Αν $0 < a < 1$, τότε η $\log_a y$ είναι γνησίως φθίνουσα. Αυτό είναι το περιεχόμενο του (v) της Πρότασης 1.5.

Παρατηρήστε το σχήμα 2.20. Το γράφημα της $\log_a y$ είναι καμπύλη η οποία περιέχει, ενδεικτικά, τα σημεία $(1, 0)$, $(a, 1)$. Αν $a > 1$, τότε το γράφημα προς τα αριστερά κατεβαίνει απεριόριστα και προσεγγίζει τον x -άξονα (μένοντας δεξιά του x -άξονα) και προς τα δεξιά ανεβαίνει απεριόριστα. Αν $0 < a < 1$, τότε το γράφημα προς τα αριστερά ανεβαίνει απεριόριστα και προσεγγίζει τον x -άξονα (μένοντας δεξιά του x -άξονα) και προς τα δεξιά κατεβαίνει απεριόριστα.

Φυσικά, θα ακολουθούμε τις περισσότερες φορές από τώρα και στο εξής τη συνηθισμένη τακτική να αλλάζουμε τα σύμβολα των μεταβλητών και να γράφουμε $y = \log_a x$.

Ασκήσεις

2.19. Σχεδιάστε τα γραφήματα των $3^{-x} - 2$, $1 + 2^{3-x}$, $2^{|x|}$, $2^{-|x|}$, $\log_{10}(-y)$, $\log_2 |y|$, $\log_{\frac{1}{2}}(2 - y)$.

2.20. Θεωρήστε τις $\log_{10} \frac{x-1}{x+1}$, $\log_{10} \frac{1-x}{1+x}$, $\log_{10}(1 - x^2)$, $\log_{10}(x^2 - 1)$. Βρείτε τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών τους. Βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας τους και τα αντίστοιχα σύνολα τιμών και σχεδιάστε τα γραφήματά τους. Για ποιες από αυτές ορίζονται οι αντίστροφες συναρτήσεις; Για εκείνες τις συναρτήσεις οι οποίες έχουν αντίστροφες, βρείτε τις αντίστροφες συναρτήσεις και τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών τους και σχεδιάστε τα γραφήματά τους. Τι μπορείτε να πείτε για εκείνες τις συναρτήσεις οι οποίες δεν έχουν αντίστροφες;

2.8 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Ορισμός 2.14. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Η f χαρακτηρίζεται **περιοδική**, αν υπάρχει $T > 0$, ώστε να ισχύει $f(x \pm T) = f(x)$ για κάθε $x \in A$. Ένας τέτοιος αριθμός T ονομάζεται **περίοδος** της f .

Το να είναι η f περιοδική προϋποθέτει ότι, αν το x είναι οποιοδήποτε στοιχείο του πεδίου ορισμού A , τότε και τα $x \pm T$ είναι στοιχεία του A : τότε λέμε ότι το σύνολο A είναι **περιοδικό** με περίοδο T .

Παράδειγμα 2.17. Οι $\cos x$, $\sin x$ είναι περιοδικές με περίοδο 2π , αφού ισχύει $\cos(x \pm 2\pi) = \cos x$ και $\sin(x \pm 2\pi) = \sin x$.

Παράδειγμα 2.18. Οι $\tan x$, $\cot x$ είναι περιοδικές με περίοδο π , αφού ισχύει $\tan(x \pm \pi) = \tan x$ και $\cot(x \pm \pi) = \cot x$.

Έστω ότι η f είναι περιοδική με περίοδο T . Από την $f(x - T) = f(x)$ συνεπάγεται ότι οι συναρτήσεις $f(x - T)$ και $f(x)$ είναι ίδιες, οπότε έχουν τα ίδια γραφήματα. Το ίδιο ισχύει και για τις $f(x + T)$ και $f(x)$. Άρα οι οριζόντιες μεταφορές κατά $\pm T$ του γραφήματος της f ταυτίζονται με το γράφημα της f . Λαμβάνοντας υπόψη αυτό, φτάνουμε στο ακόλουθο χρήσιμο συμπέρασμα. Έστω ότι η f είναι περιοδική με περίοδο T . Παίρνουμε οποιοδήποτε a . Τότε για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ το μέρος του γραφήματος της f το οποίο αντιστοιχεί στο διάστημα $[a + kT, a + (k + 1)T)$ είναι η οριζόντια μεταφορά κατά kT του μέρους του γραφήματος το οποίο αντιστοιχεί στο διάστημα $[a, a + T)$. Επομένως,

Έστω ότι η f είναι περιοδική με περίοδο T . Μπορούμε να σχεδιάσουμε ολόκληρο το γράφημα της f , αν σχεδιάσουμε το μέρος του το οποίο αντιστοιχεί στο διάστημα $[a, a + T)$ και, κατόπιν, το μεταφέρουμε οριζοντίως κατά όλα τα ακέραια πολλαπλάσια του T .

Όλα αυτά βρίσκουν εφαρμογή στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

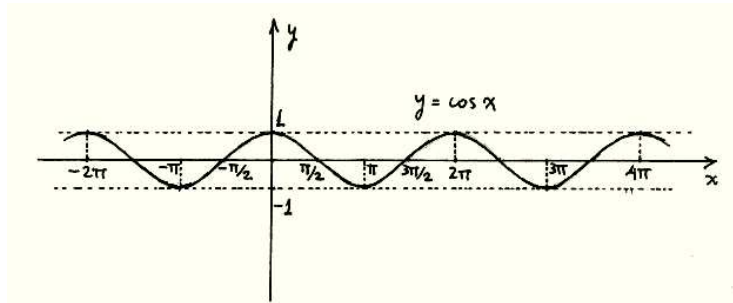
Ορισμός 2.15. Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι: η συνάρτηση **συνημίτονο**, η συνάρτηση **ημίτονο**, η συνάρτηση **εφαπτόμενη** και η συνάρτηση **συνεφαπτόμενη**, με αντίστοιχους τύπους

$$y = \cos x, \quad y = \sin x, \quad y = \tan x, \quad y = \cot x.$$

Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις περιγράφονται ευθύς αμέσως.

(i) Παρατηρήστε το σχήμα 2.21. Η $\cos x$ έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $[-1, 1]$ και είναι περιοδική με περίοδο 2π . Είναι γνησίως αύξουσα στο $[-\pi, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$. Το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί σε καθένα από αυτά τα διαστήματα είναι το $[-1, 1]$. Στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ το γράφημα είναι καμπύλη η οποία ανεβαίνει από το σημείο $(-\pi, -1)$ στο σημείο $(0, 1)$ και κατεβαίνει από το σημείο $(0, 1)$ στο σημείο $(\pi, -1)$ και περιέχει, ενδεικτικά, τα σημεία $(-\frac{\pi}{2}, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$.

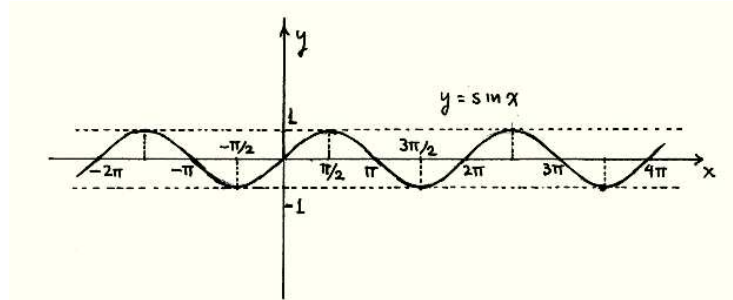
Η $\cos x$ είναι φραγμένη στο $(-\infty, +\infty)$ και έχει άνω φράγμα το 1 και κάτω φράγμα το -1 .



Σχήμα 2.21

(ii) Παρατηρήστε το σχήμα 2.22. Η $\sin x$ έχει πεδίο ορισμού $(-\infty, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $[-1, 1]$ και είναι περιοδική με περίοδο 2π . Είναι γνησίως αύξουσα στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί σε καθένα από αυτά τα διαστήματα είναι το $[-1, 1]$. Στο διάστημα $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ το γράφημα είναι καμπύλη η οποία ανεβαίνει από το σημείο $(-\frac{\pi}{2}, -1)$ στο σημείο $(\frac{\pi}{2}, 1)$ και κατεβαίνει από το σημείο $(\frac{\pi}{2}, 1)$ στο σημείο $(\frac{3\pi}{2}, -1)$ και περιέχει, ενδεικτικά, τα σημεία $(0, 0)$, $(\pi, 0)$.

Όπως και η $\cos x$, η $\sin x$ είναι φραγμένη στο $(-\infty, +\infty)$ και έχει άνω φράγμα το 1 και κάτω φράγμα το -1 .

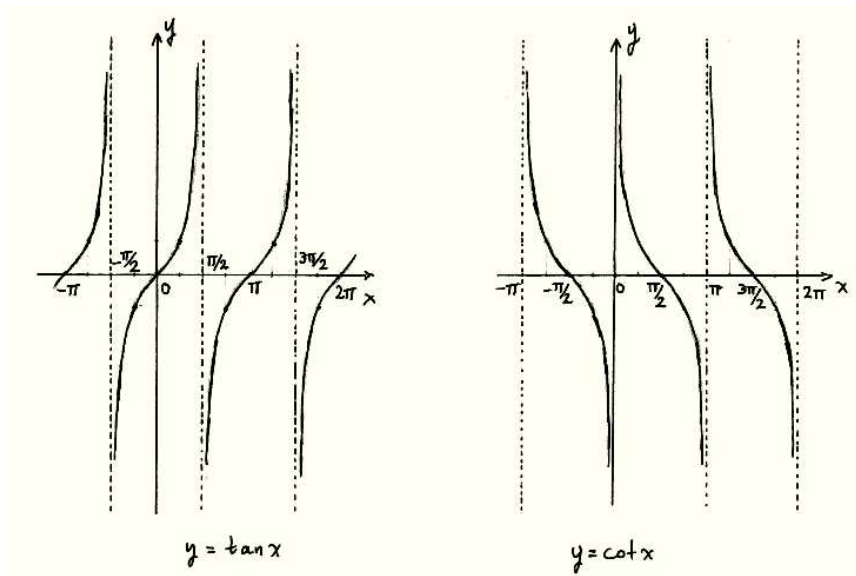


Σχήμα 2.22

(iii) Παρατηρήστε το αριστερό από τα σχήματα 2.23. Η $\tan x$ έχει πεδίο ορισμού την ένωση των διαστημάτων $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, +\infty)$. Είναι περιοδική με περίοδο π . Είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ και το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο διάστημα αυτό είναι το $(-\infty, +\infty)$. Στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ το γράφημα είναι καμπύλη η οποία προς τα αριστερά κατεβαίνει απεριόριστα προσεγγίζοντας την κατακόρυφη ευθεία με εξίσωση $x = -\frac{\pi}{2}$ (μένοντας δεξιά αυτής της ευθείας) και προς τα δεξιά ανεβαίνει απεριόριστα προσεγγίζοντας την κατακόρυφη ευθεία με εξίσωση $x = \frac{\pi}{2}$ (μένοντας αριστερά αυτής της ευθείας) και περιέχει, ενδεικτικά, το σημείο $(0, 0)$. Λόγω της περιοδικότητας της συνάρτησης, το γράφημα αυτό επαναλαμβάνεται μετατοπισμένο οριζόντια κατά $k\pi$ σε κάθε αντίστοιχο διάστημα $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

(iv) Παρατηρήστε το δεξιό από τα σχήματα 2.23. Η $\cot x$ έχει πεδίο ορισμού την ένωση των διαστημάτων $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, +\infty)$. Είναι περιοδική με περίοδο π . Είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, \pi)$ και το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο διάστημα αυτό είναι το $(-\infty, +\infty)$. Στο $(0, \pi)$ το γράφημα είναι καμπύλη η οποία προς τα αριστερά ανεβαίνει απεριόριστα προσεγγίζοντας την κατακόρυφη ευθεία με εξίσωση $x = 0$, δηλαδή τον y -άξονα

(μένοντας δεξιά του y -άξονα), και προς τα δεξιά κατεβαίνει απεριόριστα προσεγγίζοντας την κατακόρυφη ευθεία με εξίσωση $x = \pi$ (μένοντας αριστερά αυτής της ευθείας) και περιέχει, ενδεικτικά, το σημείο $(\frac{\pi}{2}, 0)$. Λόγω της περιοδικότητας της συνάρτησης, το γράφημα αυτό επαναλαμβάνεται μετατοπισμένο οριζόντια κατά $k\pi$ σε κάθε αντίστοιχο διάστημα $(k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.



Σχήμα 2.23

Θα επισημάνουμε ξανά ότι ο τρόπος με τον οποίο ορίσαμε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι γεωμετρικός. Βασιστήκαμε στους γεωμετρικούς ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου, που είδαμε στην ενότητα 1.11 του κεφαλαίου 1. Ένας καθαρά αναλυτικός τρόπος ορισμού των τριγωνομετρικών συναρτήσεων βρίσκεται στην ενότητα 11.17 του κεφαλαίου 11, αλλά είναι πολύ νωρίς για να τον εξετάσουμε εδώ. Χρειάζεται προεργασία και, κυρίως, μελέτη του κεφαλαίου 9.

Ασκήσεις

2.21. Σχεδιάστε τα γραφήματα των $\cos(2x)$, $\tan \frac{x-\pi}{2}$, $2 \sin(\frac{\pi}{4} - 3x)$, $\cot(\frac{\pi}{2} - x)$.

2.22. Δείτε την άσκηση 1.36: πώς θα σχεδιάσετε το γράφημα της $a \cos x + b \sin x$;

Σχεδιάστε τα γραφήματα των $\cos x + \sin x$, $\cos x - \sin x$, $\sqrt{3} \cos x + \sin x$, $\sqrt{3} \cos x - \sin x$.

2.23. Βρείτε τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών των $\sqrt{\sin x}$, $\frac{1}{1+\sin x}$, $\log_2(\sin x)$, $\sqrt{\tan x + \cot x}$.

2.24. Θεωρήστε την $f : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x \sin x$.

Παρατηρήστε ότι: $-x \leq f(x) \leq x$ για $x \geq 0$, και $x \leq f(x) \leq -x$ για $x \leq 0$. Λόγω αυτών των ανισοτήτων, το γράφημα της f βρίσκεται ανάμεσα στις ευθείες με εξισώσεις $y = -x$ και $y = x$. Επίσης, στις λύσεις της εξίσωσης $\sin x = 1$, δηλαδή στα $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, το γράφημα της f «ακουμπά» την ευθεία με εξίσωση $y = x$. Ομοίως, στις λύσεις της εξίσωσης $\sin x = -1$, δηλαδή στα $x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, το γράφημα της f «ακουμπά» την ευθεία με εξίσωση $y = -x$. Σε ποια σημεία το γράφημα της f τέμνει τον x -άξονα; Σχεδιάστε το γράφημα της f .

2.25. Θεωρήστε την $f : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \sin \frac{1}{x}$.

Παρατηρήστε ότι το γράφημα της f βρίσκεται ανάμεσα στις οριζόντιες ευθείες με εξισώσεις $y = -1$ και $y = 1$. Βρείτε τις λύσεις των εξισώσεων $\sin \frac{1}{x} = 1$ και $\sin \frac{1}{x} = -1$ στο $(0, +\infty)$, καθώς και στο $(-\infty, 0)$. Οι λύσεις των εξισώσεων αυτών ορίζουν άπειρα διαδοχικά υποδιαστήματα του $(0, +\infty)$ και άπειρα διαδοχικά υποδιαστήματα του $(-\infty, 0)$ τα οποία «συσσωρεύονται» στο 0 και στα οποία η f είναι εναλλάξ γνησίως αύξουσα και γνησίως φθίνουσα. Στις λύσεις της εξίσωσης $\sin \frac{1}{x} = 1$ το γράφημα της f «ακουμπά» την ευθεία με εξίσωση $y = 1$, ενώ στις λύσεις της εξίσωσης $\sin \frac{1}{x} = -1$ το γράφημα «ακουμπά» την ευθεία με εξίσωση $y = -1$. Σε ποια σημεία το γράφημα της f τέμνει τον x -άξονα; Σχεδιάστε το γράφημα της f .

2.26. Συμβουλευόμενοι τις ασκήσεις 2.24 και 2.25, σχεδιάστε τα γραφήματα των $x^2 \sin x$, $\sqrt{x} \sin x$, $x \sin \frac{1}{x}$, $x^2 \sin \frac{1}{x}$, $\sqrt{x} \sin \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$.

2.9 Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Καμία από τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις δεν έχει αντίστροφη συνάρτηση, εκτός αν περιορίσουμε τα πεδία ορισμού τους σε κατάλληλα διαστήματα όπου οι συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες ή γνησίως φθίνουσες. Κάνουμε τις εξής επιλογές.

Ορισμός 2.16. Η $y = \cos x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $[-1, 1]$. Επομένως, ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση **τόξο συνημιτόνου** με τύπο

$$x = \arccos y,$$

πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$ και σύνολο τιμών το $[0, \pi]$.

Η $y = \sin x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $[-1, 1]$. Επομένως, ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση **τόξο ημιτόνου** με τύπο

$$x = \arcsin y,$$

πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$ και σύνολο τιμών το $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Η $y = \tan x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$. Επομένως, ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση **τόξο εφαπτόμενης** με τύπο

$$x = \arctan y,$$

πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Η $y = \cot x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, \pi)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$. Επομένως, ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση **τόξο συνεφαπτόμενης** με τύπο

$$x = \operatorname{arccot} y,$$

πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $(0, \pi)$.

Έχουμε, λοιπόν, ορίσει τις λεγόμενες **αντίστροφες τριγωνομετρικές** συναρτήσεις. Πάντως, τις περισσότερες φορές από τώρα και στο εξής θα αλλάζουμε, ως συνήθως, τα σύμβολα των μεταβλητών και θα γράφουμε $y = \arccos x$, $y = \arcsin x$, $y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$ τις αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Μετά από αυτήν την αλλαγή συμβόλων, οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις και τα αντίστοιχα γραφήματά τους περιγράφονται ως εξής.

(i) Παρατηρήστε το αριστερό από τα σχήματα 2.24. Η $y = \arccos x$ έχει πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$ και σύνολο τιμών το $[0, \pi]$. Είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 1]$ και το γράφημά της είναι καμπύλη η οποία προς τα δεξιά κατεβαίνει από το σημείο $(-1, \pi)$ προς το σημείο $(1, 0)$ και περιέχει, ενδεικτικά, το σημείο $(0, \frac{\pi}{2})$. Το γράφημα αυτό είναι το συμμετρικό του μέρους του γραφήματος της $y = \cos x$ (παρατηρήστε το σχήμα 2.21) το οποίο αντιστοιχεί στο $[0, \pi]$.

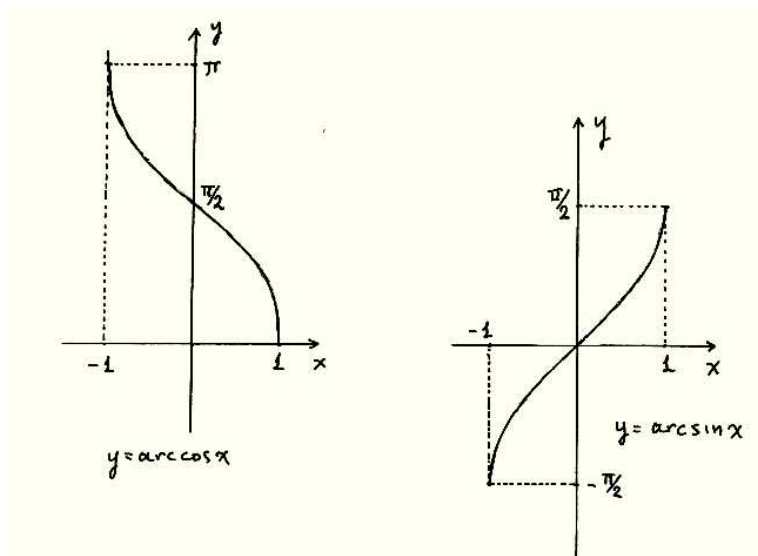
Έχουμε και τη σχέση αντιστροφής:

$$y = \arccos x \Leftrightarrow \cos y = x \quad \text{για } x \in [-1, 1], y \in [0, \pi].$$

(ii) Παρατηρήστε το δεξιό από τα σχήματα 2.24. Η $y = \arcsin x$ έχει πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$ και σύνολο τιμών το $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$ και το γράφημά της είναι καμπύλη η οποία προς τα δεξιά ανεβαίνει από το σημείο $(-1, -\frac{\pi}{2})$ προς το σημείο $(1, \frac{\pi}{2})$ και περιέχει, ενδεικτικά, το σημείο $(0, 0)$. Το γράφημα αυτό είναι το συμμετρικό του μέρους του γραφήματος της $y = \sin x$ (παρατηρήστε το σχήμα 2.22) το οποίο αντιστοιχεί στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Έχουμε και τη σχέση αντιστροφής:

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow \sin y = x \quad \text{για } x \in [-1, 1], y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$



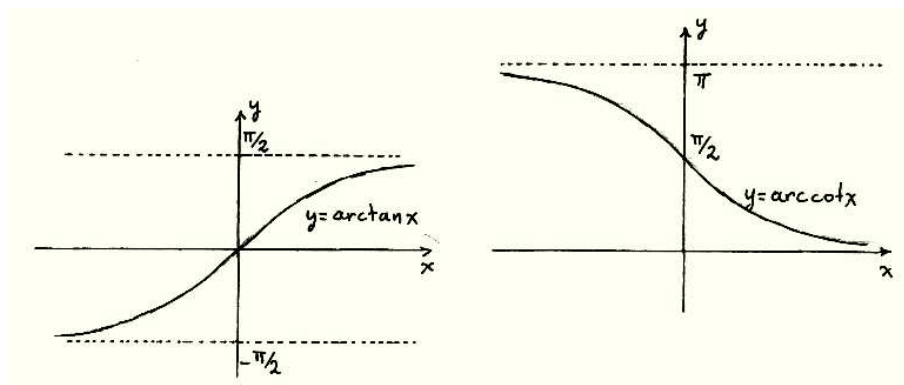
Σχήμα 2.24

(iii) Παρατηρήστε το αριστερό από τα σχήματα 2.25. Η $y = \arctan x$ έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$ και το γράφημά της είναι καμπύλη η οποία προς τα αριστερά κατεβαίνει προσεγγίζοντας την οριζόντια ευθεία με εξίσωση $y = -\frac{\pi}{2}$ και προς τα δεξιά ανεβαίνει προσεγγίζοντας την οριζόντια ευθεία με εξίσωση $y = \frac{\pi}{2}$ και περιέχει, ενδεικτικά, το σημείο $(0, 0)$. Το γράφημα αυτό είναι το συμμετρικό του μέρους του γραφήματος της $y = \tan x$ (παρατηρήστε το σχήμα 2.23) το οποίο αντιστοιχεί στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Έχουμε και τη σχέση αντιστροφής:

$$y = \arctan x \Leftrightarrow \tan y = x \quad \text{για } x \in (-\infty, +\infty), y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

(iv) Παρατηρήστε το δεξιό από τα σχήματα 2.25. Η $y = \operatorname{arccot} x$ έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $(0, \pi)$. Είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, +\infty)$ και το γράφημά της είναι καμπύλη η οποία προς τα αριστερά ανεβαίνει προσεγγίζοντας την οριζόντια ευθεία με εξίσωση $y = \pi$ και προς τα δεξιά κατεβαίνει προσεγγίζοντας την οριζόντια ευθεία με εξίσωση $y = 0$, δηλαδή τον x -άξονα, και περιέχει, ενδεικτικά, το σημείο $(0, \frac{\pi}{2})$. Το γράφημα αυτό είναι το συμμετρικό του μέρους του γραφήματος της $y = \cot x$ (παρατηρήστε το σχήμα 2.23) το οποίο αντιστοιχεί στο $(0, \pi)$. Έχουμε και τη σχέση αντιστροφής:

$$y = \operatorname{arccot} x \Leftrightarrow \cot y = x \quad \text{για } x \in (-\infty, +\infty), y \in (0, \pi).$$



Σχήμα 2.25

Παράδειγμα 2.19. $\arccos 1 = 0$, $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, $\arccos(-1) = \pi$.

$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, $\arcsin 0 = 0$, $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

$\arctan 0 = 0$, $\operatorname{arccot} 0 = \frac{\pi}{2}$.

Ασκήσεις

2.27. Βρείτε τα $\arccos$ και $\arcsin$ των $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, ± 1 .

2.28. (i) Αποδείξτε ότι $\arccos y + \arcsin y = \frac{\pi}{2}$ για κάθε $y \in [-1, 1]$.

(ii) Αποδείξτε ότι $\arctan y + \operatorname{arccot} y = \frac{\pi}{2}$ για κάθε y .

2.29. Σχεδιάστε τα γραφήματα των $2 \arccos(2x + 1)$, $\arctan \frac{x+1}{2}$.

2.30. Βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της $\arcsin \frac{x}{x-1}$.

2.31. Ποιες είναι οι αντίστροφες συναρτήσεις των $x = \arcsin y$ και $x = \arctan y$; Ποια είναι τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών αυτών των αντίστροφων συναρτήσεων;

Υπόδειξη: Δεν είναι οι $y = \sin x$ και $y = \tan x$.

2.32. (i) Αποδείξτε ότι $y = \cos(\arccos y)$ και $y = \sin(\arcsin y)$ για κάθε $y \in [-1, 1]$.

Επίσης, αποδείξτε ότι $y = \tan(\arctan y)$, $y = \cot(\operatorname{arccot} y)$ για κάθε y .

(ii) Αποδείξτε ότι $\arccos(\cos x) = x$ για κάθε $x \in [0, \pi]$.

Γενικότερα, έστω $x \in [k\pi, (k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$. Αποδείξτε ότι $\arccos(\cos x) = x - k\pi$, αν το k είναι άρτιο, και ότι $\arccos(\cos x) = (k+1)\pi - x$, αν το k είναι περιττό.

Τι ανάλογο ισχύει για καθεμία από τις παραστάσεις $\arcsin(\sin x)$, $\arctan(\tan x)$, $\operatorname{arccot}(\cot x)$;

Σχεδιάστε τα γραφήματα των $\arccos(\cos x)$, $\arcsin(\sin x)$, $\arctan(\tan x)$, $\operatorname{arccot}(\cot x)$.

2.10 Βιβλιογραφία

Βασική βιβλιογραφία

Anton, H. (1984). *Calculus with Analytic Geometry*. Wiley.

Apostol, T. (1967). *Calculus, Vol I*. Wiley.

Courant, R. (1988). *Differential and Integral Calculus, Vol I*. Wiley.

Courant, R., John, F. (1989). *Introduction to Calculus and Analysis, Vol I*. Springer.

Hardy, G. (2008). *A Course of Pure Mathematics*. Cambridge Univ. Press.

Smirnov, V. I. (1964). *A Course of Higher Mathematics, Vol I*. Pergamon Press.

Spiegel, M. (1963). *Schaum's Outline of Advanced Calculus*. McGraw Hill.

Spivak, M. (1994). *Calculus*. Cambridge Univ. Press.

Thomas, G. (2018). *Calculus*. Pearson.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΚΑΙ ΟΡΙΑ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

3.1 Σύνοψη

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετάμε την έννοια της ακολουθίας αριθμών. Ειδικές κατηγορίες ακολουθιών: οι φραγμένες και οι μονότονες. Κατόπιν ορίζουμε την έννοια του ορίου ακολουθίας, είτε αυτό είναι αριθμός είτε είναι άπειρο, με αυστηρό τρόπο: με το ϵ (ή το M) και το n_0 . Εξετάζουμε αρκετά παραδείγματα υπολογισμού του n_0 από το ϵ (ή το M). Κατόπιν μελετάμε τις βασικές ιδιότητες των ορίων ακολουθιών σε σχέση με υπακολουθίες, με αλγεβρικές πράξεις και με ανισότητες. Επίσης, αποδεικνύουμε κάποια βασικά και χρήσιμα, αλλά όχι τόσο απλά, όρια. Τέλος, αναφέρουμε το βασικό θεώρημα ότι κάθε μονότονη ακολουθία έχει όριο και βάσει αυτού του θεωρήματος και μίας συγκεκριμένης ακολουθίας ορίζουμε τον σημαντικό αριθμό e .

Προαπαιτούμενη γνώση: Μαθηματικά του Λυκείου, καθώς και τα προηγούμενα κεφάλαια.

3.2 Ορισμοί

Ορισμός 3.1. Ονομάζουμε **ακολουθία** (πραγματικών αριθμών) οποιαδήποτε άπειρη επιλογή αριθμών με συγκεκριμένη σειρά επιλογής: πρώτος αριθμός, δεύτερος αριθμός, τρίτος αριθμός κ.τ.λ. Οι επιλεγμένοι αριθμοί ονομάζονται **όροι** της ακολουθίας και συμβολίζονται με ένα γράμμα κοινό για όλους και με έναν **δείκτη** ο οποίος δείχνει τη σειρά επιλογής και διατρέχει το σύνολο των φυσικών: πρώτα το 1, μετά το 2, μετά το 3 κ.τ.λ. Για παράδειγμα:

$$x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \dots, \quad y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n, y_{n+1}, \dots, \quad z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n, z_{n+1}, \dots$$

Για τις ακολουθίες χρησιμοποιούμε και τα συνοπτικότερα σύμβολα (x_n) , (y_n) , (z_n) .

Μερικές φορές ο δείκτης αρχίζει από το 0 ή και από άλλον ακέραιο, οπότε μπορεί να συναντήσουμε ακολουθίες: $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ ή $x_4, x_5, x_6, x_7, \dots$ ή $x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, \dots$.

Μπορούμε να φανταστούμε ότι ο δείκτης n εκφράζει *χρονικές στιγμές*, π.χ. δευτερόλεπτα, και ότι σε κάθε χρονική στιγμή επιλέγουμε έναν αριθμό φτιάχνοντας μία ακολουθία αριθμών: ο δεύτερος αριθμός *ακολουθεί* τον πρώτο, ο τρίτος *ακολουθεί* τον δεύτερο και ούτω καθεξής. Ο όρος x_{n+1} είναι ο **επόμενος** του x_n και ο x_{n-1} είναι ο **προηγούμενος** του x_n .

Παράδειγμα 3.1. Η ακολουθία $(\frac{1}{n})$, δηλαδή η $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots$.

Παράδειγμα 3.2. Η ακολουθία (n) , δηλαδή η $1, 2, 3, 4, \dots, n-1, n, n+1, \dots$.

Παράδειγμα 3.3. Η ακολουθία (1) , δηλαδή η $1, 1, 1, \dots, 1, 1, 1, \dots$.

Παράδειγμα 3.4. Η ακολουθία $((-1)^{n-1})$, δηλαδή η $1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1, \dots$.

Παπαδημητράκης, Μ. (2024) «Απειροστικός Λογισμός».

Αθήνα: Κάλλιπος, Ανοιχτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. <http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-1011>

 Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Μη Εμπορική Χρήση - Παρόμοια Διανομή 4.0

Παράδειγμα 3.5. Η ακολουθία $(\frac{1}{10^{n-1}})$, δηλαδή η $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \dots, \frac{1}{10^{n-2}}, \frac{1}{10^{n-1}}, \frac{1}{10^n}, \dots$

Παράδειγμα 3.6. Η ακολουθία με n -οστό όρο ίσο με το πλήθος των θετικών διαιρετών του n , δηλαδή η ακολουθία $1, 2, 2, 3, 2, 4, 2, 4, 3, 4, 2, \dots$

Είναι σημαντικό να καταλάβουμε ότι μία ακολουθία είναι *οποιαδήποτε* επιλογή αριθμών με συγκεκριμένη σειρά. Φανταστείτε μία μηχανή η οποία κάθε δευτερόλεπτο επιλέγει έναν αριθμό με τελείως αυθαίρετο τρόπο: οποιοσδήποτε αριθμός μπορεί να είναι η πρώτη επιλογή, οποιοσδήποτε αριθμός μπορεί να είναι η δεύτερη επιλογή και ούτω καθεξής. Πάντως, τα παραδείγματα τα οποία έχουν ενδιαφέρον παρουσιάζουν, συνήθως, κάποια κανονικότητα: υπάρχει κάποια συγκεκριμένη διαδικασία, συνήθως κάποιος μαθηματικός τύπος, με την οποία υπολογίζεται ο n -οστός όρος μίας τέτοιας ακολουθίας. Όλα τα παραπάνω παραδείγματα είναι τέτοιου είδους.

Μία ακολουθία είναι διαδοχική επιλογή αριθμών και δεν είναι το σύνολο με στοιχεία αυτούς τους αριθμούς. Στο παράδειγμα 3.3 το σύνολο με στοιχεία τους όρους της ακολουθίας είναι το μονοσύνολο $\{1\}$. Η ακολουθία, όμως, δεν είναι το μονοσύνολο αυτό: είναι η διαδοχική επιλογή $1, 1, 1, \dots$. Με άλλα λόγια, οι όροι μίας ακολουθίας είναι πάντοτε άπειροι, ενώ το σύνολο με στοιχεία τους όρους της ακολουθίας είναι άλλοτε άπειρο, όπως στα παραδείγματα 3.1, 3.2, 3.5, 3.6, και άλλοτε πεπερασμένο, όπως στα παραδείγματα 3.3, 3.4.

Κάθε όρος μίας ακολουθίας ακολουθεί τον προηγούμενό του *σε σειρά επιλογής*, π.χ. χρονική, σύμφωνα με το μοντέλο των χρονικών στιγμών, αλλά *όχι πάντοτε σύμφωνα με τη συνήθη διάταξη των αριθμών στην πραγματική ευθεία*.

Ορισμός 3.2. Λέμε ότι η (x_n) είναι **αύξουσα**, αν ισχύει $x_{n+1} \geq x_n$ για κάθε n , και **γνησίως αύξουσα**, αν ισχύει $x_{n+1} > x_n$ για κάθε n .

Λέμε ότι η (x_n) είναι **φθίνουσα**, αν ισχύει $x_{n+1} \leq x_n$ για κάθε n , και **γνησίως φθίνουσα**, αν ισχύει $x_{n+1} < x_n$ για κάθε n .

Λέμε ότι η (x_n) είναι **μονότονη**, αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα, και **γνησίως μονότονη**, αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

Έτσι, η (x_n) είναι αύξουσα, αν τα σημεία x_n μετακινούνται προς τα δεξιά όταν αυξάνεται ο «χρόνος» n . Επίσης, η (x_n) είναι φθίνουσα, αν τα σημεία x_n μετακινούνται προς τα αριστερά όταν αυξάνεται ο «χρόνος» n .

Οι ακολουθίες των παραδειγμάτων 3.1, 3.5 είναι γνησίως φθίνουσες, η ακολουθία του παραδείγματος 3.2 είναι γνησίως αύξουσα και οι ακολουθίες των παραδειγμάτων 3.4, 3.6 δεν είναι ούτε αύξουσες ούτε φθίνουσες.

Λέμε ότι η (x_n) είναι **σταθερή**, αν όλοι οι όροι της είναι ίσοι με τον ίδιο αριθμό, δηλαδή αν υπάρχει αριθμός c ώστε να ισχύει $x_n = c$ για κάθε n . Είναι προφανές ότι μία σταθερή ακολουθία είναι αύξουσα και φθίνουσα. Τέτοια είναι η ακολουθία του παραδείγματος 3.3.

Ορισμός 3.3. Λέμε ότι η (x_n) είναι **άνω φραγμένη**, αν υπάρχει **άνω φράγμα** της, δηλαδή κάποιο u ώστε να ισχύει $x_n \leq u$ για κάθε n .

Λέμε ότι η (x_n) είναι **κάτω φραγμένη**, αν υπάρχει **κάτω φράγμα** της, δηλαδή κάποιο l ώστε να ισχύει $l \leq x_n$ για κάθε n .

Λέμε ότι η (x_n) είναι **φραγμένη**, αν είναι άνω φραγμένη και κάτω φραγμένη, δηλαδή αν υπάρχουν l, u ώστε να ισχύει $l \leq x_n \leq u$ για κάθε n .

Με άλλα λόγια, η (x_n) είναι άνω φραγμένη, αν όλα τα σημεία x_n είναι αριστερά κάποιου σημείου u , δηλαδή ανήκουν σε μία ημιευθεία $(-\infty, u]$. Επίσης, η (x_n) είναι κάτω φραγμένη, αν όλα τα σημεία x_n είναι δεξιά κάποιου σημείου l , δηλαδή ανήκουν σε μία ημιευθεία $[l, +\infty)$. Τέλος, η (x_n) είναι φραγμένη, αν όλα τα σημεία x_n είναι ανάμεσα σε δύο σημεία l και u , δηλαδή ανήκουν σε ένα φραγμένο διάστημα $[l, u]$. Αν το u είναι άνω φράγμα της ακολουθίας (x_n) , τότε κάθε $u' > u$ είναι και αυτό άνω φράγμα της (x_n) . Ομοίως, αν το l είναι κάτω φράγμα της (x_n) , τότε κάθε $l' < l$ είναι, επίσης, κάτω φράγμα της (x_n) .

Παράδειγμα 3.7. Κάθε σταθερή ακολουθία (c) είναι, προφανώς, φραγμένη.

Παράδειγμα 3.8. Η $(\frac{1}{n})$ είναι φραγμένη, αφού όλοι οι όροι της ανήκουν στο $[0, 1]$.

Παράδειγμα 3.9. $(\frac{(-1)^{n-1}}{n})$ είναι φραγμένη, διότι όλοι οι όροι της ανήκουν στο $[-\frac{1}{2}, 1]$.

Παράδειγμα 3.10. Η $(\frac{n-1}{n})$ είναι φραγμένη, διότι όλοι οι όροι της ανήκουν στο $[0, 1]$.

Παράδειγμα 3.11. Η $((-1)^{n-1})$ είναι φραγμένη, αφού όλοι οι όροι της ανήκουν στο $[-1, 1]$.

Παράδειγμα 3.12. Η $(\frac{(1+(-1)^{n-1})n}{2})$, δηλαδή η $1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, 0, \dots$, είναι κάτω φραγμένη, αλλά όχι άνω φραγμένη. Ο αριθμός 0 είναι κάτω φράγμα της ακολουθίας. Ας υποθέσουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι υπάρχει κάποιο άνω φράγμα u της ακολουθίας αυτής. Αυτό θα σήμαινε ότι κάθε περιττός φυσικός είναι $\leq u$. Από αυτό θα συνεπαγόταν ότι και κάθε άρτιος φυσικός είναι $\leq u$, αφού κάθε άρτιος είναι μικρότερος του αμέσως επόμενου περιττού. Άρα όλοι οι φυσικοί θα ήταν $\leq u$, πράγμα το οποίο αντιφάσκει με το ότι το σύνολο $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο. Με την ίδια λογική, η ακολουθία $-1, 0, -3, 0, -5, 0, -7, 0, \dots$, δηλαδή η αντίθετη της προηγούμενης, είναι άνω φραγμένη, αλλά όχι κάτω φραγμένη.

Παράδειγμα 3.13. Η $((-1)^{n-1}n)$, δηλαδή η ακολουθία $1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots$, δεν είναι ούτε άνω φραγμένη ούτε κάτω φραγμένη.

Έστω ότι η (x_n) είναι φραγμένη, δηλαδή όλα τα x_n ανήκουν σε ένα φραγμένο διάστημα $[l, u]$. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι τότε όλα τα x_n ανήκουν και σε κάποιο διάστημα συμμετρικό ως προς το σημείο 0. Χρειάζεται μόνο να βρούμε κάποιο διάστημα $[-M, M]$ αρκετά μεγάλο ώστε να περιέχει το $[l, u]$, δηλαδή ώστε να είναι $-M \leq l$ και $u \leq M$ ή, ισοδύναμα, $M \geq u$ και $M \geq -l$ ή, ισοδύναμα, $M \geq \max\{u, -l\}$. Άρα μπορούμε να πούμε ότι:

Αν η (x_n) είναι φραγμένη, τότε υπάρχει κάποιο M ώστε να ισχύει $|x_n| \leq M$ για κάθε n .

Φυσικά, ισχύει και το αντίστροφο. Πράγματι, αν ισχύει $|x_n| \leq M$ για κάθε n , τότε ισχύει $-M \leq x_n \leq M$ για κάθε n , οπότε τα $-M, M$ είναι κάτω φράγμα και άνω φράγμα της (x_n) .

Ασκήσεις

3.1. Βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολουθιών με n -οστούς όρους $\frac{\sqrt{n}}{n+1}$, $\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$, $(\frac{x^n+1}{x^n-1})^n$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}$, $\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{(2n)!}$, $\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}$.

3.2. (i) Βρείτε τα σύνολα των όρων των ακολουθιών με n -οστούς όρους n , $(-1)^{n-1}$, $(-1)^{n-1}n$, $\frac{1+(-1)^{n-1}}{2}$, $\frac{1+(-1)^{n-1}}{2}n$, $\frac{a+b}{2} + (-1)^{n-1} \frac{a-b}{2}$.

(ii) Βρείτε τα σύνολα των όρων των ακολουθιών $(n - 2[\frac{n}{2}])$, $(n - 3[\frac{n}{3}])$ και $(n - 4[\frac{n}{4}])$. Γενικότερα, αν $m \in \mathbb{N}$, βρείτε το σύνολο των όρων της ακολουθίας με n -οστό όρο $n - m[\frac{n}{m}]$.

3.3. (i) Αν η (x_n) είναι αύξουσα και φθίνουσα, αποδείξτε ότι είναι σταθερή.

(ii) Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι αύξουσα ή φθίνουσα, αν και μόνο αν η $(-x_n)$ είναι φθίνουσα ή αύξουσα, αντιστοίχως.

3.4. (i) Αποδείξτε ότι κάθε αύξουσα ακολουθία είναι κάτω φραγμένη και ότι κάθε φθίνουσα ακολουθία είναι άνω φραγμένη.

(ii) Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι άνω φραγμένη ή κάτω φραγμένη, αν και μόνο αν η $(-x_n)$ είναι κάτω φραγμένη ή άνω φραγμένη, αντιστοίχως.

3.5. Θεωρήστε τις ακολουθίες με n -οστούς όρους $(-1)^n n$, $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, 2^n , $\frac{1}{2^n}$, $\frac{n^{30}}{2^n}$, $\frac{8n-1}{n^2+1}$, $(\frac{n+2}{16})$, $\frac{8^n}{n!}$, $2[\frac{n}{2}]$, $n - 3[\frac{n}{3}]$. Ποιες από αυτές είναι μονότονες; Γνησίως μονότονες; Παρατηρήστε ότι μερικές από τις ακολουθίες αυτές, ενώ δεν είναι μονότονες, έχουν την ιδιότητα να είναι μονότονες από κάποια τιμή του δείκτη και πέρα: προσδιορίστε τις. Ποιες από τις ακολουθίες είναι άνω φραγμένες; Κάτω φραγμένες; Φραγμένες;

3.6. Γραμμικοί αναδρομικοί τύποι. Έστω αριθμοί a, b, p, q , όπου τα p, q δεν είναι και τα δύο 0. Θεωρούμε ακολουθία (x_n) η οποία ορίζεται από τους δύο πρώτους όρους της και από αναδρομικό τύπο ως εξής:

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n \quad \text{για κάθε } n \geq 1.$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας τον αναδρομικό τύπο, από τα x_1, x_2 , τα οποία θεωρούνται γνωστά, υπολογίζεται το x_3 , κατόπιν από τα x_2, x_3 υπολογίζεται το x_4 , κατόπιν από τα x_3, x_4 υπολογίζεται το x_5 κ.τ.λ. Επομένως, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι από τους δύο πρώτους όρους και από τον αναδρομικό τύπο προσδιορίζεται ολόκληρη η ακολουθία.

Θα περιγράψουμε γενική μέθοδο υπολογισμού του n -οστού όρου x_n με συγκεκριμένο τύπο ο οποίος δεν χρησιμοποιεί τους προηγούμενους όρους, δηλαδή δεν είναι αναδρομικός.

Περίπτωση 1: $p \neq 0, q = 0$. Αποδείξτε με επαγωγή ότι $x_n = bp^{n-2}$ για κάθε $n \geq 2$.

Περίπτωση 2: $p = 0, q \neq 0$. Αποδείξτε ότι $x_n = aq^{\frac{n-1}{2}}$, αν το n είναι περιττό, και $x_n = bq^{\frac{n-2}{2}}$, αν το n είναι άρτιο.

Περίπτωση 3: $p \neq 0, q \neq 0$. Θεωρήστε την πολωνυμική εξίσωση $x^2 = px + q$.

(i) Αν $\Delta = p^2 + 4q > 0$, τότε η εξίσωση έχει δύο διαφορετικές λύσεις, τις $\rho_1 = \frac{p+\sqrt{\Delta}}{2}$ και $\rho_2 = \frac{p-\sqrt{\Delta}}{2}$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν μοναδικά κ, λ ώστε $\kappa + \lambda = a$ και $\kappa\rho_1 + \lambda\rho_2 = b$ και βρείτε τα, λύνοντας αυτό το γραμμικό σύστημα των δύο εξισώσεων. Αποδείξτε ότι για κάθε $n \geq 1$ ισχύει

$$x_n = \kappa\rho_1^{n-1} + \lambda\rho_2^{n-1}.$$

(ii) Αν $\Delta = p^2 + 4q = 0$, τότε η εξίσωση έχει μία λύση, τη $\rho = \frac{p}{2}$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν μοναδικά κ, λ ώστε $\kappa = a$ και $\kappa\rho + \lambda\rho = b$ και βρείτε τα. Αποδείξτε ότι για κάθε $n \geq 1$ ισχύει

$$x_n = \kappa\rho^{n-1} + \lambda(n-1)\rho^{n-1}.$$

(iii) Αν $\Delta = p^2 + 4q < 0$, οπότε $q < 0$, τότε η εξίσωση έχει δύο διαφορετικές συζυγείς μιγαδικές λύσεις, τις $\rho_1 = \frac{p+i\sqrt{-\Delta}}{2}$ και $\rho_2 = \frac{p-i\sqrt{-\Delta}}{2}$. Πάρτε $\rho = \sqrt{-q} > 0$ και παρατηρήστε ότι $(\frac{\rho}{2\rho})^2 + (\frac{\sqrt{-\Delta}}{2\rho})^2 = 1$, οπότε υπάρχει μοναδικό θ στο διάστημα $[0, 2\pi)$ ώστε $\cos \theta = \frac{\rho}{2\rho}$ και $\sin \theta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2\rho}$. Συνεπώς $\rho_1 = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ και $\rho_2 = \rho(\cos \theta - i \sin \theta)$. Αποδείξτε ότι $\rho^2 \cos(2\theta) = p\rho \cos \theta + q$ και $\rho^2 \sin(2\theta) = p\rho \sin \theta$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν μοναδικά κ, λ ώστε $\kappa = a$ και $\kappa\rho \cos \theta + \lambda\rho \sin \theta = b$ και βρείτε τα. Τέλος, αποδείξτε ότι για κάθε $n \geq 1$ ισχύει

$$x_n = \kappa\rho^{n-1} \cos((n-1)\theta) + \lambda\rho^{n-1} \sin((n-1)\theta).$$

Εφαρμόστε τα προηγούμενα για να υπολογίσετε τον n -οστό όρο καθεμίας από τις τέσσερις ακολουθίες οι οποίες ορίζονται από τους, κοινούς και για τις τέσσερις ακολουθίες, όρους $x_1 = x_2 = 1$ και από τους αντίστοιχους αναδρομικούς τύπους $x_{n+2} = 3x_n$, $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $x_{n+2} = 4x_{n+1} - 4x_n$, $x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$. Η ακολουθία η οποία ορίζεται από τον δεύτερο αναδρομικό τύπο ονομάζεται **ακολουθία Fibonacci** και οι επτά αρχικοί όροι της είναι οι 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13.

3.7. Βρείτε ποιους αρχικούς όρους πρέπει να γνωρίζουμε και με τι περιορισμούς γι' αυτούς, για να ορίσουμε με μοναδικό τρόπο ακολουθία (x_n) με καθέναν από τους αναδρομικούς τύπους $x_{n+1} = x_1 + \dots + x_n$, $x_{n+3} = \frac{x_n x_{n+2}}{x_{n+1}}$, $x_{n+1} = 1 - \frac{1}{x_n}$, $x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$.

3.3 Όριο ακολουθίας

Παράδειγμα 3.14. Οι αρχικοί όροι της ακολουθίας $(\frac{1}{n})$ είναι οι $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots$ και είναι σαφές ότι, όταν αυξάνεται ο δείκτης n , τότε ο αντίστοιχος όρος $\frac{1}{n}$ της ακολουθίας μειώνεται και προσεγγίζει το 0.

Παράδειγμα 3.15. Οι αρχικοί όροι της ακολουθίας $(\frac{n-1}{n})$ είναι οι $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \dots$ και, όταν αυξάνεται το n , τότε ο αντίστοιχος όρος $\frac{n-1}{n}$ αυξάνεται και προσεγγίζει το 1.

Σε αυτά τα δύο παραδείγματα, αλλά και γενικότερα, όταν λέμε ότι ο όρος x_n μιας ακολουθίας προσεγγίζει το x , εννοούμε ότι η απόσταση $|x_n - x|$ ανάμεσα στο x_n και στο x γίνεται μικρότερη από κάθε θετικό αριθμό. Άρα η κοινή ιδιότητα των δύο ακολουθιών επαναδιατυπώνεται ως εξής:

Όταν το n αυξάνεται, τότε το $|x_n - x|$ γίνεται μικρότερο από κάθε θετικό αριθμό.

Παράδειγμα 3.16. Ας δούμε ξανά το παράδειγμα 3.14 με την ακολουθία $(\frac{1}{n})$. Η απόσταση του $\frac{1}{n}$ από το 0 είναι ίση με $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n}$ και, όπως έχουμε ήδη πει, γίνεται μικρότερη από κάθε θετικό αριθμό όταν το n αυξάνεται. Τι ακριβώς σημαίνει αυτό;

Ας πάρουμε έναν οποιονδήποτε μικρό θετικό αριθμό, για παράδειγμα το 0.000132. Πότε θα γίνει η απόσταση $\frac{1}{n}$ μικρότερη από το 0.000132; Δηλαδή, πότε θα γίνει $\frac{1}{n} < 0.000132$ ή, ισοδύναμα, πότε θα γίνει $n > \frac{1000000}{132}$; Ποιοι φυσικοί αριθμοί n είναι $> \frac{1000000}{132}$; Παρατηρούμε ότι ο φυσικός 7576 είναι $> \frac{1000000}{132}$, ενώ ο φυσικός 7575 είναι $\leq \frac{1000000}{132}$. Άρα, αν ο δείκτης n γίνει ≥ 7576 , τότε η απόσταση $\frac{1}{n}$ θα γίνει < 0.000132 . Ας πάρουμε τώρα, ως δεύτερο παράδειγμα, τον μικρό θετικό αριθμό 0.000000000132. Με τους ίδιους συλλογισμούς βλέπουμε ότι, αν ο δείκτης n γίνει ≥ 75757575758 , τότε η απόσταση $\frac{1}{n}$ θα γίνει < 0.000000000132 .

Αυτήν τη διαδικασία μπορούμε να την επαναλάβουμε πολλές φορές: κάθε φορά επιλέγουμε έναν πολύ μικρό θετικό αριθμό, όπως τα 0.000132 και 0.000000000132, και μετά βρίσκουμε έναν αντίστοιχο φυσικό αριθμό, όπως τα 7576 και 75757575758, έτσι ώστε, αν το n , αυξανόμενο, ξεπεράσει αυτόν τον φυσικό αριθμό, τότε το $\frac{1}{n}$ θα γίνει μικρότερο από τον μικρό θετικό αριθμό τον οποίο επιλέξαμε αρχικά.

Βέβαια, εμείς θέλουμε να ελέγξουμε αν το $\frac{1}{n}$ γίνεται μικρότερο από κάθε θετικό αριθμό. Όμως, οι θετικοί αριθμοί είναι άπειροι και δεν θα τελειώσουμε ποτέ, όσες φορές και αν επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία. Γι' αυτό πρέπει να θεωρήσουμε όχι συγκεκριμένους θετικούς αριθμούς, αλλά τον γενικό θετικό αριθμό με ένα γενικό σύμβολο, το σύμβολο ϵ , για παράδειγμα, και να δούμε αν και πότε η απόσταση $\frac{1}{n}$ θα γίνει μικρότερη από το ϵ . Όμως, για το αν θα γίνει $\frac{1}{n} < \epsilon$ αποφαινεται θετικά η Αρχιμήδεια Ιδιότητα, την οποία είδαμε στην ενότητα 1.6: όποιο και αν είναι το $\epsilon > 0$, υπάρχει κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ώστε να είναι $\frac{1}{n} < \epsilon$. Και μάλιστα, αν αυτό ισχύει για κάποιον φυσικό n , τότε ισχύει και για όλους τους μεγαλύτερους φυσικούς. Τώρα, για το πότε θα γίνει $\frac{1}{n} < \epsilon$, δηλαδή για ποιους φυσικούς n ισχύει αυτή η ανισότητα, επαναλαμβάνουμε, απλώς, τα προηγούμενα: γράφουμε την $\frac{1}{n} < \epsilon$ ως $n > \frac{1}{\epsilon}$, δηλαδή λύνουμε ως προς n , και προσπαθούμε να βρούμε κάποιον φυσικό n_0 , ενδεχομένως αλλά όχι απαραίτητα τον μικρότερο δυνατόν, ο οποίος ικανοποιεί αυτήν την ανισότητα.

Σκεφτόμαστε, λοιπόν, ότι:

Αν $a \geq 0$, τότε ο πιο μικρός φυσικός ο οποίος είναι $> a$ είναι το $n_0 = [a] + 1$.

Αν $a < 0$, τότε ο πιο μικρός φυσικός ο οποίος είναι $> a$ είναι το $n_0 = 1$.

Για παράδειγμα: επειδή $8 < \frac{25}{3} < 9$, ο πιο μικρός φυσικός ο οποίος είναι $> \frac{25}{3}$ είναι το $9 = [\frac{25}{3}] + 1$. Ο πιο μικρός φυσικός ο οποίος είναι > 8 είναι, και πάλι, το $9 = 8 + 1 = [8] + 1$. Ο πιο μικρός φυσικός ο οποίος είναι > -4 είναι το 1.

Τώρα, επειδή $\frac{1}{\epsilon} > 0$, το n_0 το οποίο ψάχνουμε είναι το $n_0 = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$. Εργαζόμενοι με το γενικό θετικό ϵ , εκτός από το ότι αυτό είναι το σωστό, έχουμε καταφέρει να βρούμε και έναν γενικό τύπο για το n_0 συναρτήσει του ϵ , οπότε για κάθε συγκεκριμένο ϵ μπορούμε να υπολογίσουμε αμέσως το αντίστοιχο κατάλληλο n_0 .

Όσα είπαμε για την ακολουθία $(\frac{1}{n})$ επαναλαμβάνονται απaráλλακτα για την ακολουθία $(\frac{n-1}{n})$ του παραδείγματος 3.15, αφού η απόσταση του $\frac{n-1}{n}$ από το 1 είναι και αυτή ίση με $|\frac{n-1}{n} - 1| = \frac{1}{n}$.

Επαναδιατυπώνουμε με ποσοτικούς όρους την κοινή ιδιότητα των δύο ακολουθιών ως εξής:

Το $|x_n - x|$ θα γίνει μικρότερο από κάθε θετικό αριθμό ϵ όταν το n γίνει αρκετά μεγάλο, δηλαδή μεγαλύτερο ή ίσο κάποιου κατάλληλου φυσικού αριθμού n_0 .

Ορισμός 3.4. Λέμε ότι η (x_n) **συγκλίνει** στο x ή **τείνει** στο x ή ότι το x είναι το **όριο** της (x_n) , αν η απόσταση $|x_n - x|$ θα γίνει μικρότερη από το οποιοδήποτε $\epsilon > 0$, όταν το n γίνει μεγαλύτερο ή ίσο κάποιου κατάλληλου φυσικού n_0 ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε από $n \geq n_0$ να συνεπάγεται $|x_n - x| < \epsilon$. Με σύμβολα:

$$n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \epsilon \quad \text{ή, ισοδύναμα,} \quad x - \epsilon < x_n < x + \epsilon.$$

Το ότι η (x_n) συγκλίνει στο x το συμβολίζουμε

$$x_n \rightarrow x \quad \text{ή} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x.$$

Αν μία ακολουθία (x_n) δεν συγκλίνει σε κανέναν αριθμό, τότε λέμε ότι η (x_n) **αποκλίνει**.

Παράδειγμα 3.17. Σύμφωνα με τα παραδείγματα 3.14 και 3.15:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{n} = 1.$$

Παράδειγμα 3.18. Έστω η ακολουθία $(\frac{(-1)^{n-1}}{n})$, δηλαδή η $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots$. Η απόσταση του n -οστού όρου από το 0 είναι $|\frac{(-1)^{n-1}}{n} - 0| = \frac{1}{n}$, οπότε, και πάλι, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|\frac{(-1)^{n-1}}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 0.$$

Παράδειγμα 3.19. Θεωρούμε τη σταθερή ακολουθία (c) , δηλαδή την $c, c, c, c, \dots$. Τότε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c = c.$$

Πράγματι, οι αποστάσεις όλων των όρων της ακολουθίας από το c είναι $|c - c| = 0$. Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ μπορούμε να επιλέξουμε το $n_0 = 1$ και τότε ισχύει $|c - c| = 0 < \epsilon$ για κάθε $n \geq 1$. Με σύμβολα:

$$n \geq 1 \Rightarrow |c - c| < \epsilon.$$

Για να αποδείξουμε ένα όριο $x_n \rightarrow x$, χρησιμοποιώντας τον ορισμό, θα ακολουθούμε την εξής διαδικασία. Θα παίρνουμε $\epsilon > 0$ και θα προσπαθούμε να βρούμε κάποιον αριθμό a ώστε η ανισότητα $|x_n - x| < \epsilon$ να συνεπάγεται από την ανισότητα $n > a$. Όταν φτάνουμε στην ανισότητα $n > a$, τότε θα θεωρούμε τον φυσικό αριθμό $n_0 = [a] + 1$, αν $a \geq 0$, και τον $n_0 = 1$, αν $a < 0$. Τότε θα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $n > a$, οπότε ισχύει $|x_n - x| < \epsilon$. Με σύμβολα:

$$n \geq n_0 \Rightarrow n > a \Rightarrow |x_n - x| < \epsilon.$$

Παράδειγμα 3.20. Ας δούμε μία γενίκευση της ακολουθίας $(\frac{1}{n})$. Θεωρούμε οποιοδήποτε $a > 0$ και την ακολουθία $(\frac{1}{n^a})$, δηλαδή την $1, \frac{1}{2^a}, \frac{1}{3^a}, \frac{1}{4^a}, \dots$. Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^a} = 0 \quad \text{αν } a > 0.$$

Ειδικές περιπτώσεις: $\frac{1}{n^2} \rightarrow 0, \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0, \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \rightarrow 0$.

Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ και θα βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|\frac{1}{n^a} - 0| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$ ή, ισοδύναμα, από $n \geq n_0$ να συνεπάγεται $|\frac{1}{n^a} - 0| < \epsilon$.

Σκεφτόμαστε ότι η $|\frac{1}{n^a} - 0| < \epsilon$ συνεπάγεται από την $\frac{1}{n^a} < \epsilon$ και αυτή συνεπάγεται από την $n^a > \frac{1}{\epsilon}$ και αυτή συνεπάγεται από την $n > (\frac{1}{\epsilon})^{\frac{1}{a}}$. Τώρα, επειδή $(\frac{1}{\epsilon})^{\frac{1}{a}} > 0$, θεωρούμε το $n_0 = [(\frac{1}{\epsilon})^{\frac{1}{a}}] + 1$ και τότε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $n > (\frac{1}{\epsilon})^{\frac{1}{a}}$, οπότε ισχύει $|\frac{1}{n^a} - 0| < \epsilon$. Με σύμβολα:

$$n \geq n_0 = [(\frac{1}{\epsilon})^{\frac{1}{a}}] + 1 \Rightarrow n > (\frac{1}{\epsilon})^{\frac{1}{a}} \Rightarrow |\frac{1}{n^a} - 0| < \epsilon.$$

Παράδειγμα 3.21. Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n+7}{3n+8} = 1$.

Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ και θα βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $\left| \frac{3n+7}{3n+8} - 1 \right| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$ ή, ισοδύναμα, από $n \geq n_0$ να συνεπάγεται $\left| \frac{3n+7}{3n+8} - 1 \right| < \epsilon$.

Τώρα, η $\left| \frac{3n+7}{3n+8} - 1 \right| < \epsilon$ συνεπάγεται από την $\frac{1}{3n+8} < \epsilon$ και αυτή συνεπάγεται από την $n > \frac{1-8\epsilon}{3\epsilon}$. Βλέπουμε ότι ισχύει $\frac{1-8\epsilon}{3\epsilon} \geq 0$, αν $0 < \epsilon \leq \frac{1}{8}$, και $\frac{1-8\epsilon}{3\epsilon} < 0$, αν $\epsilon > \frac{1}{8}$. Άρα θεωρούμε το $n_0 = \left[\frac{1-8\epsilon}{3\epsilon} \right] + 1$, αν $0 < \epsilon \leq \frac{1}{8}$, και το $n_0 = 1$, αν $\epsilon > \frac{1}{8}$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $n > \frac{1-8\epsilon}{3\epsilon}$, οπότε ισχύει $\left| \frac{3n+7}{3n+8} - 1 \right| < \epsilon$. Με σύμβολα:

$$n \geq n_0 = \begin{cases} \left[\frac{1-8\epsilon}{3\epsilon} \right] + 1, & \text{αν } 0 < \epsilon \leq \frac{1}{8}, \\ 1, & \text{αν } \epsilon > \frac{1}{8}, \end{cases} \Rightarrow n > \frac{1-8\epsilon}{3\epsilon} \Rightarrow \left| \frac{3n+7}{3n+8} - 1 \right| < \epsilon.$$

Παράδειγμα 3.22. Έστω η ακολουθία (n^2) με διαδοχικούς όρους 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, ... Είναι φανερό ότι, όταν αυξάνεται ο δείκτης n , τότε ο αντίστοιχος όρος n^2 της ακολουθίας απομακρύνεται προς τα δεξιά στην οριζόντια πραγματική ευθεία.

Στο τελευταίο παράδειγμα έχουμε μία ακολουθία (x_n) με την εξής ιδιότητα: όταν αυξάνεται ο δείκτης n , τότε το x_n απομακρύνεται προς τα δεξιά. Με αυτό εννοούμε ότι:

Όταν το n αυξάνεται, τότε το x_n γίνεται μεγαλύτερο από κάθε θετικό αριθμό.

Για να ελέγξουμε αυτό το τελευταίο για οποιαδήποτε συγκεκριμένη ακολουθία, κάνουμε το εξής. Θεωρούμε τον γενικό θετικό αριθμό, με ένα γενικό σύμβολο, για παράδειγμα το σύμβολο M , και αποδεικνύουμε ότι υπάρχει κάποιος αντίστοιχος κατάλληλος φυσικός αριθμός n_0 ώστε, αν το n γίνει $\geq n_0$, τότε το x_n θα γίνει $> M$. Φυσικά, η τιμή του n_0 εξαρτάται από την τιμή του M . Άρα η ιδιότητα της ακολουθίας του παραδείγματος επαναδιατυπώνεται ως εξής:

Το x_n θα γίνει μεγαλύτερο από κάθε θετικό αριθμό M όταν το n γίνει αρκετά μεγάλο, δηλαδή μεγαλύτερο ή ίσο κάποιου κατάλληλου φυσικού αριθμού n_0 .

Υπάρχει και η «συμμετρική» κατάσταση: όταν το x_n απομακρύνεται προς τα αριστερά ή, ισοδύναμα, όταν το x_n γίνεται μικρότερο από κάθε αρνητικό αριθμό. Όλα αυτά περιγράφονται αναλυτικά στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 3.5. (i) Λέμε ότι η (x_n) αποκλίνει στο $+\infty$ ή τείνει στο $+\infty$ ή ότι το $+\infty$ είναι το όριο της (x_n) , αν το x_n θα γίνει μεγαλύτερο από το οποιοδήποτε $M > 0$, όταν το n γίνει μεγαλύτερο ή ίσο κάποιου κατάλληλου φυσικού n_0 ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε από $n \geq n_0$ να συνεπάγεται $x_n > M$. Με σύμβολα:

$$n \geq n_0 \Rightarrow x_n > M.$$

Το ότι η (x_n) αποκλίνει στο $+\infty$ το συμβολίζουμε

$$x_n \rightarrow +\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty.$$

(ii) Λέμε ότι η (x_n) αποκλίνει στο $-\infty$ ή τείνει στο $-\infty$ ή ότι το $-\infty$ είναι το όριο της (x_n) , αν το x_n θα γίνει μικρότερο από το οποιοδήποτε $-M < 0$, όταν το n γίνει μεγαλύτερο ή ίσο κάποιου κατάλληλου φυσικού n_0 ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε από $n \geq n_0$ να συνεπάγεται $x_n < -M$. Με σύμβολα:

$$n \geq n_0 \Rightarrow x_n < -M.$$

Το ότι η (x_n) αποκλίνει στο $-\infty$ το συμβολίζουμε

$$x_n \rightarrow -\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty.$$

Για να αποδείξουμε ένα όριο $x_n \rightarrow +\infty$ (ή $x_n \rightarrow -\infty$), χρησιμοποιώντας τον ορισμό, ακολουθούμε την εξής διαδικασία. Παίρνουμε $M > 0$ και προσπαθούμε να βρούμε αριθμό a ώστε η ανισότητα $x_n > M$ (ή $x_n < -M$) να συνεπάγεται από την ανισότητα $n > a$. Τότε θεωρούμε τον φυσικό αριθμό $n_0 = [a] + 1$, αν $a \geq 0$, και τον $n_0 = 1$, αν $a < 0$. Τότε συμπεραίνουμε ότι για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $n > a$, οπότε ισχύει $x_n > M$ (ή $x_n < -M$). Με σύμβολα:

$$n \geq n_0 \Rightarrow n > a \Rightarrow x_n > M \text{ (ή } x_n < -M \text{)}.$$

Παράδειγμα 3.23. Γενικεύοντας την ακολουθία του παραδείγματος 3.22, παίρνουμε οποιοδήποτε $a > 0$ και θεωρούμε την ακολουθία (n^a) , δηλαδή την $1, 2^a, 3^a, 4^a, \dots$. Θα δούμε ότι:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^a = +\infty \quad \text{αν } a > 0.$$

Ειδικές περιπτώσεις: $n \sqrt{n} \rightarrow +\infty$, $\sqrt[3]{n} \rightarrow +\infty$.

Παίρνουμε οποιοδήποτε $M > 0$ και θα βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $n^a > M$. Σκεφτόμαστε ότι η $n^a > M$ συνεπάγεται από την $n > M^{\frac{1}{a}}$. Επομένως, αν θεωρήσουμε το $n_0 = [M^{\frac{1}{a}}] + 1$, τότε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $n > M^{\frac{1}{a}}$, οπότε ισχύει $n^a > M$. Με σύμβολα:

$$n \geq n_0 = [M^{\frac{1}{a}}] + 1 \Rightarrow n > M^{\frac{1}{a}} \Rightarrow n^a > M.$$

Παράδειγμα 3.24. Η ανισότητα $-n^a < -M$ είναι ισοδύναμη με την $n^a > M$. Επομένως, από το παράδειγμα 3.23 είναι φανερό ότι για κάθε $M > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $-n^a < -M$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $-n^a \rightarrow -\infty$, αν $a > 0$.

Παράδειγμα 3.25. Παίρνουμε $a > 1$ και θεωρούμε την ακολουθία $(\log_a n)$, δηλαδή την ακολουθία $\log_a 1, \log_a 2, \log_a 3, \log_a 4, \dots$. Θα δούμε ότι:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \log_a n = +\infty \quad \text{αν } a > 1.$$

Παίρνουμε οποιοδήποτε $M > 0$ και παρατηρούμε ότι η $\log_a n > M$ συνεπάγεται από την $n > a^M$. Θεωρώντας το $n_0 = [a^M] + 1$, βλέπουμε ότι για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $n > a^M$, οπότε ισχύει $\log_a n > M$. Με σύμβολα:

$$n \geq n_0 = [a^M] + 1 \Rightarrow n > a^M \Rightarrow \log_a n > M.$$

Παράδειγμα 3.26. Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n+1} = +\infty$.

Έστω οποιοδήποτε $M > 0$. Η $\frac{n^2}{n+1} > M$ συνεπάγεται από την $n^2 - Mn - M > 0$. Η ανισότητα αυτή είναι δεύτερου βαθμού και λύνεται ως προς n . Πράγματι, η $n^2 - Mn - M > 0$ ισοδυναμεί με: $n < \frac{M - \sqrt{M^2 + 4M}}{2}$ ή $n > \frac{M + \sqrt{M^2 + 4M}}{2}$. Επομένως, η $n^2 - Mn - M > 0$ συνεπάγεται από την $n > \frac{M + \sqrt{M^2 + 4M}}{2}$. Βλέπουμε ότι $\frac{M + \sqrt{M^2 + 4M}}{2} \geq 0$, οπότε θεωρούμε το $n_0 = [\frac{M + \sqrt{M^2 + 4M}}{2}] + 1$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $n > \frac{M + \sqrt{M^2 + 4M}}{2}$, οπότε ισχύει $\frac{n^2}{n+1} > M$. Με σύμβολα:

$$n \geq n_0 = [\frac{M + \sqrt{M^2 + 4M}}{2}] + 1 \Rightarrow n > \frac{M + \sqrt{M^2 + 4M}}{2} \Rightarrow \frac{n^2}{n+1} > M.$$

Χρησιμοποιούμε τη λέξη *όριο* και τα σύμβολα $\rightarrow$, $\lim_{n \rightarrow +\infty}$, αν μία ακολουθία έχει όριο, είτε η ακολουθία συγκλίνει σε αριθμό είτε αποκλίνει σε ένα από τα $\pm\infty$. Προσέξτε: χρησιμοποιούμε το ρήμα *συγκλίνει*, μόνο αν το όριο είναι αριθμός, και το ρήμα *αποκλίνει* σε κάθε άλλη περίπτωση, δηλαδή αν το όριο είναι ένα από τα $\pm\infty$ ή αν δεν υπάρχει όριο.

Παράδειγμα 3.27. Θεωρούμε την ακολουθία (a^n) , δηλαδή την $a, a^2, a^3, a^4, \dots$.

Η ακολουθία αυτή είναι γνωστή από το λύκειο και ονομάζεται *γεωμετρική πρόοδος* με λόγο a . Αν $a = 1$, τότε προκύπτει η σταθερή ακολουθία $1, 1, 1, 1, \dots$, η οποία συγκλίνει στο 1. Επίσης, αν $a = 0$, τότε προκύπτει η σταθερή ακολουθία $0, 0, 0, 0, \dots$, η οποία συγκλίνει στο 0.

Ας δούμε μερικές ακόμη ειδικές περιπτώσεις.

Αν $a = \frac{1}{2}$, τότε προκύπτει η γεωμετρική πρόοδος $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \dots$. Αν $a = -\frac{1}{10}$, τότε προκύπτει η $-\frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, -\frac{1}{10^3}, \frac{1}{10^4}, \dots$. Είναι φανερό ότι και οι δύο ακολουθίες συγκλίνουν στο 0.

Αν $a = 2$, τότε προκύπτει η γεωμετρική πρόοδος $2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots$. Αν $a = 10$, τότε προκύπτει η $10, 10^2, 10^3, 10^4, \dots$. Και πάλι, είναι φανερό ότι και οι δύο ακολουθίες αποκλίνουν στο $+\infty$.

Αν $a = -1$, τότε παίρνουμε τη γεωμετρική πρόοδο $-1, 1, -1, 1, \dots, -1, 1, -1, 1, \dots$. Όταν αυξάνεται το n , τότε το $(-1)^n$ «πηδά» από το σημείο -1 στο σημείο 1 και ξανά πίσω στο σημείο -1 και ούτω καθεξής, χωρίς να προσεγγίζει κάποιο συγκεκριμένο σημείο αλλά ούτε και να απομακρύνεται προς το $+\infty$ ή το $-\infty$. Το ίδιο ισχύει και αν $a = -2$, οπότε προκύπτει η γεωμετρική πρόοδος $-2, 2^2, -2^3, 2^4, \dots$. Θα μπορούσε να πει κανείς ότι οι «μισοί» όροι των δύο τελευταίων ακολουθιών είναι ≤ -1 και οι άλλοι «μισοί» είναι ≥ 1 .

Ας δούμε τώρα πιο γενικά τις διαφορές περιπτώσεις.

Αν $0 < |a| < 1$, θα αποδείξουμε ότι η γεωμετρική πρόοδος συγκλίνει στο 0.

Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$. Η $|a^n - 0| < \epsilon$ συνεπάγεται από την $|a|^n < \epsilon$ και αυτή συνεπάγεται από την $n > \log_{|a|} \epsilon$. Τώρα είναι $\log_{|a|} \epsilon \geq 0$, αν $0 < \epsilon \leq 1$, και $\log_{|a|} \epsilon < 0$, αν $\epsilon > 1$. Άρα θεωρούμε το $n_0 = [\log_{|a|} \epsilon] + 1$, αν $0 < \epsilon \leq 1$, και το $n_0 = 1$, αν $\epsilon > 1$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $n > \log_{|a|} \epsilon$, οπότε ισχύει $|a^n - 0| < \epsilon$. Με σύμβολα:

$$n \geq n_0 = \begin{cases} [\log_{|a|} \epsilon] + 1, & \text{αν } 0 < \epsilon \leq 1, \\ 1, & \text{αν } \epsilon > 1, \end{cases} \Rightarrow n > \log_{|a|} \epsilon \Rightarrow |a^n - 0| < \epsilon.$$

Αν $a > 1$, θα αποδείξουμε ότι η γεωμετρική πρόοδος αποκλίνει στο $+\infty$.

Παίρνουμε οποιοδήποτε $M > 0$. Η $a^n > M$ συνεπάγεται από την $n > \log_a M$. Τώρα ισχύει $\log_a M \geq 0$, αν $M \geq 1$, και $\log_a M < 0$, αν $0 < M < 1$. Άρα θεωρούμε το $n_0 = [\log_a M] + 1$, αν $M \geq 1$, και το $n_0 = 1$, αν $0 < M < 1$. Τότε συμπεραίνουμε ότι για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $n > \log_a M$, οπότε ισχύει $a^n > M$. Με σύμβολα:

$$n \geq n_0 = \begin{cases} [\log_a M] + 1, & \text{αν } M \geq 1, \\ 1, & \text{αν } 0 < M < 1, \end{cases} \Rightarrow n > \log_a M \Rightarrow a^n > M.$$

Αν $a \leq -1$, θα αποδείξουμε ότι η γεωμετρική πρόοδος δεν συγκλίνει σε κανέναν αριθμό ούτε αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$.

Ας υποθέσουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι $a^n \rightarrow x$ για κάποιο x . Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|a^n - x| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Με σύμβολα:

$$n \geq n_0 \Rightarrow |a^n - x| < \epsilon.$$

Για τα περιττά $n \geq n_0$ ισχύει $a^n \leq -1$ και από αυτό, σε συνδυασμό με το $|a^n - x| < \epsilon$, συνεπάγεται $x < a^n + \epsilon \leq -1 + \epsilon$. Για τα άρτια $n \geq n_0$ ισχύει $a^n \geq 1$ και από αυτό, σε συνδυασμό πάλι με το $|a^n - x| < \epsilon$, συνεπάγεται $x > a^n - \epsilon \geq 1 - \epsilon$. Συμπεραίνουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $x < -1 + \epsilon$ και $x > 1 - \epsilon$. Με $\epsilon = 1$ συμπεραίνουμε ότι ισχύει $x < 0$ και $x > 0$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

Τώρα, ας υποθέσουμε, για να καταλήξουμε πάλι σε άτοπο, ότι $a^n \rightarrow +\infty$. Τότε για κάθε $M > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $a^n > M$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως, πρέπει να ισχύει $a^n > M$ για κάθε περιττό $n \geq n_0$. Αυτό, όμως, είναι αδύνατον! Με παρόμοιο τρόπο καταλήγουμε σε άτοπο, αν υποθέσουμε ότι $a^n \rightarrow -\infty$.

Συνοψίζουμε τα αποτελέσματα για τη γεωμετρική πρόοδο:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a > 1, \\ 1, & \text{αν } a = 1, \\ 0, & \text{αν } -1 < a < 1, \\ \text{δεν υπάρχει,} & \text{αν } a \leq -1. \end{cases}$$

Ασκήσεις

3.8. Χρησιμοποιώντας αποτελέσματα παραδειγμάτων της ενότητας αυτής, δηλαδή χωρίς να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό με τα ϵ και n_0 , αποδείξτε ότι $n^{-\frac{8}{3}} \rightarrow 0$, $\frac{1}{n\sqrt{n}} \rightarrow 0$, $\frac{3^n}{4^n} \rightarrow 0$, $\frac{(-1)^n 8^n}{3^{2n}} \rightarrow 0$, $\frac{n^2}{\sqrt{n}} \rightarrow +\infty$, $\frac{2^{2n}}{3^n} \rightarrow +\infty$, $(-3)^{2n} \rightarrow +\infty$ αλλά και ότι η ακολουθία $((-3)^{3n})$ δεν έχει όριο.

3.9. Δείτε κάποια προτεινόμενα όρια: $\frac{n-2}{3n+4} \rightarrow \frac{1}{3}$, $\frac{2n}{n+3} \rightarrow 1$, $\frac{n}{n^2+1} \rightarrow 2$.
Μην χρησιμοποιήσετε τον ορισμό με τα ϵ και n_0 .

Ποια από αυτά νομίζετε ότι είναι σωστά; Για να απαντήσετε, βρείτε τον τύπο για την απόσταση του n -οστού όρου από το προτεινόμενο όριο και προσπαθήστε να καταλάβετε, όσο πιο πειστικά γίνεται, αν η απόσταση αυτή γίνεται απερίοριστα μικρή όταν το n αυξάνεται. Προσπαθήστε, επίσης, να αποκτήσετε *αίσθηση* της προσέγγισης των όρων των ακολουθιών αυτών προς τα σωστά όρια, υπολογίζοντας όσο το δυνατόν περισσότερους αρχικούς όρους τους καθώς και υπολογίζοντας όρους τους επιλέγοντας τυχαία σκόρπιους μεγάλους δείκτες n , π.χ. $n = 1000, 10000$ κ.τ.λ.

3.10. Χωρίς να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό με τα M και n_0 , βρείτε με πειστικό τρόπο ποιες από τις ακολουθίες με n -οστούς όρους $n^2 - 18n - 4$, $7n - \frac{1}{30}n^2$, $\frac{n}{30\sqrt{n+1}}$, $\frac{1-n}{1+\sqrt{n}}$, $\frac{n^2+1}{n+100}$ αποκλίνουν στο $+\infty$ ή στο $-\infty$. Για να αποκτήσετε *αίσθηση* του πόσο μεγάλοι, θετικοί ή αρνητικοί, γίνονται οι όροι των ακολουθιών αυτών, μπορείτε να υπολογίσετε αρκετούς αρχικούς όρους τους, καθώς και να υπολογίσετε όρους τους επιλέγοντας τυχαία σκόρπιους πολύ μεγάλους δείκτες n .

3.11. (i) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου, δηλαδή παίρνοντας $\epsilon > 0$ και υπολογίζοντας κατάλληλο $n_0 \in \mathbb{N}$ συναρτήσει του ϵ , όπως στα παραδείγματα, αποδείξτε ότι $\frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$, $(-\frac{1}{3})^n \rightarrow 0$, $\frac{1}{n^2+5} \rightarrow 0$, $\frac{3n-1}{4n+5} \rightarrow \frac{3}{4}$, $\frac{1}{n+2\sqrt{n}} \rightarrow 0$, $\frac{n^2-n+1}{3n^2+2} \rightarrow \frac{1}{3}$, $\frac{2\sqrt{n}+3}{2-3\sqrt{n}} \rightarrow -\frac{2}{3}$.

(ii) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου, δηλαδή παίρνοντας $M > 0$ και υπολογίζοντας το κατάλληλο $n_0 \in \mathbb{N}$ συναρτήσει του M , αποδείξτε ότι $\sqrt[3]{n-1} \rightarrow +\infty$, $3^{2n-5} \rightarrow +\infty$, $\log_2 \frac{n^2}{n+1} \rightarrow +\infty$, $n^2 - n \rightarrow +\infty$, $\frac{n^2-5}{2n+1} \rightarrow +\infty$.

3.12. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα για το όριο της γενικής γεωμετρικής προόδου, αποδείξτε ότι

(i) το $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1-x)^n}{(1+x)^n}$ υπάρχει, αν και μόνο αν $x > -1$.

(ii) το $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{(2x+1)^n}$ υπάρχει, αν και μόνο αν $-2 - \sqrt{2} < x < -2 + \sqrt{2}$ ή $x > -\frac{1}{2}$.

3.13. Αποδείξτε, με τους ορισμούς των ορίων, ότι η ακολουθία $((-1)^{n-1}n)$ δεν έχει κανένα όριο.

3.4 Υπακολουθίες

Ορισμός 3.6. Έστω ακολουθία (x_n) . Επιλέγουμε άπειρες τιμές $n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}, \dots$ του δείκτη n ώστε αυτές να αυξάνονται γνησίως: $n_1 < n_2 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots$.

Μετά επιλέγουμε τους αντίστοιχους όρους της (x_n) , δηλαδή τους

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, x_{n_{k+1}}, \dots$$

Αυτοί οι αριθμοί αποτελούν μία άπειρη επιλογή αριθμών με συγκεκριμένη σειρά: πρώτος ο x_{n_1} , δεύτερος ο x_{n_2} και ούτω καθεξής. Άρα οι αριθμοί αυτοί σχηματίζουν μία νέα ακολουθία, την (x_{n_k}) . Επειδή οι όροι της νέας ακολουθίας είναι κάποιοι από τους όρους της αρχικής, η (x_{n_k}) χαρακτηρίζεται **υπακολουθία** της (x_n) .

Πρέπει να θυμόμαστε ότι ο δείκτης μίας υπακολουθίας (x_{n_k}) είναι το k . Όταν το k μεταβάλλεται διατρέχοντας όλους τους φυσικούς $1, 2, 3, \dots$, τότε το αντίστοιχο n_k μεταβάλλεται, γνησίως αυξανόμενο, διατρέχοντας κάποιους από τους δείκτες της αρχικής ακολουθίας (x_n) .

Παράδειγμα 3.28. Επιλέγοντας $n_k = 2k$ για κάθε k , ορίζεται η **υπακολουθία των άρτιων δεικτών** της (x_n) , δηλαδή η υπακολουθία (x_{2k}) , δηλαδή η $x_2, x_4, x_6, x_8, x_{10}, \dots$

Παράδειγμα 3.29. Επιλέγοντας $n_k = 2k - 1$ για κάθε k , ορίζεται η **υπακολουθία των περιττών δεικτών** της (x_n) , δηλαδή η υπακολουθία (x_{2k-1}) , δηλαδή η $x_1, x_3, x_5, x_7, x_9, \dots$

Παράδειγμα 3.30. Επιλέγοντας $n_k = k$ για κάθε k , παίρνουμε την ίδια την αρχική ακολουθία (x_k) ή $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots$. Άρα μία από τις υπακολουθίες της (x_n) είναι η ίδια η (x_n) .

Παράδειγμα 3.31. Θεωρώντας ένα $m \in \mathbb{N}$ και επιλέγοντας $n_k = m + k$ για κάθε k , παίρνουμε την υπακολουθία (x_{m+k}) , δηλαδή την $x_{m+1}, x_{m+2}, x_{m+3}, x_{m+4}, \dots$. Άρα μία από τις υπακολουθίες της (x_n) είναι η ίδια η (x_n) μετά από τη διαγραφή των αρχικών όρων $x_1, x_2, \dots, x_m$.

Παράδειγμα 3.32. Επιλέγοντας $n_k = 2^{k-1}$ για κάθε k , έχουμε την υπακολουθία $(x_{2^{k-1}})$, δηλαδή την $x_1, x_2, x_4, x_8, x_{16}, x_{32}, \dots$

Πρόταση 3.1. Αν μία ακολουθία έχει όριο, τότε κάθε υπακολουθία της έχει το ίδιο όριο.

Απόδειξη. Θεωρούμε υπακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) .

Έστω $x_n \rightarrow x$. Έστω $\epsilon > 0$. Αν το n είναι αρκετά μεγάλο, τότε ισχύει $|x_n - x| < \epsilon$. Τώρα, αν το k είναι αρκετά μεγάλο, τότε και το n_k είναι αρκετά μεγάλο, οπότε ισχύει $|x_{n_k} - x| < \epsilon$. Άρα $x_{n_k} \rightarrow x$. Έστω $x_n \rightarrow +\infty$. Η λογική είναι ίδια με την προηγούμενη. Έστω $M > 0$. Αν το n είναι αρκετά μεγάλο, τότε ισχύει $x_n > M$. Τώρα, αν το k είναι αρκετά μεγάλο, τότε και το n_k είναι αρκετά μεγάλο, οπότε ισχύει $x_{n_k} > M$. Άρα $x_{n_k} \rightarrow +\infty$.

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι, αν $x_n \rightarrow -\infty$, τότε $x_{n_k} \rightarrow -\infty$. □

Θεωρώντας τρία από τα παραδείγματα υπακολουθιών, έχουμε τις εξής χρήσιμες ειδικές περιπτώσεις:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x \quad \Rightarrow \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{k+m} = x, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{2k} = x, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{2k-1} = x,$$

όπου το x μπορεί να είναι οποιοδήποτε στοιχείο του $\overline{\mathbb{R}}$, δηλαδή αριθμός ή $\pm\infty$.

Η Πρόταση 3.1 εφαρμόζεται, συνήθως, ως εξής:

Αν μία ακολουθία έχει δύο υπακολουθίες με διαφορετικά όρια, τότε η ακολουθία δεν έχει όριο.

Παράδειγμα 3.33. Θα δούμε με δεύτερο τρόπο ότι, αν $a \leq -1$, τότε η ακολουθία (a^n) δεν έχει όριο.

Πράγματι, αν $a = -1$, τότε για την υπακολουθία των περιττών δεικτών ισχύει $(-1)^{2k-1} = -1 \rightarrow -1$ και για την υπακολουθία των άρτιων δεικτών ισχύει $(-1)^{2k} = 1 \rightarrow 1$.

Κατόπιν, έστω $a < -1$. Τότε για την υπακολουθία των περιττών δεικτών ισχύει $a^{2k-1} = -|a|^{2k-1} \rightarrow -\infty$, διότι πρόκειται για την υπακολουθία περιττών δεικτών της $(-|a|^n)$ με $|a| > 1$. Επίσης, για την υπακολουθία των άρτιων δεικτών ισχύει $a^{2k} = |a|^{2k} \rightarrow +\infty$, διότι πρόκειται για την υπακολουθία άρτιων δεικτών της $(|a|^n)$ με $|a| > 1$.

Παράδειγμα 3.34. Η ακολουθία $((-1)^{n-1}n)$ δεν έχει όριο.

Για την υπακολουθία των περιττών δεικτών ισχύει $(-1)^{(2k-1)-1}(2k-1) = 2k-1 \rightarrow +\infty$, διότι πρόκειται για την υπακολουθία περιττών δεικτών της (n) . Για την υπακολουθία των άρτιων δεικτών ισχύει $(-1)^{(2k)-1}2k = -2k \rightarrow -\infty$, διότι πρόκειται για την υπακολουθία άρτιων δεικτών της $(-n)$.

Πρόταση 3.2. Αν οι υπακολουθίες (x_{2k}) , (x_{2k-1}) της (x_n) έχουν το ίδιο όριο, τότε και η (x_n) έχει το ίδιο όριο με αυτές.

Απόδειξη. Έστω $x_{2k} \rightarrow x$ και $x_{2k-1} \rightarrow x$. Έστω $\epsilon > 0$. Αν το k είναι αρκετά μεγάλο, τότε ισχύει $|x_{2k} - x| < \epsilon$ και $|x_{2k-1} - x| < \epsilon$. Τώρα, κάθε φυσικός n είναι είτε άρτιος $2k$ είτε περιττός $2k-1$, οπότε το $|x_n - x|$ είναι είτε $|x_{2k} - x|$ είτε $|x_{2k-1} - x|$. Επομένως, αν το n είναι αρκετά μεγάλο, τότε ισχύει $|x_n - x| < \epsilon$. Άρα $x_n \rightarrow x$.

Η απόδειξη είναι παρόμοια στην περίπτωση $x_{2k} \rightarrow +\infty$ και $x_{2k-1} \rightarrow +\infty$, καθώς και στην περίπτωση $x_{2k} \rightarrow -\infty$ και $x_{2k-1} \rightarrow -\infty$. $\square$

Παράδειγμα 3.35. Έστω η (x_n) , όπου $x_n = \frac{3+(-1)^n}{2n} = \begin{cases} \frac{2}{n}, & \text{αν το } n \text{ είναι άρτιο,} \\ \frac{1}{n}, & \text{αν το } n \text{ είναι περιττό.} \end{cases}$

Τότε $x_{2k} = \frac{2}{2k} = \frac{1}{k} \rightarrow 0$ και $x_{2k-1} = \frac{1}{2k-1} \rightarrow 0$. Άρα $x_n \rightarrow 0$.

Ασκήσεις

3.14. Αποδείξτε ότι $(\frac{1}{2} + \frac{(-1)^{n-1}}{4})^n \rightarrow 0$.

3.15. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν τα όρια των ακολουθιών με n -οστούς όρους $2^{(-1)^{n-1}n}$, $\cos(n\pi)$, $\sin \frac{n\pi}{2}$, $\cos \frac{n\pi}{3}$, $(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{2})^n$, $1 - 1 + 1 - \dots + (-1)^n$.

3.16. Αποδείξτε, βάσει γνωστών ορίων, ότι $\frac{1}{\sqrt{3n+5}} \rightarrow 0$, $\log_2(4n-3) \rightarrow +\infty$, $5^{-7n+6} \rightarrow 0$.

3.17. Αποδείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^{2^n - m} = +\infty$, $\lim_{m \rightarrow +\infty} 3^{2^n - m} = 0$. Στο πρώτο όριο θεωρήστε το $m \in \mathbb{N}$ σταθερό, ενώ στο δεύτερο θεωρήστε το $n \in \mathbb{N}$ σταθερό.

3.18. Έστω ότι οι υπακολουθίες (x_{3k}) , (x_{3k-1}) , (x_{3k-2}) της (x_n) έχουν το ίδιο όριο. Προσαρμόζοντας την απόδειξη της Πρότασης 3.2, αποδείξτε ότι και η (x_n) έχει το ίδιο όριο. Γενικεύστε.

3.19. Αποδείξτε ότι $\lim_{m \rightarrow +\infty} (\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos^{2n}(m!\pi x)) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

3.5 Όρια και αλγεβρικές πράξεις

Ορισμός 3.7. Ορίζουμε τα συμβολικά αντίθετα των συμβόλων $\pm\infty$ ως εξής:

$$-(+\infty) = -\infty, \quad -(-\infty) = +\infty.$$

Ονομάζουμε **αντίθετη** της ακολουθίας (x_n) την $(-x_n)$ της οποίας ο n -οστός όρος είναι ο αντίθετος του n -οστού όρου της αρχικής ακολουθίας.

Κανόνας αντίθετου. Αν η (x_n) έχει όριο, τότε και η $(-x_n)$ έχει όριο και

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-x_n) = - \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n.$$

Απόδειξη. Έστω $x_n \rightarrow x$. Έστω $\epsilon > 0$. Αν το n είναι αρκετά μεγάλο, τότε ισχύει $|x_n - x| < \epsilon$, οπότε ισχύει

$$|(-x_n) - (-x)| = |-x_n + x| = |x_n - x| < \epsilon.$$

Άρα $-x_n \rightarrow -x$.

Έστω $x_n \rightarrow +\infty$. Έστω $M > 0$. Αν το n είναι αρκετά μεγάλο, τότε ισχύει $x_n > M$, οπότε ισχύει $-x_n < -M$. Άρα $-x_n \rightarrow -\infty = -(+\infty)$.

Ομοίως, αποδεικνύεται ότι, αν $x_n \rightarrow -\infty$, τότε $-x_n \rightarrow +\infty = -(-\infty)$. $\square$

Ορισμός 3.8. Ορίζουμε τα συμβολικά αθροίσματα των συμβόλων $\pm\infty$ μεταξύ τους αλλά και με τους αριθμούς ως εξής:

$$\begin{aligned} (+\infty) + x &= +\infty, & x + (+\infty) &= +\infty, & (+\infty) + (+\infty) &= +\infty, \\ (-\infty) + x &= -\infty, & x + (-\infty) &= -\infty, & (-\infty) + (-\infty) &= -\infty. \end{aligned}$$

Όμως, τα αθροίσματα

$$(+\infty) + (-\infty), \quad (-\infty) + (+\infty)$$

δεν ορίζονται και χαρακτηρίζονται **απροσδιόριστες μορφές**.

Ονομάζουμε **άθροισμα** των $(x_n), (y_n)$ την ακολουθία $(x_n + y_n)$ της οποίας ο n -οστός όρος προκύπτει αθροίζοντας τους n -οστούς όρους των δύο αρχικών ακολουθιών.

Κανόνας αθροίσματος. Αν οι $(x_n), (y_n)$ έχουν όριο και αν το άθροισμα των δύο ορίων δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε και η $(x_n + y_n)$ έχει όριο και

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n.$$

Απόδειξη. Έστω $x_n \rightarrow x$ και $y_n \rightarrow y$. Έστω $\epsilon > 0$. Αν το n είναι αρκετά μεγάλο, τότε ισχύει $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ και $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$, οπότε ισχύει

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Άρα $x_n + y_n \rightarrow x + y$.

Έστω $x_n \rightarrow +\infty$ και $y_n \rightarrow +\infty$. Έστω $M > 0$. Αν το n είναι αρκετά μεγάλο, τότε ισχύει $x_n > \frac{M}{2}$ και $y_n > \frac{M}{2}$, οπότε ισχύει $x_n + y_n > M$. Άρα $x_n + y_n \rightarrow +\infty$.

Έστω $x_n \rightarrow x$ και $y_n \rightarrow +\infty$. Έστω $M > 0$. Αν το n είναι αρκετά μεγάλο, τότε ισχύει $|x_n - x| < 1$ και $y_n > M + |x| + 1$, οπότε ισχύει

$$x_n + y_n \geq -|x| - |x_n - x| + y_n > -|x| - 1 + M + |x| + 1 = M.$$

Άρα $x_n + y_n \rightarrow +\infty$.

Οι υπόλοιπες περιπτώσεις έχουν παρόμοια απόδειξη. □

Παράδειγμα 3.36. $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ και $\frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0$. Άρα $\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0 + 0 = 0$.

Παράδειγμα 3.37. $n \rightarrow +\infty$ και $\frac{1}{n} \rightarrow 0$. Άρα $n + \frac{1}{n} \rightarrow (+\infty) + 0 = +\infty$.

Παράδειγμα 3.38. $-n \rightarrow -\infty$ και $-\sqrt{n} \rightarrow -\infty$. Άρα $-n - \sqrt{n} \rightarrow (-\infty) + (-\infty) = -\infty$.

Ακολουθούν μερικά παραδείγματα όπου δύο ακολουθίες έχουν όρια $+\infty, -\infty$ και το άθροισμά τους δεν έχει όριο ή έχει διαφορετικό κάθε φορά όριο. Η ύπαρξη τέτοιων παραδειγμάτων αιτιολογεί τον χαρακτηρισμό «απροσδιόριστη μορφή» για την παράσταση $(+\infty) + (-\infty)$: το αποτέλεσμα της είναι απροσδιόριστο.

Παράδειγμα 3.39. $n + 3 \rightarrow (+\infty) + 3 = +\infty$, $-n \rightarrow -\infty$ και $(n + 3) + (-n) = 3 \rightarrow 3$.

Προφανώς, στη θέση του 3 θα μπορούσε να είναι οποιοσδήποτε αριθμός.

Παράδειγμα 3.40. $2n \rightarrow +\infty$, $-n \rightarrow -\infty$ και $2n + (-n) = n \rightarrow +\infty$.

Παράδειγμα 3.41. $n \rightarrow +\infty$, $-2n \rightarrow -\infty$ και $n + (-2n) = -n \rightarrow -\infty$.

Παράδειγμα 3.42. Οι υπακολουθίες των άρτιων και των περιττών δεικτών της $(n + (-1)^{n-1})$ έχουν και οι δύο όριο $+\infty$. Άρα $n + (-1)^{n-1} \rightarrow +\infty$. Επίσης, $-n \rightarrow -\infty$, αλλά το $(n + (-1)^{n-1}) + (-n) = (-1)^{n-1}$ δεν έχει όριο.

Ορισμός 3.9. Ορίζουμε τις συμβολικές διαφορές

$$\begin{aligned} (+\infty) - x &= +\infty, & x - (-\infty) &= +\infty, & (+\infty) - (-\infty) &= +\infty, \\ (-\infty) - x &= -\infty, & x - (+\infty) &= -\infty, & (-\infty) - (+\infty) &= -\infty, \end{aligned}$$

έχοντας υπόψη τα συμβολικά αντίθετα και τα συμβολικά αθροίσματα τα οποία έχουν ήδη οριστεί. Δεν ορίζονται οι διαφορές

$$(+\infty) - (+\infty), \quad (-\infty) - (-\infty)$$

και χαρακτηρίζονται **απροσδιόριστες μορφές**.

Η περίπτωση της **διαφοράς** των $(x_n), (y_n)$, δηλαδή της ακολουθίας $(x_n - y_n)$, ανάγεται εύκολα στις περιπτώσεις του αθροίσματος ακολουθιών και της αντίθετης ακολουθίας, παρατηρώντας απλώς ότι $x_n - y_n = x_n + (-y_n)$.

Κανόνας διαφοράς. Αν οι $(x_n), (y_n)$ έχουν όριο και αν η διαφορά των δύο ορίων δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε και η $(x_n - y_n)$ έχει όριο και

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n.$$

Ορισμός 3.10. Τώρα θα ορίσουμε τα συμβολικά γινόμενα των συμβόλων $\pm\infty$ μεταξύ τους, αλλά και με τους αριθμούς:

$$\begin{aligned} (\pm\infty)x &= x(\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty, & \text{αν } x > 0, \\ \mp\infty, & \text{αν } x < 0, \end{cases} \\ (\pm\infty)(\pm\infty) &= +\infty, \quad (\pm\infty)(\mp\infty) = -\infty. \end{aligned}$$

Τα γινόμενα

$$(\pm\infty)0, \quad 0(\pm\infty)$$

δεν ορίζονται και χαρακτηρίζονται **απροσδιόριστες μορφές**.

Ονομάζουμε **γινόμενο** των $(x_n), (y_n)$ την ακολουθία $(x_n y_n)$ της οποίας ο n -οστός όρος προκύπτει πολλαπλασιάζοντας τους n -οστούς όρους των αρχικών ακολουθιών.

Κανόνας γινομένου. Αν οι $(x_n), (y_n)$ έχουν όριο και αν το γινόμενο των δυο ορίων δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε και η $(x_n y_n)$ έχει όριο και

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n.$$

Απόδειξη. Έστω $x_n \rightarrow x$ και $y_n \rightarrow y$. Έστω $\epsilon > 0$. Αν το n είναι αρκετά μεγάλο, τότε ισχύει $|x_n - x| < \min\{(\frac{\epsilon}{3})^{\frac{1}{2}}, \frac{\epsilon}{3|y|+1}\}$ και $|y_n - y| < \min\{(\frac{\epsilon}{3})^{\frac{1}{2}}, \frac{\epsilon}{3|x|+1}\}$, οπότε ισχύει

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &= |(x_n - x)(y_n - y) + x(y_n - y) + y(x_n - x)| \\ &\leq |x_n - x||y_n - y| + |x||y_n - y| + |y||x_n - x| \\ &< (\frac{\epsilon}{3})^{\frac{1}{2}}(\frac{\epsilon}{3})^{\frac{1}{2}} + \frac{|x|\epsilon}{3|y|+1} + \frac{|y|\epsilon}{3|x|+1} < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Επομένως $x_n y_n \rightarrow xy$.

Έστω $x_n \rightarrow +\infty$ και $y_n \rightarrow +\infty$. Έστω $M > 0$. Αν το n είναι αρκετά μεγάλο, τότε ισχύει $x_n > \sqrt{M}$ και $y_n > \sqrt{M}$, οπότε ισχύει $x_n y_n > M$. Άρα $x_n y_n \rightarrow +\infty$.

Έστω $x > 0$, $x_n \rightarrow x$ και $y_n \rightarrow +\infty$. Έστω $M > 0$. Αν το n είναι αρκετά μεγάλο, τότε ισχύει $|x_n - x| < \frac{x}{2}$ και $y_n > \frac{2M}{x} > 0$, οπότε ισχύει

$$x_n y_n \geq (x - |x_n - x|)y_n > (x - \frac{x}{2})\frac{2M}{x} = M.$$

Επομένως $x_n y_n \rightarrow +\infty$.

Όλες οι υπόλοιπες περιπτώσεις έχουν παρόμοια απόδειξη. $\square$

Παράδειγμα 3.43. $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ και $\frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0$. Άρα $\frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{n} \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0 \cdot 0 = 0$.

Παράδειγμα 3.44. $\frac{n-1}{n} \rightarrow 1$ και $\frac{1}{n} \rightarrow 0$. Άρα $\frac{n-1}{n^2} = \frac{n-1}{n} \frac{1}{n} \rightarrow 1 \cdot 0 = 0$.

Παράδειγμα 3.45. $n \rightarrow +\infty$ και $1-n \rightarrow -\infty$. Άρα $n-n^2 = n(1-n) \rightarrow (+\infty)(-\infty) = -\infty$. Παρατηρήστε ότι δεν εφαρμόζεται ο κανόνας της διαφοράς στο $n-n^2$, διότι καταλήγει σε απροσδιόριστη μορφή $(+\infty) - (+\infty)$.

Παράδειγμα 3.46. Μία ειδική περίπτωση του κανόνα γινομένου είναι η εξής. Έστω ακολουθία (x_n) και αριθμός c . Αν η (x_n) έχει όριο και αν το γινόμενο του c με το όριο της (x_n) δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c x_n = c \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n.$$

Αυτό προκύπτει, αν εφαρμόσουμε τον κανόνα γινομένου στην (x_n) και στη σταθερή ακολουθία (c) η οποία έχει όριο c .

Η περίπτωση την οποία εξαιρέσαμε, δηλαδή το γινόμενο του c με το όριο της (x_n) να είναι απροσδιόριστη μορφή, συμβαίνει, μόνο όταν $c = 0$ και το όριο της (x_n) είναι το $+\infty$ ή το $-\infty$. Τότε, όμως, $0x_n = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή η $(0x_n)$ είναι η σταθερή ακολουθία (0) , οπότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0x_n = 0$.

Παράδειγμα 3.47. Έστω $a > 0$. Τότε: $cn^a \rightarrow +\infty$, αν $c > 0$, και $cn^a \rightarrow -\infty$, αν $c < 0$.

Παράδειγμα 3.48. Αν $a > 0$, τότε $cn^{-a} \rightarrow 0$.

Παράδειγμα 3.49. Έστω πολυώνυμο $a_N x^N + \dots + a_1 x + a_0$ τουλάχιστον πρώτου βαθμού, δηλαδή $a_N \neq 0$ και $N \geq 1$. Τότε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_N n^N + \dots + a_1 n + a_0) = a_N(+\infty) = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a_N > 0, \\ -\infty, & \text{αν } a_N < 0. \end{cases}$$

Για να το αποδείξουμε, βγάζουμε το $a_N n^N$ ως κοινό παράγοντα,

$$a_N n^N + \dots + a_1 n + a_0 = a_N n^N \left(1 + \frac{a_{N-1}}{a_N} \frac{1}{n} + \dots + \frac{a_1}{a_N} \frac{1}{n^{N-1}} + \frac{a_0}{a_N} \frac{1}{n^N} \right),$$

και τότε το όριο της παρένθεσης είναι 1, διότι κάθε όρος της, εκτός του πρώτου, έχει όριο 0. Άρα

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_N n^N + \dots + a_1 n + a_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_N n^N = a_N(+\infty).$$

Στην τελευταία σχέση η πρώτη ισότητα λέει ότι η τιμή του ορίου πολυωνυμικής παράστασης του n εξαρτάται μόνο από τον μεγιστοβάθμιο όρο. Για παράδειγμα: $3n^2 - 5n + 2 \rightarrow +\infty$, διότι $3n^2 \rightarrow +\infty$. Επίσης, $-\frac{1}{2}n^5 + 4n^4 - n^3 \rightarrow -\infty$, διότι $-\frac{1}{2}n^5 \rightarrow -\infty$.

Έχοντας ήδη ορίσει τα συμβολικά γινόμενα των $\pm\infty$, είναι τώρα απλό να ορίσουμε τις συμβολικές δυνάμεις $(\pm\infty)^k$ για κάθε φυσικό k :

$$(+\infty)^k = \underbrace{(+\infty) \cdots (+\infty)}_{k \text{ φορές}} = +\infty, \quad (-\infty)^k = \underbrace{(-\infty) \cdots (-\infty)}_{k \text{ φορές}} = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } k \text{ άρτιο,} \\ -\infty, & \text{αν } k \text{ περιττό.} \end{cases}$$

Τώρα μπορούμε να διατυπώσουμε την:

Πρόταση 3.3. Αν η (x_n) έχει όριο και $k \in \mathbb{N}$, τότε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^k = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \right)^k.$$

Απόδειξη. Απλή εφαρμογή του κανόνα γινομένου. □

Παράδειγμα 3.50. $\frac{n-1}{n} \rightarrow 1$. Άρα $(\frac{n-1}{n})^3 \rightarrow 1^3 = 1$.

Παράδειγμα 3.51. $n^5 - 2n^2 + n - 7 \rightarrow +\infty$. Άρα $(n^5 - 2n^2 + n - 7)^8 \rightarrow (+\infty)^8 = +\infty$.

Παράδειγμα 3.52. $-2n^3 + n^2 + 2n - 7 \rightarrow -\infty$. Άρα $(-2n^3 + n^2 + 2n - 7)^4 \rightarrow (-\infty)^4 = +\infty$.

Παράδειγμα 3.53. $-n^3 + 2n - 1 \rightarrow -\infty$. Άρα $(-n^3 + 2n - 1)^5 \rightarrow (-\infty)^5 = -\infty$.

Θα δούμε τώρα μερικά παραδείγματα όπου δύο ακολουθίες έχουν όρια $+\infty$ και 0, ενώ το γινόμενό τους δεν έχει όριο ή έχει διαφορετικό κάθε φορά όριο. Όπως στην περίπτωση του αθροίσματος, η ύπαρξη τέτοιων παραδειγμάτων αιτιολογεί τον χαρακτηρισμό «απροσδιόριστη μορφή» για τις παραστάσεις $(\pm\infty)0$: το αποτέλεσμα τους είναι απροσδιόριστο.

Παράδειγμα 3.54. $n \rightarrow +\infty$, $\frac{7}{n} \rightarrow 0$ και $n \frac{7}{n} = 7 \rightarrow 7$.

Φυσικά, θα μπορούσαμε να έχουμε οποιονδήποτε αριθμό στη θέση του 7.

Παράδειγμα 3.55. $n^2 \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ και $n^2 \frac{1}{n} = n \rightarrow +\infty$.

Παράδειγμα 3.56. $n \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{n^2} \rightarrow 0$ και $n \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$.

Παράδειγμα 3.57. $n \rightarrow +\infty$, $\frac{(-1)^{n-1}}{n} \rightarrow 0$, αλλά το $n \frac{(-1)^{n-1}}{n} = (-1)^{n-1}$ δεν έχει όριο.

Ορισμός 3.11. Ορίζουμε τα συμβολικά αντίστροφα

$$\frac{1}{+\infty} = 0, \quad \frac{1}{-\infty} = 0.$$

Το αντίστροφο

$$\frac{1}{0}$$

δεν ορίζεται και χαρακτηρίζεται **απροσδιόριστη μορφή**.

Η **αντίστροφη** ακολουθία της (x_n) είναι η $(\frac{1}{x_n})$ και, φυσικά, ορίζεται, αρκεί να ισχύει $x_n \neq 0$ για κάθε n .

Κανόνας αντίστροφου, I. Έστω $x_n \neq 0$ για κάθε n . Αν η (x_n) έχει όριο και αν το αντίστροφο του ορίου δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, δηλαδή αν $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \neq 0$, τότε και η $(\frac{1}{x_n})$ έχει όριο και

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n}.$$

Απόδειξη. Έστω $x_n \rightarrow x$ και $x > 0$. Έστω $\epsilon > 0$. Αν το n είναι αρκετά μεγάλο, τότε ισχύει $|x_n - x| < \min\{\frac{x}{2}, \frac{x\epsilon}{2}\}$, οπότε ισχύει

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x} \right| = \frac{|x_n - x|}{x_n x} \leq \frac{|x_n - x|}{(x - |x_n - x|)x} < \frac{|x_n - x|}{\frac{x}{2} x} < \epsilon.$$

Άρα $\frac{1}{x_n} \rightarrow \frac{1}{x}$.

Έστω $x_n \rightarrow +\infty$. Έστω $\epsilon > 0$. Αν το n είναι αρκετά μεγάλο, τότε ισχύει $x_n > \frac{1}{\epsilon}$, οπότε ισχύει $\left| \frac{1}{x_n} - 0 \right| = \frac{1}{x_n} < \epsilon$. Άρα $\frac{1}{x_n} \rightarrow 0$.

Η απόδειξη αν το όριο είναι αρνητικός αριθμός ή $-\infty$ είναι παρόμοια. □

Παράδειγμα 3.58. Ο κανόνας διαφοράς δεν εφαρμόζεται στην ακολουθία $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$, διότι προκύπτει απροσδιόριστη μορφή $(+\infty) - (+\infty)$. Όμως,

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Παράδειγμα 3.59. Ο κανόνας αντίστροφου δεν ισχύει, αν $x_n \rightarrow 0$. Για παράδειγμα, $\frac{(-1)^{n-1}}{n} \rightarrow 0$, αλλά το $\frac{n}{(-1)^{n-1}} = (-1)^{n-1}n$ δεν έχει όριο.

Το πρόβλημα στο τελευταίο παράδειγμα είναι η ύπαρξη όρων της (x_n) διαφορετικού προσήμου.

Κανόνας αντίστροφου, Π. (i) Αν $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ και όλοι οι όροι της (x_n) είναι θετικοί, τότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_n} = +\infty$.
(ii) Αν $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ και όλοι οι όροι της (x_n) είναι αρνητικοί, τότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_n} = -\infty$.

Απόδειξη. (i) Έστω $x_n \rightarrow 0$ και $x_n > 0$ για κάθε n . Έστω $M > 0$. Αν το n είναι αρκετά μεγάλο, τότε ισχύει $0 < x_n < \frac{1}{M}$, οπότε ισχύει $\frac{1}{x_n} > M$. Άρα $\frac{1}{x_n} \rightarrow +\infty$.

(ii) Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του (i). □

Ορισμός 3.12. Οι παρακάτω συμβολικοί λόγοι ορίζονται βάσει των συμβολικών πολλαπλασιασμών και των συμβολικών αντιστροφών.

$$\frac{x}{\pm\infty} = 0, \quad \frac{\pm\infty}{x} = \begin{cases} \pm\infty, & \text{αν } x > 0, \\ \mp\infty, & \text{αν } x < 0. \end{cases}$$

Οι λόγοι

$$\frac{x}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{\pm\infty}{\mp\infty}$$

δεν ορίζονται και χαρακτηρίζονται **απροσδιόριστες μορφές**.

Το $\frac{x}{0} = x \frac{1}{0}$ και το $\frac{\pm\infty}{0} = (\pm\infty) \frac{1}{0}$ δεν ορίζονται, διότι δεν ορίζεται το $\frac{1}{0}$. Επίσης, δεν ορίζεται το $\frac{\pm\infty}{\pm\infty} = (\pm\infty) \frac{1}{\pm\infty} = (\pm\infty) 0$, διότι καταλήγει σε απροσδιόριστη μορφή γινομένου.

Τα αποτελέσματα για τον **λόγο** των (x_n) και (y_n) , δηλαδή για την ακολουθία $(\frac{x_n}{y_n})$, προκύπτουν από τον συνδυασμό των αποτελεσμάτων για το γινόμενο ακολουθιών και για την αντίστροφη ακολουθία, παρατηρώντας ότι $\frac{x_n}{y_n} = x_n \frac{1}{y_n}$.

Κανόνας λόγου. Έστω $y_n \neq 0$ για κάθε n . Αν οι (x_n) , (y_n) έχουν όριο και αν ο λόγος των δύο ορίων δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε και η $(\frac{x_n}{y_n})$ έχει όριο και

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n}.$$

Παράδειγμα 3.60. Θεωρούμε ρητή παράσταση $\frac{a_N x^N + \dots + a_1 x + a_0}{b_M x^M + \dots + b_1 x + b_0}$, όπου $a_N \neq 0$, $b_M \neq 0$. Τότε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_N n^N + \dots + a_1 n + a_0}{b_M n^M + \dots + b_1 n + b_0} = \begin{cases} \frac{a_N}{b_M} (+\infty), & \text{αν } N > M, \\ \frac{a_N}{b_M}, & \text{αν } N = M, \\ 0, & \text{αν } N < M. \end{cases}$$

Πράγματι, γράφουμε

$$\frac{a_N n^N + \dots + a_1 n + a_0}{b_M n^M + \dots + b_1 n + b_0} = \frac{a_N}{b_M} n^{N-M} \frac{1 + \frac{a_{N-1}}{a_N} \frac{1}{n} + \dots + \frac{a_0}{a_N} \frac{1}{n^N}}{1 + \frac{b_{M-1}}{b_M} \frac{1}{n} + \dots + \frac{b_0}{b_M} \frac{1}{n^M}}$$

και, όπως έχουμε δει, τα όρια του αριθμητή και του παρονομαστή του τελευταίου λόγου είναι ίσα με 1. Άρα

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_N n^N + \dots + a_1 n + a_0}{b_M n^M + \dots + b_1 n + b_0} = \frac{a_N}{b_M} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{N-M}$$

και από αυτό προκύπτει το τελικό συμπέρασμα. Βλέπουμε ότι, όπως και στην περίπτωση πολωνυμικής παράστασης, η τιμή του ορίου ρητής παράστασης του n εξαρτάται μόνο από τους μεγιστοβάθμιους όρους των πολωνύμων στον αριθμητή και στον παρονομαστή. Δηλαδή,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_N n^N + \dots + a_1 n + a_0}{b_M n^M + \dots + b_1 n + b_0} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_N n^N}{b_M n^M}.$$

Π.χ. $\frac{n^3-2n^2+n+1}{2n^2-3n-1} \rightarrow +\infty$, διότι $\frac{n^3}{2n^2} = \frac{n}{2} \rightarrow +\infty$. Επίσης, $\frac{-n^2+n}{n+2} \rightarrow -\infty$, διότι $\frac{-n^2}{n} = -n \rightarrow -\infty$.
Ακόμη, $\frac{n^4-n^3-7}{n^4+n+1} \rightarrow 1$, διότι $\frac{n^4}{n^4} = 1 \rightarrow 1$. Τέλος, $\frac{-n^2+n+4}{n^3+n^2+5n+6} \rightarrow 0$, διότι $\frac{-n^2}{n^3} = -\frac{1}{n} \rightarrow 0$.

Παράδειγμα 3.61. $(\frac{-2n^3+n^2+n+1}{2n+3})^7 \rightarrow (-\infty)^7 = -\infty$.

Παράδειγμα 3.62. $(\frac{n^3+n+7}{-3n^3+n^2+1})^3 \rightarrow (-\frac{1}{3})^3 = -\frac{1}{27}$.

Τέλος, θα δούμε μερικά παραδείγματα σχετικά με τις απροσδιόριστες μορφές $\frac{0}{0}$ και $\frac{+\infty}{+\infty}$.

Παράδειγμα 3.63. $\frac{-2}{n} \rightarrow 0$, $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ και $\frac{-\frac{2}{n}}{\frac{1}{n}} = -2 \rightarrow -2$.

Στη θέση του -2 θα μπορούσε να είναι οποιοσδήποτε αριθμός.

Παράδειγμα 3.64. $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, $\frac{1}{n^2} \rightarrow 0$ και $\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = n \rightarrow +\infty$.

Παράδειγμα 3.65. $\frac{1}{n^2} \rightarrow 0$, $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ και $\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$.

Παράδειγμα 3.66. $\frac{(-1)^{n-1}}{n} \rightarrow 0$ και $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, αλλά το $\frac{(-1)^{n-1}}{\frac{1}{n}} = (-1)^{n-1}$ δεν έχει όριο.

Παράδειγμα 3.67. $5n \rightarrow +\infty$, $n \rightarrow +\infty$ και $\frac{5n}{n} = 5 \rightarrow 5$.

Στη θέση του 5 θα μπορούσε να είναι οποιοσδήποτε θετικός αριθμός.

Παράδειγμα 3.68. $n^2 \rightarrow +\infty$, $n \rightarrow +\infty$ και $\frac{n^2}{n} = n \rightarrow +\infty$.

Παράδειγμα 3.69. $n \rightarrow +\infty$, $n^2 \rightarrow +\infty$ και $\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$.

Παράδειγμα 3.70. $(2 + (-1)^{n-1})n \rightarrow +\infty$ (γιατί;) και $n \rightarrow +\infty$, αλλά το $\frac{(2+(-1)^{n-1})n}{n} = 2 + (-1)^{n-1}$ δεν έχει όριο (γιατί;).

Ορισμός 3.13. Ορίζουμε τις συμβολικές απόλυτες τιμές

$$|+\infty| = +\infty, \quad |-\infty| = +\infty.$$

Ορίζουμε, επίσης, την **απόλυτη** ακολουθία $(|x_n|)$ μίας ακολουθίας (x_n) .

Κανόνας απόλυτου. Αν η (x_n) έχει όριο, τότε και η $(|x_n|)$ έχει όριο και

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n| = \left| \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \right|.$$

Απόδειξη. Έστω $x_n \rightarrow x$. Έστω $\epsilon > 0$. Αν το n είναι αρκετά μεγάλο, τότε ισχύει $|x_n - x| < \epsilon$, οπότε ισχύει

$$||x_n| - |x|| \leq |x_n - x| < \epsilon.$$

Άρα $|x_n| \rightarrow |x|$.

Έστω $x_n \rightarrow +\infty$ ή $x_n \rightarrow -\infty$. Έστω $M > 0$. Αν το n είναι αρκετά μεγάλο, τότε ισχύει $x_n > M$ ή $x_n < -M$, αντιστοίχως, οπότε ισχύει $|x_n| > M$. Άρα $|x_n| \rightarrow +\infty$. $\square$

Παράδειγμα 3.71. Η ακολουθία $(5 - n)$ είναι η $4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, \dots$ και $5 - n \rightarrow -\infty$. Η ακολουθία $(|5 - n|)$ είναι η $4, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, \dots$ και $|5 - n| \rightarrow |-\infty| = +\infty$.

Παράδειγμα 3.72. Το αντίστροφο του κανόνα απόλυτου δεν είναι σωστό. Π.χ. $|(-1)^{n-1}| = 1 \rightarrow 1$, αλλά δεν υπάρχει το $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{n-1}$.

Υπάρχει μόνο μία περίπτωση κατά την οποία ισχύει το αντίστροφο του κανόνα απόλυτου.

Πρόταση 3.4. Αν $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n| = 0$, τότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$.

Απόδειξη. Έστω $|x_n| \rightarrow 0$. Έστω $\epsilon > 0$. Αν το n είναι αρκετά μεγάλο, τότε ισχύει $||x_n| - 0| < \epsilon$, οπότε ισχύει

$$|x_n - 0| = |x_n| = ||x_n| - 0| < \epsilon.$$

Άρα $x_n \rightarrow 0$. □

Ασκήσεις

3.20. Αποδείξτε ότι $(n + \frac{(-1)^{n-1}}{n})^9 \rightarrow +\infty$, $\frac{-1 + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}} \rightarrow -\frac{1}{2}$, $\frac{-n + \frac{1}{n}}{2 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}} \rightarrow -\infty$, $\frac{(n-1)^2 - 7n + 3}{n+1} \sqrt{n} \rightarrow +\infty$, $\frac{1 + \frac{n}{n \log_{10} n}}{n+3} \rightarrow 0$, $\frac{1+2 \cdot 5^n}{7+3 \cdot 5^n} \rightarrow \frac{2}{3}$, $\frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + 2^{n+1}} \rightarrow \frac{1}{3}$, $\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1} \rightarrow \frac{1}{2}$, $\frac{-2 \log_4 n}{\log_4 n + 5} \rightarrow -1$.

3.21. Αποδείξτε ότι $\frac{(1-n)^5 + n^4}{n+1} \rightarrow -\infty$, $\frac{3n^2 - 5n}{5n^2 + n - 6} \rightarrow \frac{3}{5}$, $\frac{-2n^5 + n^2}{n^7 + n^3 - 1} \rightarrow 0$, $\frac{n^2 + n}{2n-1} \rightarrow +\infty$, $(\frac{-n^2+1}{n+2})^{27} \rightarrow -\infty$, $(\frac{-n^2+1}{n+2})^{16} \rightarrow +\infty$, $\frac{n(n+1)}{n+4} - \frac{4n^3}{4n^2+1} \rightarrow -3$, $\frac{(n+1)^{27}(n+3)^{79}}{(n+2)^{106}} \rightarrow 1$.

3.22. Αποδείξτε ότι $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \rightarrow 2$, $\frac{2^7}{3} + \frac{2^8}{3^8} + \dots + \frac{2^n}{3^n} \rightarrow \frac{2^7}{3^6}$, $\frac{2^n}{3^n} + \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} + \dots + \frac{2^{2n}}{3^{2n}} \rightarrow 0$, $\frac{1+2+\dots+2^n}{1+3+\dots+3^n} \rightarrow 0$, $\frac{2-1}{2+1} \frac{3-1}{3+1} \dots \frac{n-1}{n+1} \rightarrow 0$, $\frac{2^3-1}{2^3+1} \frac{3^3-1}{3^3+1} \dots \frac{n^3-1}{n^3+1} \rightarrow \frac{2}{3}$.

Υπόδειξη: Θυμηθείτε τον αλγεβρικό τύπο για το $1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1}$ στο παράδειγμα 1.19. Για τα δύο τελευταία όρια προσπαθήστε να απλοποιήσετε τα γινόμενα των λόγων.

3.23. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν τα όρια των ακολουθιών με τους n -οστούς όρους $\frac{1+(-1)^n(n+2)}{n}$, $\frac{n^2}{(-1)^{n-1}n+1}$, $\frac{n+n^2 \cos \frac{n\pi}{2}}{1+n \sqrt{n}}$, $1 - \frac{3}{2} + \frac{3^2}{2^2} - \dots + (-1)^n \frac{3^n}{2^n}$.

3.24. Αν $x_n \neq -1$ για κάθε n και $x \neq -1$, αποδείξτε ότι $x_n \rightarrow x$, αν και μόνο αν $\frac{x_n}{1+x_n} \rightarrow \frac{x}{1+x}$.

3.25. Αποδείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1} = \begin{cases} 1, & \text{αν } |x| > 1, \\ 0, & \text{αν } |x| = 1, \\ -1, & \text{αν } |x| < 1. \end{cases}$

3.26. Έστω ότι η άγνωστη ακολουθία (x_n) έχει όριο.

(i) Αν $x_{n+1} = -x_n + 2$ για κάθε n , αποδείξτε ότι $x_n \rightarrow 1$.

(ii) Αν $x_{n+3} = x_n - 3$ για κάθε n , αποδείξτε ότι $x_n \rightarrow -\infty$.

(iii) Αν $x_{n+1} = x_n^2 - 2$ για κάθε n , αποδείξτε ότι $x_n \rightarrow -1$ ή $x_n \rightarrow 2$ ή $x_n \rightarrow +\infty$.

(iv) Αν $x_{n+2} = -x_n^2 + 2$ για κάθε n , αποδείξτε ότι $x_n \rightarrow 1$ ή $x_n \rightarrow -2$ ή $x_n \rightarrow -\infty$.

(v) Αν $x_{n+1} = x_n^2 + 3$ για κάθε n , αποδείξτε ότι $x_n \rightarrow +\infty$.

(vi) Αν $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n^3$ για κάθε n , αποδείξτε ότι $x_n \rightarrow 0$ ή $x_n \rightarrow +\infty$ ή $x_n \rightarrow -\infty$.

Σε καθεμία από τις παραπάνω περιπτώσεις προσπαθήστε να βρείτε συγκεκριμένη ακολουθία η οποία να την υλοποιεί.

3.27. (i) Βρείτε (x_n) , (y_n) , οι οποίες δεν έχουν όριο ώστε η $(x_n + y_n)$ να έχει όριο.

(ii) Βρείτε (x_n) , (y_n) , οι οποίες δεν έχουν όριο ώστε η $(x_n y_n)$ να έχει όριο.

3.28. (i) Θεωρήστε την ακολουθία (x_n) , όπου $x_n = \frac{3+(-1)^n}{2n}$. Δείτε ότι ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n και ότι $x_n \rightarrow 0$. Αποδείξτε ότι ισχύει $x_n > x_{n+1}$ για κάθε άρτιο n και $x_n < x_{n+1}$ για κάθε περιττό $n \geq 3$. Δηλαδή, η (x_n) δεν είναι φθίνουσα: οι όροι της διαρκώς αυξομειώνονται.

(ii) Θεωρήστε την ακολουθία (x_n) με $x_n = \frac{(3-(-1)^{n-1})n}{2}$. Δείτε ότι ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n και ότι $x_n \rightarrow +\infty$. Αποδείξτε ότι ισχύει $x_n > x_{n+1}$ για κάθε άρτιο n και $x_n < x_{n+1}$ για κάθε περιττό n . Δηλαδή, η (x_n) δεν είναι αύξουσα: οι όροι της διαρκώς αυξομειώνονται.

3.29. Βρείτε (x_n) , (y_n) με θετικούς όρους ώστε $x_n \rightarrow 0$, $y_n \rightarrow +\infty$ και ώστε η $(x_n y_n)$ να μην έχει όριο.

Υπόδειξη: Ίσως φανεί χρήσιμη οποιαδήποτε από τις ακολουθίες της άσκησης 3.28.

3.30. Αν $x_n \rightarrow x$ και $y_n \rightarrow y$, αποδείξτε ότι

$$\max\{x_n, y_n\} \rightarrow \max\{x, y\}, \quad \min\{x_n, y_n\} \rightarrow \min\{x, y\}.$$

Υπόδειξη: Θυμηθείτε τους τύπους της άσκησης 1.4.

3.31. Ποιο λάθος γίνεται στους παρακάτω συλλογισμούς;

(i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n \frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right)}_{n \text{ φορές}} = \underbrace{0 + \dots + 0}_{n \text{ φορές}} = 0.$

(ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{n \text{ φορές}} = \underbrace{1 \cdots 1}_{n \text{ φορές}} = 1.$

Τουλάχιστον στην περίπτωση (i) είναι σαφές ότι πρέπει να υπάρχει λάθος στον συλλογισμό με τον οποίο προκύπτει όριο ίσο με 0, αφού, προφανώς, είναι $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n \frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1.$

3.6 Όρια και ανισότητες

Πρόταση 3.5. Έστω $x_n \leq y_n$ για κάθε n .

(i) Αν $x_n \rightarrow +\infty$, τότε $y_n \rightarrow +\infty$.

(ii) Αν $y_n \rightarrow -\infty$, τότε $x_n \rightarrow -\infty$.

Απόδειξη. (i) Έστω $x_n \rightarrow +\infty$. Έστω $M > 0$. Αν το n είναι αρκετά μεγάλο, τότε ισχύει $x_n > M$, οπότε ισχύει $y_n \geq x_n > M$. Επομένως, $y_n \rightarrow +\infty$.

(ii) Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του (i). □

Παράδειγμα 3.73. Από την ανισότητα $n+(-1)^{n-1} \geq n-1$ και από το όριο $n-1 \rightarrow +\infty$ συνεπάγεται το όριο $n+(-1)^{n-1} \rightarrow +\infty$.

Παράδειγμα 3.74. Από την $\frac{n^2+2n+1}{n+2} \geq n$ και από το $n \rightarrow +\infty$ συνεπάγεται $\frac{n^2+2n+1}{n+2} \rightarrow +\infty$.

Παράδειγμα 3.75. Από την $[\sqrt{n}] > \sqrt{n} - 1$ και από το $\sqrt{n} - 1 \rightarrow +\infty$ συνεπάγεται $[\sqrt{n}] \rightarrow +\infty$.

Παράδειγμα 3.76. Από την $n! \geq n$ και από το $n \rightarrow +\infty$ συνεπάγεται $n! \rightarrow +\infty$.

Πρόταση 3.6. Έστω $x_n \leq y_n$ για κάθε n . Αν $x_n \rightarrow x$ και $y_n \rightarrow y$, τότε $x \leq y$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι $x > y$, οπότε ο αριθμός $\frac{x-y}{2}$ είναι > 0 . Επειδή $x_n \rightarrow x$ και $y_n \rightarrow y$, αν το n είναι αρκετά μεγάλο, τότε ισχύει

$$|x_n - x| < \frac{x-y}{2}, \quad |y_n - y| < \frac{x-y}{2},$$

οπότε

$$x_n > x - \frac{x-y}{2} = \frac{x+y}{2}, \quad y_n < y + \frac{x-y}{2} = \frac{x+y}{2}.$$

Άρα, αν το n είναι αρκετά μεγάλο, τότε ισχύει $x_n > \frac{x+y}{2} > y_n$, το οποίο αντιφάσκει με το ότι ισχύει $x_n \leq y_n$ για κάθε n . □

Παράδειγμα 3.77. Αν $x_n \geq a$ για κάθε n και $x_n \rightarrow x$, τότε $x \geq a$. Πράγματι, θεωρούμε τη σταθερή ακολουθία (a) και, αφού $a \leq x_n$ για κάθε n και $a \rightarrow a$ και $x_n \rightarrow x$, συνεπάγεται $a \leq x$.

Αν $x_n \leq b$ για κάθε n και $x_n \rightarrow x$, τότε $x \leq b$. Η απόδειξη είναι παρόμοια με την προηγούμενη.

Αν $x_n \in [a, b]$ για κάθε n και $x_n \rightarrow x$, τότε $x \in [a, b]$. Αυτό είναι συνδυασμός των δύο προηγούμενων.

Αν $x_n < y_n$ για κάθε n και $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$, τότε δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $x < y$. Σκεφτόμαστε ότι από την $x_n < y_n$ συνεπάγεται $x_n \leq y_n$ για κάθε n , οπότε, ως συνέπεια της Πρότασης 3.6, συνεπάγεται $x \leq y$. Ενδέχεται, λοιπόν, να είναι $x = y$.

Παράδειγμα 3.78. Ισχύει $-\frac{1}{n} < \frac{1}{n}$ για κάθε n , αλλά και $-\frac{1}{n} \rightarrow 0$ και $\frac{1}{n} \rightarrow 0$.

Κανόνας παρεμβολής. Έστω $x_n \leq y_n \leq z_n$ για κάθε n . Αν $x_n \rightarrow \rho$ και $z_n \rightarrow \rho$, όπου το ρ είναι αριθμός, τότε $y_n \rightarrow \rho$.

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Αν το n είναι αρκετά μεγάλο, τότε ισχύει $|x_n - \rho| < \epsilon$ και $|z_n - \rho| < \epsilon$, οπότε ισχύει

$$\rho - \epsilon \leq x_n \leq y_n \leq z_n \leq \rho + \epsilon,$$

δηλαδή $|y_n - \rho| < \epsilon$. Επομένως, $y_n \rightarrow \rho$. □

Παράδειγμα 3.79. Από την $\sqrt{n} - 1 < [\sqrt{n}] \leq \sqrt{n}$ συνεπάγεται $1 - \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}} \leq 1$ για κάθε n .

Τώρα, επειδή $1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 1$ και $1 \rightarrow 1$, συνεπάγεται $\frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}} \rightarrow 1$.

Ένα χρήσιμο πόρισμα του κανόνα παρεμβολής είναι το εξής:

Αν $x_n \rightarrow 0$ και y_n είναι φραγμένη, τότε $x_n y_n \rightarrow 0$.

Πράγματι, επειδή y_n είναι φραγμένη, υπάρχει M ώστε να ισχύει $|y_n| \leq M$ για κάθε n . Συνεπάγεται

$$-M|x_n| \leq x_n y_n \leq M|x_n|$$

για κάθε n και, επειδή $M|x_n| \rightarrow 0$ και $-M|x_n| \rightarrow 0$, συνεπάγεται $x_n y_n \rightarrow 0$.

Παράδειγμα 3.80. Η $(-1)^{n-1}$ είναι φραγμένη και $\frac{1}{n} \rightarrow 0$. Άρα $\frac{(-1)^{n-1}}{n} \rightarrow 0$.

Παράδειγμα 3.81. Η $(\sin n)$ είναι φραγμένη και $\frac{1}{n} \rightarrow 0$. Άρα $\frac{\sin n}{n} \rightarrow 0$.

Μέχρι τώρα είδαμε πώς μπορούμε να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα για όρια ακολουθιών, χρησιμοποιώντας ανισοτικές σχέσεις ανάμεσα στους αντίστοιχους όρους τους. Τώρα θα δούμε ένα αποτέλεσμα στην αντίθετη κατεύθυνση.

Πρόταση 3.7. (i) Αν $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n < u$, τότε ισχύει $x_n < u$ από κάποιον δείκτη και πέρα.
(ii) Αν $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n > l$, τότε ισχύει $x_n > l$ από κάποιον δείκτη και πέρα.

Απόδειξη. (i) Έστω $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n < u$.

Έστω $x_n \rightarrow x$, οπότε $x < u$, οπότε ο αριθμός $u - x$ είναι θετικός. Αν το n είναι αρκετά μεγάλο, τότε ισχύει $|x_n - x| < u - x$, οπότε $x_n < x + (u - x) = u$.

Έστω $x_n \rightarrow -\infty$. Αν το n είναι αρκετά μεγάλο, τότε ισχύει $x_n < -|u| - 1 < u$.

(ii) Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του (i), διακρίνοντας περιπτώσεις $x_n \rightarrow x > l$ και $x_n \rightarrow +\infty$. □

Παράδειγμα 3.82. Για να δούμε αν ισχύει $\frac{24n^7 + 323n^5 - 17n^2 + 135}{n^8 - n^6 + 2n^3 - 1} < \frac{1}{1000}$ για κάποιους φυσικούς n , βρίσκουμε ότι $\frac{24n^7 + 323n^5 - 17n^2 + 135}{n^8 - n^6 + 2n^3 - 1} \rightarrow 0$ και, επειδή $0 < \frac{1}{1000}$, συμπεραίνουμε ότι όχι μόνο ισχύει η αρχική ανισότητα για κάποιους φυσικούς n αλλά ότι ισχύει για κάθε n από κάποιο και πέρα. Δηλαδή, υπάρχει κάποιος φυσικός n_0 ώστε να ισχύει η ανισότητα για κάθε $n \geq n_0$.

Παράδειγμα 3.83. Ερώτηση: ισχύει $\frac{n^3-2n+37}{4n^3+1} \geq \frac{2}{3}$ για άπειρους φυσικούς n ;

Υπολογίζουμε: $\frac{n^3-2n+37}{4n^3+1} \rightarrow \frac{1}{4}$. Επειδή $\frac{1}{4} < \frac{2}{3}$, συνεπάγεται ότι ισχύει $\frac{n^3-2n+37}{4n^3+1} < \frac{2}{3}$ για κάθε n από κάποιο και πέρα. Άρα είναι αδύνατον να ισχύει η αντίθετη ανισότητα για άπειρους φυσικούς n .

Έχουμε δει ότι οι ακολουθίες $(\frac{1}{n})$, $(\frac{(-1)^{n-1}}{n})$ και $(\frac{n-1}{n})$ συγκλίνουν και, ταυτόχρονα, είναι φραγμένες. Αυτή η παρατήρηση γενικεύεται, προς τη μία κατεύθυνση, στην Πρόταση 3.8.

Πρόταση 3.8. (i) Αν μία ακολουθία συγκλίνει, τότε αυτή είναι φραγμένη.

(ii) Αν μία ακολουθία αποκλίνει στο $+\infty$, τότε αυτή είναι κάτω φραγμένη, αλλά όχι άνω φραγμένη.

(iii) Αν μία ακολουθία αποκλίνει στο $-\infty$, τότε αυτή είναι άνω φραγμένη, αλλά όχι κάτω φραγμένη.

Απόδειξη. (i) Έστω $x_n \rightarrow x$. Αν το n είναι αρκετά μεγάλο, τότε ισχύει $|x_n - x| < 1$, οπότε το x_n ανήκει στο φραγμένο διάστημα $[x - 1, x + 1]$. Έτσι, έξω από αυτό το διάστημα βρίσκονται μόνο κάποιοι αρχικοί όροι της ακολουθίας, οπότε η ακολουθία είναι φραγμένη.

(ii) Έστω $x_n \rightarrow +\infty$. Αν το n είναι αρκετά μεγάλο, τότε ισχύει $x_n > 1$, οπότε το x_n ανήκει στο διάστημα $[1, +\infty)$. Έτσι, έξω από αυτό το διάστημα βρίσκονται μόνο κάποιοι αρχικοί όροι της ακολουθίας, οπότε η ακολουθία είναι κάτω φραγμένη. Επίσης, για κάθε u , αν το n είναι αρκετά μεγάλο, τότε ισχύει $x_n > u$, οπότε το u δεν είναι άνω φράγμα της (x_n) . Άρα η (x_n) δεν έχει κανένα άνω φράγμα.

(iii) Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του (ii). □

Δεν ισχύουν τα αντίστροφα των τριών μερών της Πρότασης 3.8.

Παράδειγμα 3.84. Η ακολουθία $((-1)^{n-1})$ είναι φραγμένη, αλλά δεν συγκλίνει.

Έχουμε ήδη αποδείξει ότι η ακολουθία $1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, \dots$ είναι κάτω φραγμένη και όχι άνω φραγμένη. Όμως, η ακολουθία δεν αποκλίνει στο $+\infty$.

Ομοίως, η ακολουθία $-1, 0, -3, 0, -5, 0, -7, \dots$ είναι άνω φραγμένη, όχι κάτω φραγμένη και δεν αποκλίνει στο $-\infty$.

Ασκήσεις

3.32. Υπολογίζοντας τα κατάλληλα όρια,

(i) αποδείξτε ότι ισχύει $-n^5 + 25n^3 + 3n < -100$ από κάποιο n και πέρα.

(ii) αποδείξτε ότι ισχύει $n^7 - 35n^6 + n^3 - 47n < 84$ μόνο μέχρι κάποια τιμή του n .

(iii) αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{3}{2} < \frac{7n^3-n+5}{4n^3+n^2+35} < 2$ από κάποιο n και πέρα.

(iv) αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{2n^4-n^3+7}{-n^3+n^2+3} \leq -78$ από κάποιο n και πέρα.

(v) αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{2n^3-n^2-7n+1}{n^3+8n^2+25} \leq 1$ μόνο μέχρι κάποια τιμή του n .

3.33. Υπολογίζοντας τα κατάλληλα όρια,

(i) αποδείξτε ότι οι $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n})$, $(\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^{n+3n}})$ είναι φραγμένες.

(ii) αποδείξτε ότι η $(\frac{4n^5-2n-1}{7n^4+n^3+2})$ είναι κάτω φραγμένη, αλλά όχι άνω φραγμένη.

(iii) αποδείξτε ότι η $(\frac{3-(\log_2 n)^3}{1+\log_2 n+(\log_2 n)^2})$ είναι άνω φραγμένη, αλλά όχι κάτω φραγμένη.

(iv) αποδείξτε ότι οι $((-2)^n \frac{n^3-3}{2n+1})$, $(2^n + 3^n(-1)^{n-1})$, $((2^n + n)(-1)^{n-1} + 2^n - n)$ δεν είναι ούτε άνω φραγμένες ούτε κάτω φραγμένες.

3.34. Αποδείξτε ότι $[nx] - [ny] \rightarrow \begin{cases} +\infty, & \text{αν } x > y, \\ 0, & \text{αν } x = y, \\ -\infty, & \text{αν } x < y. \end{cases}$

Υπόδειξη: Θυμηθείτε τη βασική ανισότητα για το $[x]$ στον ορισμό 1.4.

3.35. (i) Αν ισχύει $\frac{\log_{10} n - 2}{2 \log_{10} n + 4} < x_n < \frac{3+n}{1+2n}$ για κάθε n , αποδείξτε ότι $x_n \rightarrow \frac{1}{2}$.

(ii) Αν ισχύει $n^2 - 2n < n^2 x_n \leq n^2 + 3$ για κάθε n , αποδείξτε ότι $x_n \rightarrow 1$.

(iii) Αν ισχύει $n + 1 \leq 2n x_n \leq n + 2x_n + 3$ για κάθε n , αποδείξτε ότι $x_n \rightarrow \frac{1}{2}$.

(iv) Αν ισχύει $n^2 x_n^2 - 2n(n-1)x_n + n^2 - 2n - 3 \leq 0$ για κάθε n , αποδείξτε ότι $x_n \rightarrow 1$.

3.36. Αποδείξτε ότι $2n + (-1)^{n-1}n \rightarrow +\infty$ και $2n + n \sin n \rightarrow +\infty$.

3.37. Αποδείξτε ότι $[n - \sqrt{n}] \rightarrow +\infty$, $\frac{[\sqrt{n^2+3}]}{n + \sqrt{n}} \rightarrow 1$, $\frac{n+2}{3n^2-n+1} \left[\frac{n^2+1}{n + \sqrt{n}} \right] \rightarrow \frac{1}{3}$.

Υπόδειξη: Θυμηθείτε τη βασική ανισότητα για το $[x]$.

3.38. Αποδείξτε ότι $(1 + \frac{1}{n})^{n^2} \rightarrow +\infty$, $(1 - \frac{1}{n})^{n^2} \rightarrow 0$, $(1 - \frac{1}{n^2})^n \rightarrow 1$, $(1 + \frac{1}{n^2})^n \rightarrow 1$, $(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2})^n \rightarrow 1$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την ανισότητα του Bernoulli στο παράδειγμα 1.17.

3.39. Για κάθε a αποδείξτε ότι $\frac{[a] + [2a] + \dots + [na]}{n^2} \rightarrow \frac{a}{2}$.

Υπόδειξη: Ξαναδείτε τη βασική ανισότητα για το $[x]$ και την ισότητα στο παράδειγμα 1.16.

3.40. Αποδείξτε ότι $\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n} \rightarrow 1$, $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \rightarrow 1$.

Υπόδειξη: Ισχύει $\frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n}{n^2+1}$ για κάθε k με $1 \leq k \leq n$.

3.41. (i) Έστω ότι $x_n \rightarrow +\infty$ και ότι η (y_n) είναι κάτω φραγμένη. Αποδείξτε ότι $x_n + y_n \rightarrow +\infty$.

(ii) Έστω ότι $x_n \rightarrow -\infty$ και ότι η (y_n) είναι άνω φραγμένη. Αποδείξτε ότι $x_n + y_n \rightarrow -\infty$.

(iii) Έστω $x_n \rightarrow +\infty$ ή $-\infty$ και ότι η (y_n) έχει κάποιο θετικό κάτω φράγμα. Αποδείξτε ότι $x_n y_n \rightarrow +\infty$ ή $-\infty$, αντιστοίχως.

(iv) Έστω $x_n \rightarrow +\infty$ ή $-\infty$ και ότι η (y_n) έχει κάποιο αρνητικό άνω φράγμα. Αποδείξτε ότι $x_n y_n \rightarrow -\infty$ ή $+\infty$, αντιστοίχως.

3.42. (i) Έστω $x_n \rightarrow x$ και $y_n \rightarrow y$. Αν $x < y$, αποδείξτε ότι ισχύει $x_n < y_n$ από κάποια τιμή του n και πέρα.

(ii) Έστω $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$ και $x \neq y$. Αν $|x - y| > a$, αποδείξτε ότι ισχύει $|x_n - y_n| > a$ από κάποια τιμή του n και πέρα.

3.43. Γνωρίζουμε ότι, αν $x_n \in [a, b]$ για κάθε n και $x_n \rightarrow x$, τότε $x \in [a, b]$.

Υπάρχει παρόμοιο συμπέρασμα για ανοικτό διάστημα (a, b) ; Ποιο γενικό συμπέρασμα προκύπτει για το x , αν $x_n \in (a, b)$ για κάθε n και $x_n \rightarrow x$;

3.44. Το κριτήριο λόγου για ακολουθίες. Έστω $x_n > 0$ για κάθε n .

(i) Αν $0 < a < 1$ και ισχύει $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq a$ από κάποιο n και πέρα, αποδείξτε ότι $x_n \rightarrow 0$.

Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι από κάποιο n και πέρα η ακολουθία $(\frac{x_n}{a^n})$ είναι φθίνουσα, οπότε η ακολουθία είναι άνω φραγμένη. Άρα για κάποιον αριθμό c ισχύει $0 < x_n \leq ca^n$ για κάθε n .

Αν $a > 1$ και ισχύει $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq a$ από κάποιο n και πέρα, αποδείξτε ότι $x_n \rightarrow +\infty$.

(ii) Αν $0 \leq a < 1$ και $\frac{x_{n+1}}{x_n} \rightarrow a$, αποδείξτε ότι $x_n \rightarrow 0$.

Υπόδειξη: Πάρτε a' ώστε $a < a' < 1$. Τότε ισχύει $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq a'$ από κάποιο n και πέρα.

Αν $a > 1$ και $\frac{x_{n+1}}{x_n} \rightarrow a$, αποδείξτε ότι $x_n \rightarrow +\infty$.

(iii) Εφαρμόστε τα προηγούμενα για να αποδείξετε ότι $\frac{n^b}{a^n} \rightarrow 0$, αν $a > 1$, $b > 0$.

Ομοίως, αποδείξτε ότι $\frac{a^n}{n!} \rightarrow 0$, αν $a > 1$, και ότι $\frac{(2n)!}{(n!)^2} \rightarrow +\infty$.

3.7 Μερικά χρήσιμα όρια

Παράδειγμα 3.85. Κατ' αρχάς, θα ξαναδούμε με άλλον τρόπο το όριο της γεωμετρικής προόδου (a^n) . Εξετάζουμε τις πιο βασικές περιπτώσεις.

Έστω $a > 1$. Από την ανισότητα του Bernoulli στο παράδειγμα 1.17 έχουμε

$$a^n = ((a-1) + 1)^n \geq n(a-1) + 1$$

για κάθε n . Επειδή $n(a-1) + 1 \rightarrow +\infty$, συνεπάγεται $a^n \rightarrow +\infty$.

Τώρα, έστω $0 < |a| < 1$. Τότε $\frac{1}{|a|} > 1$, οπότε από την προηγούμενη περίπτωση συνεπάγεται

$$|a^n| = \left(\frac{1}{|a|}\right)^n \rightarrow \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Τέλος, από την $-|a^n| \leq a^n \leq |a^n|$ και τον κανόνα παρεμβολής συνεπάγεται $a^n \rightarrow 0$.

Παράδειγμα 3.86. Αν $a > 0$, θα αποδείξουμε ότι

$$\sqrt[n]{a} \rightarrow 1.$$

Η περίπτωση $a = 1$ είναι απλή: $\sqrt[n]{1} = 1 \rightarrow 1$.

Έστω $a > 1$. Από την ανισότητα του Bernoulli συνεπάγεται

$$\left(\frac{a-1}{n} + 1\right)^n \geq n\frac{a-1}{n} + 1 = a,$$

οπότε

$$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \frac{a-1}{n} + 1$$

για κάθε n . Από τον κανόνα παρεμβολής παίρνουμε $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$.

Αν $0 < a < 1$, τότε $\frac{1}{a} > 1$, οπότε

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} \rightarrow \frac{1}{1} = 1.$$

Παράδειγμα 3.87. Θα αποδείξουμε ότι

$$\sqrt[n]{n} \rightarrow 1.$$

Από την ανισότητα του Bernoulli συνεπάγεται

$$\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}} + 1\right)^n \geq n\frac{1}{\sqrt[n]{n}} + 1 > \sqrt[n]{n},$$

οπότε

$$1 \leq \sqrt[n]{n} < \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}} + 1\right)^2$$

για κάθε n . Άρα $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ από τον κανόνα παρεμβολής.

Παράδειγμα 3.88. Θα αποδείξουμε ότι

$$\frac{n^b}{a^n} \rightarrow 0 \quad \text{αν } a > 1, b > 0.$$

Προσέξτε: ο κανόνας λόγου δεν εφαρμόζεται, διότι προκύπτει απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$.

Έστω $0 < b < 1$. Τότε, από την ανισότητα του Bernoulli,

$$0 \leq \frac{n^b}{a^n} = \frac{n^b}{((a-1)+1)^n} \leq \frac{n^b}{(a-1)^{n+1}} \leq \frac{n^b}{(a-1)^n} = \frac{1}{(a-1)^{n^{1-b}}}.$$

Επειδή $(a-1)n^{1-b} \rightarrow +\infty$, συνεπάγεται $\frac{n^b}{a^n} \rightarrow 0$ από τον κανόνα παρεμβολής.

Τώρα, έστω $b \geq 1$. Παίρνουμε έναν φυσικό $k > b$, π.χ. το $k = [b] + 1$, και τότε έχουμε $a^{\frac{1}{k}} > 1$ και $0 < \frac{b}{k} < 1$. Από την προηγούμενη περίπτωση παίρνουμε $\frac{n^{\frac{b}{k}}}{(a^{\frac{1}{k}})^n} \rightarrow 0$, οπότε

$$\frac{n^b}{a^n} = \left(\frac{n^{\frac{b}{k}}}{(a^{\frac{1}{k}})^n}\right)^k \rightarrow 0^k = 0.$$

Το n^b τείνει στο $+\infty$ αλλά και το a^n τείνει στο $+\infty$. Από το όριο $\frac{n^b}{a^n} \rightarrow 0$ βλέπουμε ότι:

Αν $a > 1$, $b > 0$, τότε το a^n τείνει στο $+\infty$ πιο γρήγορα απ' ό,τι το n^b τείνει στο $+\infty$.

Παράδειγμα 3.89. Θα αποδείξουμε ότι

$$\frac{a^n}{n!} \rightarrow 0, \quad \text{αν } a > 1.$$

Γνωρίζουμε ότι υπάρχει φυσικός $n_0 > a$, π.χ. το $n_0 = [a] + 1$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$0 \leq \frac{a^n}{n!} = \frac{a^n}{(n_0)!(n_0+1)\cdots n} \leq \frac{a^n}{(n_0)!n_0 \cdots n_0} = \frac{a^n}{(n_0)!n_0^{n-n_0}} = c\left(\frac{a}{n_0}\right)^n,$$

όπου $c = \frac{n_0^{n_0}}{(n_0)!}$. Επειδή $0 \leq \frac{a}{n_0} < 1$, έχουμε ότι $\left(\frac{a}{n_0}\right)^n \rightarrow 0$, οπότε $\frac{a^n}{n!} \rightarrow 0$.

Όπως στο παράδειγμα 3.88, μπορούμε να πούμε ότι:

Αν $a > 1$, τότε το $n!$ τείνει στο $+\infty$ πιο γρήγορα απ' ό,τι το a^n τείνει στο $+\infty$.

Παράδειγμα 3.90. Από τα παραδείγματα 3.88 και 3.89 προκύπτει αμέσως ότι

$$\frac{n^b}{n!} \rightarrow 0 \quad \text{αν } b > 0.$$

Πράγματι, $\frac{n^b}{n!} = \frac{n^b}{a^n} \frac{a^n}{n!} \rightarrow 0 \cdot 0 = 0$.

Επομένως,

Αν $b > 0$, τότε το $n!$ τείνει στο $+\infty$ πιο γρήγορα απ' ό,τι το n^b τείνει στο $+\infty$.

Τη χρήσιμη έκφραση «πιο γρήγορα» και την ανάλογη «πιο αργά» μπορούμε να τις γενικεύσουμε με τυπικό τρόπο ως εξής.

Ορισμός 3.14. Έστω $a_n \rightarrow +\infty$ και $b_n \rightarrow +\infty$. Αν $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$, τότε λέμε ότι το a_n τείνει στο $+\infty$ **πιο αργά** απ' ό,τι το b_n τείνει στο $+\infty$, καθώς και ότι το b_n τείνει στο $+\infty$ **πιο γρήγορα** απ' ό,τι το a_n τείνει στο $+\infty$.

Υπάρχουν και οι ανάλογες εκφράσεις για σύγκλιση στο 0.

Ορισμός 3.15. Έστω $a_n \rightarrow 0$ και $b_n \rightarrow 0$. Αν $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$, τότε λέμε ότι το a_n τείνει στο 0 **πιο γρήγορα** απ' ό,τι το b_n τείνει στο 0, καθώς και ότι το b_n τείνει στο 0 **πιο αργά** απ' ό,τι το a_n τείνει στο 0.

Παράδειγμα 3.91. Έστω $0 < b_1 < b_2$. Τότε το n^{b_2} τείνει στο $+\infty$ πιο γρήγορα απ' ό,τι το n^{b_1} τείνει στο $+\infty$. Επίσης, το $\frac{1}{n^{b_2}}$ τείνει στο 0 πιο γρήγορα απ' ό,τι το $\frac{1}{n^{b_1}}$ τείνει στο 0.

Πράγματι, $\frac{n^{b_1}}{n^{b_2}} = \frac{1}{n^{b_2-b_1}} \rightarrow 0$ και $\frac{\frac{1}{n^{b_2}}}{\frac{1}{n^{b_1}}} = \frac{1}{n^{b_2-b_1}} \rightarrow 0$.

Παράδειγμα 3.92. Έστω $1 < a_1 < a_2$. Τότε το a_2^n τείνει στο $+\infty$ πιο γρήγορα απ' ό,τι το a_1^n τείνει στο $+\infty$. Επίσης, το $\frac{1}{a_2^n}$ τείνει στο 0 πιο γρήγορα απ' ό,τι το $\frac{1}{a_1^n}$ τείνει στο 0.

Πράγματι, $\frac{a_1^n}{a_2^n} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^n \rightarrow 0$ και $\frac{\frac{1}{a_2^n}}{\frac{1}{a_1^n}} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^n \rightarrow 0$.

Ασκήσεις

3.45. Αποδείξτε ότι $2^n - n^3 \rightarrow +\infty$, $2^n - 3^n + n^2 \rightarrow -\infty$, $\frac{n^4 2^n + 1}{3^n - n^2 2^n} \rightarrow 0$, $\frac{n 2^n + 3^n}{3^n - n^2 + 4} \rightarrow 1$, $3^n - 2^n n^3 \rightarrow +\infty$, $n! - n^4 \rightarrow +\infty$, $n! - 2^n \rightarrow +\infty$, $n! - 2^n n^4 \rightarrow +\infty$, $\frac{n 2^n - 3^n}{n! - 3^n} \rightarrow 0$.

Υπόδειξη: Για το πρώτο όριο γράψτε $2^n - n^3 = 2^n(1 - \frac{n^3}{2^n})$.

3.46. Αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{n^3} \rightarrow 1$, $\sqrt[n]{n^4 + 3n^2 + n + 1} \rightarrow 1$, $\sqrt[n]{n^3 - 2n + 1} \rightarrow 1$.

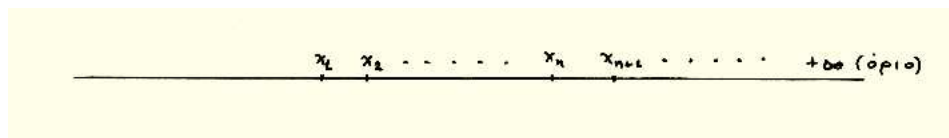
Υπόδειξη: Για το δεύτερο όριο δείτε ότι $n^4 \leq n^4 + 3n^2 + n + 1 \leq 6n^4$.

3.47. Έστω $0 \leq a \leq b \leq c$. Αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{a^n + b^n} \rightarrow b$, $\sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} \rightarrow c$.

Υπόδειξη: Για το πρώτο όριο δείτε ότι $b^n \leq a^n + b^n \leq 2b^n$.

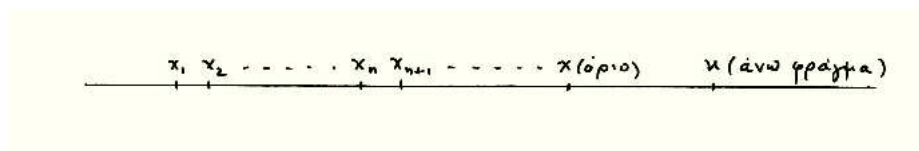
3.8 Όριο μονότονης ακολουθίας

Έστω ότι η (x_n) είναι *αύξουσα* ακολουθία. Αυτό σημαίνει ότι, όταν το n αυξάνεται, τότε το x_n κινείται προς τα δεξιά πάνω στην πραγματική ευθεία. Τώρα έχουμε δύο περιπτώσεις. Παρατηρήστε το σχήμα 3.1. Αν η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη, το x_n απομακρύνεται προς τα δεξιά και η (x_n) έχει όριο το $+\infty$.



Σχήμα 3.1

Τώρα παρατηρήστε το σχήμα 3.2. Αν η (x_n) είναι άνω φραγμένη, το x_n δεν ξεπερνά κάποιο σταθερό σημείο δεξιά του το οποίο, προφανώς, είναι άνω φράγμα της ακολουθίας. Τότε το x_n , κινούμενο προς τα δεξιά, προσεγγίζει αναπόφευκτα κάποιο σημείο x , οπότε η (x_n) έχει όριο αυτό το x . Είναι σαφές ότι το σημείο x είναι στα δεξιά όλων των x_n , δηλαδή είναι άνω φράγμα της ακολουθίας. Μάλιστα, είναι εύκολο να δούμε ότι το x είναι το *ελάχιστο άνω φράγμα* της (x_n) . Πράγματι, αν u είναι οποιοδήποτε άνω φράγμα της ακολουθίας, δηλαδή αν $x_n \leq u$ για κάθε n , τότε από τις ιδιότητες των ορίων και από το ότι $x_n \rightarrow x$ συνεπάγεται $x \leq u$.



Σχήμα 3.2

Παράδειγμα 3.93. Οι ακολουθίες (n) και (n^2) είναι αύξουσες και δεν είναι άνω φραγμένες. Και οι δύο έχουν όριο $+\infty$.

Παράδειγμα 3.94. Η ακολουθία $(\frac{n-1}{n})$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη. Π.χ. ισχύει $\frac{n-1}{n} \leq 2$ για κάθε n , οπότε το 2 είναι άνω φράγμα της ακολουθίας. Η ακολουθία προσεγγίζει το 1 το οποίο είναι το όριό της και, μάλιστα, είναι το μικρότερο από τα άνω φράγματα της ακολουθίας.

Παρόμοιους συλλογισμούς κάνουμε για μία *φθίνουσα* ακολουθία (x_n) . Τώρα, όταν το n αυξάνεται, τότε το x_n κινείται προς τα αριστερά και έχουμε δύο περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση η (x_n) δεν είναι κάτω φραγμένη και τότε το x_n απομακρύνεται προς τα αριστερά, οπότε η (x_n) έχει όριο το $-\infty$. Στη δεύτερη περίπτωση η (x_n) είναι κάτω φραγμένη, οπότε το x_n δεν ξεπερνά κάποιο σταθερό σημείο αριστερά του, το οποίο είναι κάτω φράγμα της ακολουθίας. Τότε το x_n , κινούμενο προς τα αριστερά, προσεγγίζει, αναπόφευκτα, κάποιο σημείο x , οπότε η (x_n) έχει όριο αυτό το x . Επίσης, το x είναι το *μέγιστο κάτω φράγμα* της (x_n) .

Συνοψίζουμε:

Θεώρημα 3.1. Κάθε μονότονη ακολουθία (x_n) έχει όριο. Πιο συγκεκριμένα:

- (i) Αν η (x_n) είναι αύξουσα, τότε είτε δεν είναι άνω φραγμένη και αποκλίνει στο $+\infty$ είτε είναι άνω φραγμένη και συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, ο οποίος, εκτός από όριο της (x_n) , είναι και το ελάχιστο άνω φράγμα της.
- (ii) Αν η (x_n) είναι φθίνουσα, τότε είτε δεν είναι κάτω φραγμένη και αποκλίνει στο $-\infty$ είτε είναι κάτω φραγμένη και συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, ο οποίος, εκτός από όριο της (x_n) , είναι και το μέγιστο κάτω φράγμα της.

Η αυστηρά αναλυτική απόδειξη του Θεωρήματος 3.1 βρίσκεται στην ενότητα 11.7 του κεφαλαίου 11.¹

¹Για περισσότερα δείτε τις σημειώσεις «Ανάλυση» [1].

Το Θεώρημα 3.1 είναι πολύτιμο. Από θεωρητική σκοπιά: συμπεραίνουμε ότι κάθε μονότονη ακολουθία έχει, οπωσδήποτε, όριο. Από πρακτική σκοπιά: συμπεραίνουμε για μία δοσμένη ακολουθία ότι έχει όριο, αρκεί μόνο να ελέγξουμε ότι είναι μονότονη, χωρίς να χρειάζεται να μαντέψουμε από πριν το πιθανό όριό της. Προσέξτε: για να αποδείξουμε με τον ορισμό του ορίου ότι μία ακολουθία έχει όριο, πρέπει να γνωρίζουμε ή να μαντέψουμε το υποψήφιο όριό της ώστε, κατόπιν, να αποδείξουμε με υπολογισμούς ότι η απόσταση του n -οστού όρου της από αυτό θα γίνει μικρότερη από κάθε θετικό αριθμό όταν ο δείκτης γίνει αρκετά μεγάλος.

Το Θεώρημα 3.1 δεν παρέχει τρόπο υπολογισμού του ορίου μονότονης ακολουθίας. Όμως, εκμεταλλευόμενοι την πληροφορία ότι μία συγκεκριμένη ακολουθία έχει όριο, μπορεί να καταφέρουμε με κάποιον τρόπο, ανάλογα με την περίπτωση, να υπολογίσουμε και την τιμή του ορίου. Δείτε, για παράδειγμα, την άσκηση 3.26 καθώς και το ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.95. Ας θεωρήσουμε την (x_n) η οποία ορίζεται από τον πρώτο όρο της και από έναν αναδρομικό τύπο ως εξής:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \sqrt{2x_n} \quad \text{για κάθε } n \geq 1.$$

Οι αρχικοί όροι της (x_n) είναι: $1, \sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots$. Από αυτούς υποψιαζόμαστε ότι η ακολουθία είναι αύξουσα και το αποδεικνύουμε με επαγωγή. Προφανώς, ισχύει $x_1 \leq x_2$, δηλαδή $1 \leq \sqrt{2}$, και υποθέτουμε ότι για κάποιο n ισχύει $x_n \leq x_{n+1}$. Κατ' αρχάς, όλοι οι όροι είναι μη-αρνητικοί, διότι ο πρώτος είναι 1 και όλοι οι άλλοι είναι τετραγωνικές ρίζες. Επομένως, έχουμε, διαδοχικά:

$$x_n \leq x_{n+1} \Rightarrow 2x_n \leq 2x_{n+1} \Rightarrow \sqrt{2x_n} \leq \sqrt{2x_{n+1}} \Rightarrow x_{n+1} \leq x_{n+2}.$$

Συμπεραίνουμε ότι η ανισότητα $x_n \leq x_{n+1}$ ισχύει για κάθε n , οπότε η ακολουθία είναι αύξουσα, οπότε έχει όριο το οποίο είναι αριθμός ή $+\infty$.

Από την $x_n \leq x_{n+1}$ και από τον αναδρομικό τύπο έχουμε

$$x_n \leq x_{n+1} \Rightarrow x_n \leq \sqrt{2x_n} \Rightarrow x_n \leq 2$$

για κάθε n . Άρα η (x_n) είναι και άνω φραγμένη, οπότε συγκλίνει σε αριθμό.

Συμβολίζουμε x το άγνωστο όριο της (x_n) . Δηλαδή, $x_n \rightarrow x$, οπότε και $x_{n+1} \rightarrow x$.

Παίρνοντας όριο των δύο μελών της ισότητας $x_{n+1}^2 = 2x_n$, βρίσκουμε

$$x^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1}^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2x_n = 2x,$$

οπότε $x = 0$ ή $x = 2$.

Η περίπτωση $x = 0$ αποκλείεται, διότι η ακολουθία είναι αύξουσα με πρώτο όρο το 1, οπότε όλοι οι όροι της είναι ≥ 1 , οπότε και το όριό της πρέπει να είναι ≥ 1 . Άρα $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 2$.

Υπάρχει και ένας δεύτερος τρόπος να αποδειχθεί ότι η (x_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη. Η ανισότητα $x_n \leq x_{n+1}$ είναι ισοδύναμη με την $x_n \leq \sqrt{2x_n}$ και, επειδή έχουμε ήδη παρατηρήσει ότι ισχύει $x_n \geq 0$ για κάθε n , αυτή είναι ισοδύναμη με την $x_n \leq 2$. Επομένως, αν αποδείξουμε ότι ισχύει $x_n \leq 2$ για κάθε n , τότε θα έχουμε αποδείξει ότι η (x_n) είναι αύξουσα και, ταυτόχρονα, ότι είναι άνω φραγμένη με άνω φράγμα το 2. Αυτό μπορεί να γίνει με επαγωγή. Η $x_1 \leq 2$ είναι, προφανώς, σωστή. Έστω ότι ισχύει $x_n \leq 2$ για κάποιο n . Τότε $x_{n+1} = \sqrt{2x_n} \leq \sqrt{4} = 2$, οπότε ισχύει $x_n \leq 2$ για κάθε n .

Η ακολουθία την οποία εξετάζει η Πρόταση 3.9 είναι θεμελιώδης!

Πρόταση 3.9. Η ακολουθία $((1 + \frac{1}{n})^n)$ είναι γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη, οπότε συγκλίνει.

Απόδειξη. Η ανισότητα $(1 + \frac{1}{n})^n < (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}$ ισοδυναμεί με την $(\frac{n+1}{n})^n < (\frac{n+2}{n+1})^{n+1}$ και αυτή με την $\frac{n}{n+1}(\frac{n+1}{n})^{n+1} < (\frac{n+2}{n+1})^{n+1}$ και αυτή με την $\frac{n}{n+1} < (\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1})^{n+1}$ και αυτή με την $\frac{n}{n+1} < (1 - \frac{1}{n^2+2n+1})^{n+1}$, η οποία είναι άμεση συνέπεια της ανισότητας του Bernoulli. Πράγματι,

$$(1 - \frac{1}{n^2+2n+1})^{n+1} > 1 - \frac{n+1}{n^2+2n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Άρα η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα.

Πάλι από την ανισότητα του Bernoulli συνεπάγεται

$$\begin{aligned} (\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}})^n &= (1 - \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}})^n \geq 1 - n \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} > 1 - n \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \\ &= 1 - \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = 1 - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} > 1 - \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Από την $\frac{1}{2} < (\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}})^n$ συνεπάγεται $(1 + \frac{1}{n})^n < 4$. □

Ορισμός 3.16. Συμβολίζουμε με το γράμμα e το όριο της $((1 + \frac{1}{n})^n)$. Δηλαδή, ορίζουμε

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n.$$

Ο αριθμός e είναι ένας από τους σημαντικότερους αριθμούς για την επιστήμη.

Πολύ αργότερα, στην Πρόταση 9.8, θα αποδείξουμε ότι το e δεν είναι ρητός. Προς το παρόν, μπορούμε να εκτιμήσουμε, σε αδρές γραμμές, την τιμή του e ως ακολούθως. Όπως είδαμε στην απόδειξη της Πρότασης 3.9, ισχύει $(1 + \frac{1}{n})^n < 4$ για κάθε n . Παίρνοντας όριο των δύο πλευρών αυτής της ανισότητας, βλέπουμε ότι $e \leq 4$. Επίσης, επειδή $(1 + \frac{1}{1})^1 = 2$ και η $((1 + \frac{1}{n})^n)$ είναι αύξουσα, συνεπάγεται ότι ισχύει $(1 + \frac{1}{n})^n \geq 2$ για κάθε n . Παίρνοντας πάλι όριο, βλέπουμε ότι $e \geq 2$. Δηλαδή,

$$2 \leq e \leq 4.$$

Ορισμός 3.17. Ονομάζουμε *φυσικούς λογαρίθμους* τους λογαρίθμους με βάση το e και χρησιμοποιούμε για κάθε $y > 0$ τα απλούστερα σύμβολα $\log y$ και $\ln y$ αντί του $\log_e y$. Δηλαδή, με τα σύμβολα $\log y$ και $\ln y$ καταλαβαίνουμε ότι:

$$e^{\log y} = y, \quad e^{\ln y} = y.$$

Με άλλα λόγια, ισχύει η ισοδυναμία:

$$x = \log y = \ln y \quad \Leftrightarrow \quad e^x = y.$$

Η Πρόταση 3.10 είναι εξειδίκευση της Πρότασης 1.5.

Πρόταση 3.10. (i) Για κάθε $y > 0, z > 0$ ισχύει

$$\log(yz) = \log y + \log z.$$

(ii) Για κάθε $y > 0, z > 0$ ισχύει

$$\log \frac{y}{z} = \log y - \log z.$$

(iii) Για κάθε $y > 0$ και κάθε z ισχύει

$$\log y^z = z \log y.$$

(iv) $\log 1 = 0$ και $\log e = 1$.

(v) Εστω $0 < y_1 < y_2$. Τότε $\log y_1 < \log y_2$.

Ασκήσεις

3.48. Αποδείξτε ότι $(1 + \frac{1}{n})^{n+3} \rightarrow e$, $(1 + \frac{1}{n+2})^n \rightarrow e$, $(1 + \frac{1}{n+2})^{3n+5} \rightarrow e^3$, $(1 - \frac{1}{n})^n \rightarrow e^{-1}$, $(1 + \frac{2}{n})^n \rightarrow e^2$, $(1 - \frac{2}{n})^n \rightarrow e^{-2}$.

Υπόδειξη: Για το δεύτερο όριο, γράψτε $(1 + \frac{1}{n+2})^n = \frac{(1 + \frac{1}{n+2})^{n+2}}{(1 + \frac{1}{n+2})^2}$.

Για το τέταρτο όριο, γράψτε $(1 - \frac{1}{n})^n = \frac{1}{(\frac{n}{n-1})^n} = \frac{1}{(1 + \frac{1}{n-1})^n} = \frac{1}{(1 + \frac{1}{n-1})^{n-1} (1 + \frac{1}{n-1})}$.

Για το πέμπτο όριο, γράψτε $(1 + \frac{2}{n})^n = (\frac{n+2}{n})^n = (\frac{n+2}{n+1})^n (\frac{n+1}{n})^n = (1 + \frac{1}{n+1})^n (1 + \frac{1}{n})^n$.

3.49. Έστω $a > 0$, $a \neq 1$. Από την άσκηση 1.31 έχουμε τον τύπο **αλλαγής βάσης** λογαρίθμου:

$$\log_a y = \frac{1}{\log a} \log y$$

για κάθε $y > 0$.

3.50. Έστω $0 < x_1 < 1$ και $x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - x_n}$ για κάθε n . Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη και ότι $x_n \rightarrow 0$.

3.51. Έστω $x_1 = 1$ και $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n^2}$ για κάθε n . Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι αύξουσα και ότι $x_n \rightarrow +\infty$.

3.52. Έστω $x_1 = x_2 = 1$ και $\frac{1}{x_{n+2}} = \frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_n}$ για κάθε n . Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη και ότι $x_n \rightarrow 0$.

3.53. Έστω $4x_{n+1} = x_n^2 + 3$ για κάθε n . Αποδείξτε ότι, ανάλογα με την τιμή του x_1 , η (x_n) είναι αύξουσα ή φθίνουσα. Αποδείξτε ότι, αν η (x_n) δεν είναι σταθερή (3), τότε θα είχε όριο 3, τότε τα μόνα πιθανά όριά της είναι το 1 και το $+\infty$.

Υπόδειξη: Προσπαθώντας να αποδείξετε τη μονοτονία της (x_n) , θα δείτε ότι οι όροι της πρέπει να ανήκουν σε συγκεκριμένα διαστήματα. Διακρίνοντας περιπτώσεις ως προς τη θέση του x_1 σε σχέση με αυτά τα διαστήματα, προσδιορίστε με επαγωγή τη θέση όλων των όρων της ακολουθίας σε σχέση με τα ίδια διαστήματα. Κατόπιν, αποδείξτε τη μονοτονία της ακολουθίας.

3.54. Έστω $7x_{n+1} = x_n^3 + 6$ για κάθε n . Αποδείξτε ότι, ανάλογα με την τιμή του x_1 , η (x_n) είναι αύξουσα ή φθίνουσα. Αποδείξτε ότι, αν η (x_n) δεν είναι σταθερή (-3) ή σταθερή (2), τότε θα είχε όριο -3 ή 2, αντιστοίχως, τότε τα μόνα πιθανά όριά της είναι το $-\infty$, το 1 και το $+\infty$.

3.55. Έστω $\lambda > 0$, $x_1 > 0$ και $x_{n+1} = \sqrt{\lambda + x_n}$ για κάθε n . Αποδείξτε ότι, ανάλογα με την τιμή του x_1 , η (x_n) είναι αύξουσα ή φθίνουσα. Αποδείξτε ότι $x_n \rightarrow \frac{1 + \sqrt{1 + 4\lambda}}{2}$.

3.56. Έστω $x_1 > 0$ και $x_{n+1} = \frac{6 + 6x_n}{7 + x_n}$ για κάθε n . Αποδείξτε ότι, ανάλογα με την τιμή του x_1 , η (x_n) είναι αύξουσα ή φθίνουσα. Αποδείξτε ότι $x_n \rightarrow 2$.

3.57. Έστω $a > 0$, $x_1 > 0$ και $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$ για κάθε n . Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι, από τον δεύτερο όρο της και πέρα, φθίνουσα, ότι είναι κάτω φραγμένη και ότι $x_n \rightarrow \sqrt{a}$.

3.58. Έστω (x_n) με δοσμένο x_1 και ώστε $x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$ για κάθε n .

(i) Αποδείξτε ότι ορίζεται η (x_n) , βάσει του παραπάνω αναδρομικού τύπου, αν και μόνο αν $x_1 \neq \frac{k-1}{k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

(ii) Αν $x_1 \neq \frac{k-1}{k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι η (x_n) , η οποία ορίζεται με τον παραπάνω αναδρομικό τύπο, είναι μετά από κάποια τιμή του n φθίνουσα και ότι $x_n \rightarrow 1$.

3.59. Έστω $x_1 > 0$ και $x_{n+1} = 1 + \frac{2}{x_n}$ για κάθε n . Αποδείξτε ότι η μία από τις υπακολουθίες (x_{2k}) , (x_{2k-1}) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη και η άλλη είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη. Αποδείξτε ότι $x_n \rightarrow 2$.

3.60. Έστω $x_1 > 0$ και $x_{n+1} = 1 + \frac{3}{1+x_n}$ για κάθε n . Αποδείξτε ότι η μία από τις υποκολουθίες (x_{2k}) , (x_{2k-1}) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη και η άλλη είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη. Αποδείξτε ότι $x_n \rightarrow 2$.

3.61. Έστω $0 < p < 1$ και $x_{n+2} = (1-p)x_{n+1} + px_n$ για κάθε n . Αποδείξτε ότι η μία από τις υποκολουθίες (x_{2k}) , (x_{2k-1}) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη και η άλλη είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη. Βρείτε τύπο για το $y_n = x_{n+1} - x_n$. Κατόπιν, βρείτε τύπο για το x_n και αποδείξτε ότι $x_n \rightarrow \frac{px_1+x_2}{p+1}$.

3.62. Έστω $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ και $x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n$ για κάθε n . Αποδείξτε ότι $\frac{x_{n+1}}{x_n} \rightarrow 2$.

3.63. Εναλλακτικές αποδείξεις για κάποια γνωστά όρια.

(i) Αν $a > 1$, αποδείξτε ότι η (a^n) είναι αύξουσα. Χρησιμοποιώντας τη σχέση $a^{n+1} = aa^n$, αποδείξτε ότι $a^n \rightarrow +\infty$. Μελετήστε με τον ίδιο τρόπο και την περίπτωση $0 < a < 1$.

(ii) Αν $a > 1$ και $b > 0$, αποδείξτε ότι η $(\frac{a^n}{n^b})$ είναι από κάποια τιμή του n και πέρα αύξουσα. Χρησιμοποιώντας τη σχέση $\frac{a^{n+1}}{(n+1)^b} = a \frac{n^b}{(n+1)^b} \frac{a^n}{n^b}$, αποδείξτε ότι $\frac{a^n}{n^b} \rightarrow +\infty$.

(iii) Αν $a > 1$, αποδείξτε ότι η $(\sqrt[n]{a})$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη. Χρησιμοποιώντας τη σχέση $(\sqrt[n]{a})^2 = \sqrt[n]{a}$, αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$. Τι γίνεται στις περιπτώσεις $a = 1$, $0 < a < 1$;

(iv) Αποδείξτε ότι η $(\sqrt[n]{n})$ είναι από τον τρίτο όρο της και πέρα φθίνουσα, ότι είναι κάτω φραγμένη και ότι $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$.

(v) Αν $a > 0$, αποδείξτε ότι η $(\frac{a^n}{n!})$ είναι από κάποια τιμή του n και πέρα φθίνουσα. Χρησιμοποιώντας τη σχέση $\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a^n}{n!} \frac{a}{n+1}$, αποδείξτε ότι $\frac{a^n}{n!} \rightarrow 0$.

3.64. Έστω (x_n) , (y_n) ώστε $0 < x_1 \leq y_1$ και $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$ και $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$ για κάθε n . Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι αύξουσα, ότι η (y_n) είναι φθίνουσα και ότι $x_n \leq y_n$ για κάθε n . Αποδείξτε ότι οι (x_n) , (y_n) συγκλίνουν και ότι έχουν το ίδιο όριο.

3.65. Έστω (x_n) , (y_n) ώστε $0 < x_1 \leq y_1$ και $x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$ και $y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$ για κάθε n . Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι αύξουσα, ότι η (y_n) είναι φθίνουσα και ότι $x_n \leq y_n$ για κάθε n . Αποδείξτε ότι οι (x_n) , (y_n) συγκλίνουν και ότι έχουν το ίδιο όριο.

3.66. Έστω $a > 0$. Αποδείξτε ότι

$$\frac{a^n n!}{n^n} \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{αν } a < e, \\ +\infty, & \text{αν } a > e. \end{cases}$$

Υπόδειξη: Δείτε το κριτήριο λόγου στην άσκηση 3.44.

3.67. Αποδείξτε ότι

$$(1 + \frac{m}{n})^n \rightarrow e^m \quad \text{για κάθε } m \in \mathbb{Z}.$$

Υπόδειξη: Για $m \in \mathbb{N}$ χρησιμοποιήστε επαγωγή. Ξαναδείτε κάποιες περιπτώσεις στην άσκηση 3.48.

Αν το x είναι ρητός, τότε το όριο $(1 + \frac{x}{n})^n \rightarrow e^x$ αποδεικνύεται στην άσκηση 5.19. Αν το x είναι πραγματικός αριθμός, τότε το ίδιο όριο αποδεικνύεται στην άσκηση 6.29.

3.68. (i) Αποδείξτε ότι η $((1 + \frac{1}{n})^{n+1})$ είναι γνησίως φθίνουσα και ότι $(1 + \frac{1}{n})^{n+1} \rightarrow e$.

Υπόδειξη: Μιμηθείτε την απόδειξη της μονοτονίας της $((1 + \frac{1}{n})^n)$.

(ii) Παρατηρήστε ότι ισχύει $(1 + \frac{1}{n})^n < e < (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ για κάθε n .

(iii) Πολλαπλασιάστε τις ανισότητες $(1 + \frac{1}{k})^k < e < (1 + \frac{1}{k})^{k+1}$ για $k = 1, 2, \dots, n-1$ και αποδείξτε ότι $\frac{n^n}{n!} < e^{n-1} < \frac{n^{n+1}}{n!}$ για κάθε n .

(iv) Αποδείξτε ότι

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \rightarrow \frac{1}{e}, \quad \sqrt[n]{n!} \rightarrow +\infty.$$

3.69. Έστω $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log(n+1)$ και $y_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n$ για κάθε n .

Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι γνησίως αύξουσα, ότι η (y_n) είναι γνησίως φθίνουσα και ότι οι δύο ακολουθίες συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό. Το κοινό όριο των δύο ακολουθιών συμβολίζεται γ:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log(n+1)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n).$$

Υπόδειξη: Για τη μονοτονία χρησιμοποιήστε την ανισότητα στο (ii) της άσκησης 3.68.

3.70. Γενίκευση της άσκησης 3.57.

Έστω $a > 0$ και $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Έστω $x_1 > 0$ και $x_{n+1} = \frac{k-1}{k}x_n + \frac{1}{k} \frac{a}{x_n^{k-1}}$ για κάθε n . Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι από τον δεύτερο όρο της και πέρα φθίνουσα και ότι $x_n \geq \sqrt[k]{a}$ για κάθε $n \geq 2$. Συμπεράνατε ότι $x_n \rightarrow \sqrt[k]{a}$.

3.71. Μία ακολουθία (x_n) χαρακτηρίζεται **κυρτή**, αν ισχύει $x_{n+1} \leq \frac{x_n + x_{n+2}}{2}$ για κάθε n . Αν ισχύει η αντίθετη ανισότητα για κάθε n , τότε η ακολουθία χαρακτηρίζεται **κοίλη**.

Έστω ότι η (x_n) είναι κυρτή ακολουθία. Παρατηρήστε ότι τότε η $(x_n - x_{n+1})$ είναι φθίνουσα.

(i) Έστω, επιπλέον, ότι η (x_n) είναι φραγμένη. Αποδείξτε ότι $x_n - x_{n+1} \geq 0$ για κάθε n , δηλαδή ότι η (x_n) είναι φθίνουσα, οπότε συγκλίνει. Τέλος, αποδείξτε ότι $n(x_n - x_{n+1}) \rightarrow 0$.

Υπόδειξη: Έστω $l \leq x_n \leq u$ για κάθε n .

Για το $x_n - x_{n+1} \geq 0$, θεωρήστε $m > n$ και προσθέστε τις $x_n - x_{n+1} \geq x_k - x_{k+1}$ για $k = n, n+1, \dots, m$. Τότε $(m - n + 1)(x_n - x_{n+1}) \geq x_n - x_{m+1} \geq l - u$, οπότε $x_n - x_{n+1} \geq \frac{l-u}{m-n+1}$ για κάθε $m > n$. Πάρτε όριο όταν $m \rightarrow +\infty$.

Για το $n(x_n - x_{n+1}) \rightarrow 0$, θεωρήστε $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ και προσθέστε τις $x_n - x_{n+1} \leq x_k - x_{k+1}$ για $k = m, m+1, \dots, n$. Τότε $(n - m + 1)(x_n - x_{n+1}) \leq x_m - x_{n+1}$, οπότε $0 \leq n(x_n - x_{n+1}) \leq 2(x_m - x_{n+1}) \rightarrow 0$.

(ii) Αν η (x_n) δεν είναι φραγμένη, αποδείξτε ότι, και πάλι, έχει όριο.

3.72. Έστω $x_n = \frac{(2n)! \sqrt{n}}{4^n (n!)^2}$ και $y_n = \frac{(2n)! \sqrt{n+\frac{1}{2}}}{4^n (n!)^2}$ για κάθε n .

Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι αύξουσα, ότι η (y_n) είναι φθίνουσα και ότι οι δύο ακολουθίες έχουν το ίδιο όριο. Η τιμή του ορίου των δύο αυτών ακολουθιών υπολογίζεται στην άσκηση 8.30.

3.73. Μία τράπεζα έχει ετήσιο επιτόκιο κατάθεσης $t\%$ και στη διάρκεια του έτους κάνει n ανατοκισμούς ανά ίσα χρονικά διαστήματα. Δηλαδή, αν 1 σημαίνει ένα έτος, τότε οι ανατοκισμοί γίνονται τις χρονικές στιγμές $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1$. Αν κάποιος καταθέσει κεφάλαιο K στην αρχή του έτους, αποδείξτε ότι στο τέλος του έτους το κεφάλαιο θα γίνει $(1 + \frac{t}{100n})^n K$.

3.74. Έστω K ένας κύκλος με ακτίνα 1.

(i) Έστω P_{2^n} ένα εγγεγραμμένο στον K κανονικό πολύγωνο με 2^n πλευρές, όπου $n \geq 2$. Μπορούμε να κατασκευάσουμε από κάθε P_{2^n} το επόμενο $P_{2^{n+1}}$ ως εξής: θεωρούμε ως κορυφές του $P_{2^{n+1}}$ τις 2^n κορυφές του P_{2^n} , καθώς και τα μέσα των 2^n τόξων στα οποία χωρίζεται ο κύκλος K από τις κορυφές του P_{2^n} , δηλαδή συνολικά $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ σημεία. Αν p_n είναι το μήκος του πολυγώνου

P_{2^n} , αποδείξτε γεωμετρικά τον αναδρομικό τύπο $p_{n+1} = 2p_n / \sqrt{2 + \sqrt{4 - \frac{p_n^2}{4^n}}}$.

(ii) Έστω Q_{2^n} ένα περιγεγραμμένο στον K κανονικό πολύγωνο με 2^n πλευρές καθεμία από τις οποίες εφάπτεται στον K σε μία αντίστοιχη κορυφή του P_{2^n} . Αν q_n είναι το μήκος του πολυγώνου Q_{2^n} , αποδείξτε γεωμετρικά τον αναδρομικό τύπο $q_{n+1} = 4q_n / (2 + \sqrt{4 + \frac{q_n^2}{4^n}})$.

(iii) Αποδείξτε γεωμετρικά ότι τα μήκη q_n και p_n συνδέονται με τη σχέση $q_n = p_n / \sqrt{1 - \frac{p_n^2}{4^{n+1}}}$.

(iv) Αποδείξτε, βάσει των (i), (ii), (iii), ότι η (p_n) είναι γνησίως αύξουσα, ότι η (q_n) είναι γνησίως φθίνουσα και ότι ισχύει $p_n < q_n$ για κάθε $n \geq 2$. Δηλαδή:

$$p_2 < p_3 < \dots < p_n < p_{n+1} < \dots < q_{n+1} < q_n < \dots < q_3 < q_2.$$

(v) Αποδείξτε ότι οι (p_n) , (q_n) έχουν το ίδιο όριο. Με ποιον αριθμό πρέπει να είναι ίσο αυτό το όριο; Μην προσπαθήσετε να αποδείξετε την εικασία σας.

3.9 Βιβλιογραφία

Βασική βιβλιογραφία

- Anton, H. (1984). *Calculus with Analytic Geometry*. Wiley.
- Apostol, T. (1967). *Calculus, Vol I*. Wiley.
- Courant, R. (1988). *Differential and Integral Calculus, Vol I*. Wiley.
- Courant, R., John, F. (1989). *Introduction to Calculus and Analysis, Vol I*. Springer.
- Hardy, G. (2008). *A Course of Pure Mathematics*. Cambridge Univ. Press.
- Landau, E. (2001). *Differential and Integral Calculus*. American Math. Society & Chelsea.
- Nikolsky, S. (1977). *A Course of Mathematical Analysis, Vol I*. Mir Publishers.
- Smirnov, V. I. (1964). *A Course of Higher Mathematics, Vol I*. Pergammon Press.
- Spiegel, M. (1963). *Schaum's Outline of Advanced Calculus*. McGraw Hill.
- Spivak, M. (1994). *Calculus*. Cambridge Univ. Press.
- Thomas, G. (2018). *Calculus*. Pearson.
- Toeplitz, O. (2007). *The Calculus, A Genetic Approach*. The University of Chicago Press.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

4.1 Σύνοψη

Σε αυτό το κεφάλαιο ορίζουμε και μελετάμε την έννοια του ορίου συνάρτησης, είτε αυτό είναι αριθμός είτε είναι άπειρο, με αυστηρό τρόπο: με το ϵ (ή το M) και το δ (ή το N). Αναλύουμε αρκετά παραδείγματα υπολογισμού του δ (ή του N) από το ϵ (ή το M). Δίνουμε έμφαση στην αποτύπωση του ορίου συνάρτησης στο γράφημά της και ορίζουμε την έννοια της ασύμπτωτης ευθείας. Κατόπιν μελετάμε τις βασικές ιδιότητες των ορίων συναρτήσεων σε σχέση με αλγεβρικές πράξεις και με ανισότητες, καθώς και με αλλαγές μεταβλητής. Μελετάμε και τη σχέση ανάμεσα σε όριο συνάρτησης και όριο ακολουθίας. Αποδεικνύουμε τα βασικά όρια για ρητές συναρτήσεις, δυνάμεις, εκθετικές, λογαριθμικές και τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Τέλος, αναφέρουμε το βασικό θεώρημα ότι κάθε μονότονη συνάρτηση έχει όριο.

Προαπαιτούμενη γνώση: Μαθηματικά του Λυκείου, καθώς και τα προηγούμενα κεφάλαια.

4.2 Όριο συνάρτησης

Έστω συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Πολλές φορές μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά του $f(x)$ όταν το x προσεγγίζει έναν αριθμό ξ χωρίς να παίρνει την ίδια την τιμή ξ . Κυρίως, μας ενδιαφέρει, αν τότε το $f(x)$, το οποίο βρίσκεται στην κατακόρυφη πραγματική ευθεία, προσεγγίζει κάποιον αριθμό ή αν ανεβαίνει απερίοριστα, δηλαδή γίνεται απερίοριστα μεγάλο θετικό, ή αν κατεβαίνει απερίοριστα, δηλαδή γίνεται απερίοριστα μεγάλο αρνητικό. Μάλιστα, στις δύο τελευταίες περιπτώσεις μπορούμε να πούμε, παραστατικά, ότι το $f(x)$ προσεγγίζει το $+\infty$ ή το $-\infty$.

Παράδειγμα 4.1. Έστω η συνάρτηση $2x + 1$ και έστω ότι το x προσεγγίζει το 0 χωρίς να είναι ίσο με το 0. Ας πάρουμε, ενδεικτικά, ως τιμές του x τις 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, ..., οι οποίες προσεγγίζουν το 0 από τη δεξιά μεριά του. Οι αντίστοιχες τιμές του $2x + 1$ είναι οι 1.2, 1.02, 1.002, 1.0002, ..., οι οποίες προσεγγίζουν τον αριθμό 1. Ας πάρουμε, επίσης, ως τιμές του x τις -0.1 , -0.01 , -0.001 , -0.0001 , ..., οι οποίες προσεγγίζουν το 0 από την αριστερή μεριά του. Οι αντίστοιχες τιμές του $2x + 1$ είναι οι 0.8, 0.98, 0.998, 0.9998, ..., οι οποίες και αυτές προσεγγίζουν τον αριθμό 1.

Παράδειγμα 4.2. Έστω η συνάρτηση $\frac{1}{x}$ και έστω ότι το x προσεγγίζει το 0 χωρίς να είναι ίσο με το 0. Παίρνοντας πάλι, ενδεικτικά, για το x τις τιμές 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, ..., οι οποίες προσεγγίζουν το 0 από τη δεξιά μεριά του, βρίσκουμε ότι οι αντίστοιχες τιμές του $\frac{1}{x}$ είναι οι 10, 100, 1000, 10000, ..., οι οποίες γίνονται απερίοριστα μεγάλες θετικές, δηλαδή προσεγγίζουν το $+\infty$. Τώρα, όμως, παίρνοντας για το x τις τιμές -0.1 , -0.01 , -0.001 , -0.0001 , ..., οι οποίες προσεγγίζουν το 0 από την αριστερή μεριά του, βρίσκουμε ότι οι αντίστοιχες τιμές του $\frac{1}{x}$ είναι οι -10 , -100 , -1000 , -10000 , ..., οι οποίες γίνονται απερίοριστα μεγάλες αρνητικές, δηλαδή προσεγγίζουν το $-\infty$.

Παπαδημητράκης, Μ. (2024) «Απειροστικός Λογισμός».

Αθήνα: Κάλλιπος, Ανοιχτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. <http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-1011>

 Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Μη Εμπορική Χρήση - Παρόμοια Διανομή 4.0

Άλλες φορές μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά του $f(x)$ όταν το x , στην οριζόντια πραγματική ευθεία, απομακρύνεται προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά, δηλαδή γίνεται απεριόριστα μεγάλο θετικό ή αρνητικό, δηλαδή προσεγγίζει το $+\infty$ ή το $-\infty$.

Παράδειγμα 4.3. Έστω η συνάρτηση $\frac{1}{x^2}$ και ας πάρουμε για το x τις τιμές $-10, -100, -1000, -10000, \dots$. Οι αντίστοιχες τιμές του $\frac{1}{x^2}$ είναι $0.01, 0.0001, 0.000001, 0.00000001, \dots$, οι οποίες προσεγγίζουν το 0. Αναλόγως, αν πάρουμε ως τιμές του x τις $10, 100, 1000, 10000, \dots$, τότε οι αντίστοιχες τιμές του $\frac{1}{x^2}$ είναι και πάλι οι $0.01, 0.0001, 0.000001, 0.00000001, \dots$, οι οποίες προσεγγίζουν το 0.

Στο πρώτο παράδειγμα λέμε ότι το $2x+1$ έχει όριο το 1 όταν το x τείνει στο 0 και τότε γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2x + 1) = 1.$$

Στο δεύτερο παράδειγμα λέμε ότι το $\frac{1}{x}$ έχει όριο το $-\infty$ όταν το x τείνει στο 0 από αριστερά του και ότι το $\frac{1}{x}$ έχει όριο το $+\infty$ όταν το x τείνει στο 0 από δεξιά του και γράφουμε, αντιστοίχως,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Στο τρίτο παράδειγμα λέμε ότι το $\frac{1}{x^2}$ έχει όριο το 0 όταν το x τείνει στο $-\infty$ ή στο $+\infty$ και γράφουμε, αντιστοίχως,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Θα εξετάσουμε τώρα, πιο γενικά αλλά και πιο προσεκτικά, την κατάσταση η οποία μας ενδιαφέρει. Π.χ. σε όλα τα προηγούμενα παραδείγματα πήραμε κάποιες *πολύ συγκεκριμένες* ενδεικτικές τιμές του x , οι οποίες προσεγγίζουν το 0 και είναι $\neq 0$ ή οι οποίες προσεγγίζουν το $-\infty$ ή το $+\infty$, και είδαμε τη συμπεριφορά των αντίστοιχων τιμών του $f(x)$. Παίρνοντας κάποιες άλλες τιμές του x , οι οποίες πάλι προσεγγίζουν το 0 και είναι $\neq 0$ ή οι οποίες προσεγγίζουν το $-\infty$ ή το $+\infty$, θα μπορούσε η συμπεριφορά των αντίστοιχων τιμών του $f(x)$, με την ίδια συνάρτηση, να είναι πολύ διαφορετική.

Έστω, γενικά, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Όταν λέμε ότι μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά του $f(x)$ όταν το x προσεγγίζει το ξ και είναι $\neq \xi$ ή όταν το x προσεγγίζει το $-\infty$ ή το $+\infty$, τότε πρέπει να σκεφτούμε, πριν από οτιδήποτε άλλο, ότι το $f(x)$ πρέπει να ορίζεται, οπότε οι τιμές του x *πρέπει να ανήκουν στο πεδίο ορισμού A της συνάρτησης*. Για παράδειγμα, δεν έχει νόημα να εξετάσουμε τη συμπεριφορά του $\sqrt{x}$ όταν το x προσεγγίζει το οποιοδήποτε αρνητικό ξ ή προσεγγίζει το $-\infty$ ή προσεγγίζει το 0 από την αριστερή του μεριά. Στο πλαίσιο αυτού του περιορισμού, ας δούμε προσεκτικά τις τρεις βασικές περιπτώσεις οι οποίες παρουσιάζονται: το x προσεγγίζει μέσα από το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης έναν αριθμό ξ και είναι $\neq \xi$ ή το $-\infty$ ή το $+\infty$.

(i) Όταν εξετάζουμε τη συμπεριφορά του $f(x)$ όταν το x προσεγγίζει έναν αριθμό ξ και είναι $\neq \xi$, τότε πρέπει να προϋποθέσουμε ότι το πεδίο ορισμού A περιέχει αριθμούς x αριστερά ή δεξιά του ξ οι οποίοι προσεγγίζουν το ξ . Όταν συμβαίνει αυτό, τότε λέμε ότι το ξ είναι **σημείο συσσώρευσης** του συνόλου A . Το A ενδέχεται να περιέχει και το ίδιο το ξ , αλλά αυτό μας είναι αδιάφορο, αφού μας ενδιαφέρουν μόνο τα x στο A τα οποία προσεγγίζουν το ξ και είναι $\neq \xi$.

Όταν εξετάζουμε τη συμπεριφορά του $f(x)$ όταν το x προσεγγίζει το ξ από αριστερά του, τότε πρέπει να προϋποθέσουμε ότι το A περιέχει αριθμούς x αριστερά του ξ οι οποίοι προσεγγίζουν το ξ και μας είναι αδιάφορο αν το A περιέχει το ίδιο το ξ ή αριθμούς δεξιά του ξ . Όταν συμβαίνει αυτό, τότε λέμε ότι το ξ είναι **σημείο συσσώρευσης από αριστερά του** του συνόλου A .

Όταν εξετάζουμε τη συμπεριφορά του $f(x)$ όταν το x προσεγγίζει το ξ από δεξιά του, τότε πρέπει να προϋποθέσουμε ότι το πεδίο ορισμού A περιέχει αριθμούς x δεξιά του ξ οι οποίοι προσεγγίζουν το ξ και μας είναι αδιάφορο αν το A περιέχει το ίδιο το ξ ή αριθμούς αριστερά του ξ . Όταν συμβαίνει αυτό, τότε λέμε ότι το ξ είναι **σημείο συσσώρευσης από δεξιά του** του συνόλου A .

(ii) Όταν μελετάμε τη συμπεριφορά του $f(x)$ όταν το x προσεγγίζει το $-\infty$, τότε πρέπει να προϋποθέσουμε ότι το πεδίο ορισμού A περιέχει αριθμούς x οι οποίοι προσεγγίζουν το $-\infty$. Όταν συμβαίνει αυτό, τότε λέμε ότι το $-\infty$ είναι **σημείο συσσώρευσης** του συνόλου A .

(iii) Όταν μελετάμε τη συμπεριφορά του $f(x)$ όταν το x προσεγγίζει το $+\infty$, τότε πρέπει να υποθέσουμε ότι το πεδίο ορισμού A περιέχει αριθμούς x οι οποίοι προσεγγίζουν το $+\infty$. Όταν συμβαίνει αυτό, τότε λέμε ότι το $+\infty$ είναι **σημείο συσσώρευσης** του συνόλου A .

Οι συναρτήσεις f οι οποίες εμφανίζονται συνήθως έχουν ως πεδίο ορισμού τους A ένα διάστημα ή μία ένωση διαστημάτων. Αν το πεδίο ορισμού A περιέχει ένα διάστημα της μορφής (ξ, b) , τότε το ξ είναι σημείο συσσώρευσης από δεξιά του του A . Ομοίως, αν το A περιέχει ένα διάστημα της μορφής (a, ξ) , τότε το ξ είναι σημείο συσσώρευσης από αριστερά του του A . Τέλος, αν το A περιέχει δύο διαστήματα της μορφής (a, ξ) και (ξ, b) , δηλαδή αν το A περιέχει την ένωση $(a, \xi) \cup (\xi, b)$, τότε το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A και, μάλιστα, και από δεξιά του και από αριστερά του. Ενώ, αν το A περιέχει ένα διάστημα (a, ξ) , αλλά του λείπει ένα διάστημα (ξ, b) , τότε το ξ είναι σημείο συσσώρευσης από αριστερά του, αλλά όχι από δεξιά του του A . Συμμετρικά, αν το A περιέχει ένα διάστημα (ξ, b) , αλλά του λείπει ένα διάστημα (a, ξ) , τότε το ξ είναι σημείο συσσώρευσης από δεξιά του, αλλά όχι από αριστερά του του A . Τώρα, αν το A περιέχει ένα διάστημα της μορφής $(-\infty, b)$, τότε το $-\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A . Ενώ, αν το A περιέχει ένα διάστημα της μορφής $(a, +\infty)$, τότε το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A .

Παράδειγμα 4.4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $3x + 2$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ το οποίο περιέχει δύο διαστήματα αριστερά και δεξιά του 1, οπότε το 1 είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού. Η συνάρτηση είναι ορισμένη και στο 1, αλλά αυτό δεν μας ενδιαφέρει.

Η απλή εμπειρία από αριθμητικές πράξεις δείχνει ότι, όταν το x προσεγγίζει το 1, είτε από αριστερά του είτε από δεξιά του, τότε το αντίστοιχο $3x + 2$ προσεγγίζει το 5. Για παράδειγμα, αν $x = 0.99$, τότε $3x + 2 = 4.97$ και, αν $x = 0.99999$, τότε $3x + 2 = 4.99997$ και, αν $x = 1.0000001$, τότε $3x + 2 = 5.0000003$.

Πιο γενικά, η απόσταση του $3x + 2$ από το 5 είναι $|(3x + 2) - 5| = 3|x - 1|$ και είναι φανερό ότι, όταν το x προσεγγίζει το 1, είτε από αριστερά του είτε από δεξιά του, τότε η απόσταση $|(3x + 2) - 5| = 3|x - 1|$ γίνεται μικρότερη από κάθε θετικό αριθμό. Λέμε, λοιπόν, ότι το $3x + 2$ έχει όριο το 5 όταν το x τείνει στο 1 και γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x + 2) = 5.$$

Ας δούμε αναλυτικά πώς γίνεται η απόσταση $|(3x + 2) - 5|$ μικρότερη από κάθε θετικό αριθμό. Θεωρούμε τον γενικό μικρό θετικό αριθμό ϵ και βλέπουμε ότι η απόσταση $|(3x + 2) - 5|$ γίνεται $< \epsilon$, αν είναι $3|x - 1| < \epsilon$, δηλαδή αν είναι $|x - 1| < \frac{\epsilon}{3}$, δηλαδή αν το x βρεθεί είτε αριστερά του 1 στο διάστημα $(1 - \frac{\epsilon}{3}, 1)$ είτε δεξιά του 1 στο διάστημα $(1, 1 + \frac{\epsilon}{3})$ ή, ισοδύναμα, στην ένωση $(1 - \frac{\epsilon}{3}, 1) \cup (1, 1 + \frac{\epsilon}{3})$ των δύο διαστημάτων αριστερά και δεξιά του 1. Βλέπουμε, δηλαδή, ότι υπάρχει ένας θετικός αριθμός, συγκεκριμένα το $\delta = \frac{\epsilon}{3}$, έτσι ώστε να γίνεται $|(3x + 2) - 5| < \epsilon$, αν το x βρεθεί στην ένωση $(1 - \delta, 1) \cup (1, 1 + \delta)$ δύο διαστημάτων αριστερά και δεξιά του 1. Φυσικά, το ότι το x βρίσκεται στην ένωση $(1 - \delta, 1) \cup (1, 1 + \delta)$ γράφεται, ισοδύναμα, $0 < |x - 1| < \delta$.

Παράδειγμα 4.5. Θεωρούμε την $\frac{1}{(x-1)^2}$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Είναι σαφές ότι το 1 είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού. Παρατηρούμε ότι, όταν το x προσεγγίζει το 1, είτε από αριστερά του είτε από δεξιά του, τότε το αντίστοιχο $\frac{1}{(x-1)^2}$ παίρνει απεριόριστα μεγάλες θετικές τιμές. Για παράδειγμα: αν $x = 0.99$, τότε $\frac{1}{(x-1)^2} = 10000$ και, αν $x = 1.00001$, τότε $\frac{1}{(x-1)^2} = 10000000000$. Είναι, λοιπόν, φανερό ότι, όταν το x προσεγγίζει το 1, τότε το $\frac{1}{(x-1)^2}$ γίνεται μεγαλύτερο από κάθε θετικό αριθμό. Έτσι λέμε ότι το $\frac{1}{(x-1)^2}$ έχει όριο το $+\infty$ όταν το x τείνει στο 1 και γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty.$$

Ας δούμε αναλυτικά πώς γίνεται το $\frac{1}{(x-1)^2}$ μεγαλύτερο από κάθε θετικό αριθμό. Θεωρούμε τον γενικό μεγάλο θετικό αριθμό M και βλέπουμε ότι το $\frac{1}{(x-1)^2}$ γίνεται $> M$, αν είναι $0 < (x-1)^2 < \frac{1}{M}$, δηλαδή αν είναι $0 < |x - 1| < \frac{1}{\sqrt{M}}$. Δηλαδή, υπάρχει ένας θετικός αριθμός, συγκεκριμένα το $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$, ώστε να γίνεται $\frac{1}{(x-1)^2} > M$, αν $0 < |x - 1| < \delta$, δηλαδή αν το x βρεθεί στην ένωση $(1 - \delta, 1) \cup (1, 1 + \delta)$ δύο διαστημάτων αριστερά και δεξιά του 1.

Παράδειγμα 4.6. Θεωρούμε την $1 + \frac{1}{x^2}$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Είναι σαφές ότι το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού. Παρατηρούμε ότι, όταν το x προσεγγίζει το $+\infty$, τότε το αντίστοιχο $1 + \frac{1}{x^2}$ προσεγγίζει το 1. Για παράδειγμα: αν $x = 100$, τότε $1 + \frac{1}{x^2} = 1.0001$ και, αν $x = 100000$, τότε $1 + \frac{1}{x^2} = 1.0000000001$. Επομένως, όταν το x προσεγγίζει το $+\infty$, τότε η απόσταση του $1 + \frac{1}{x^2}$ από το 1, δηλαδή η $|(1 + \frac{1}{x^2}) - 1| = \frac{1}{x^2}$, γίνεται μικρότερη από κάθε θετικό αριθμό. Τώρα λέμε ότι το $1 + \frac{1}{x^2}$ έχει όριο το 1 όταν το x τείνει στο $+\infty$ και γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x^2}) = 1.$$

Ας δούμε και πάλι αναλυτικά πώς γίνεται η απόσταση $|(1 + \frac{1}{x^2}) - 1|$ μικρότερη από κάθε θετικό αριθμό. Θεωρούμε τον γενικό μικρό θετικό αριθμό ϵ και βλέπουμε ότι το $|(1 + \frac{1}{x^2}) - 1|$ γίνεται $< \epsilon$, αν είναι $\frac{1}{x^2} < \epsilon$, δηλαδή αν είναι $x > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$. Δηλαδή, υπάρχει ένας θετικός αριθμός, συγκεκριμένα το $N = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$, ώστε η απόσταση $|(1 + \frac{1}{x^2}) - 1|$ να γίνεται $< \epsilon$, αν $x > N$, δηλαδή αν το x βρεθεί στο διάστημα $(N, +\infty)$.

Μετά από αυτά τα παραδείγματα θα διατυπώσουμε τον ορισμό του ορίου συνάρτησης και μετά θα δούμε και άλλα παραδείγματα.

Πρώτα έχουμε τον ορισμό του ορίου σε αριθμό. Σε παρένθεση βρίσκονται οι παραλλαγές με το αριστερό πλευρικό όριο και με το δεξιό πλευρικό όριο στο ξ .

Ορισμός 4.1. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω ότι το ξ είναι σημείο συσσώρευσης (ή σημείο συσσώρευσης από αριστερά του ή σημείο συσσώρευσης από δεξιά του) του A .

(i) Λέμε ότι η f **συνγκλίνει** στο η ή **τείνει** στο η ή έχει **όριο** το η όταν το x τείνει στο ξ (ή στο ξ από αριστερά του ή στο ξ από δεξιά του) και γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta \quad (\text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) = \eta \quad \text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x) = \eta),$$

αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - \eta| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$ (ή την $\xi - \delta < x < \xi$ ή την $\xi < x < \xi + \delta$). Με σύμβολα:

$$x \in A \text{ και } 0 < |x - \xi| < \delta \quad (\text{ή } \xi - \delta < x < \xi \text{ ή } \xi < x < \xi + \delta) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \eta| < \epsilon.$$

(ii) Λέμε ότι η f **αποκλίνει** στο $+\infty$ ή **τείνει** στο $+\infty$ ή έχει **όριο** το $+\infty$ όταν το x τείνει στο ξ (ή στο ξ από αριστερά του ή στο ξ από δεξιά του) και γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = +\infty \quad (\text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) = +\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x) = +\infty),$$

αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) > M$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$ (ή την $\xi - \delta < x < \xi$ ή την $\xi < x < \xi + \delta$). Με σύμβολα:

$$x \in A \text{ και } 0 < |x - \xi| < \delta \quad (\text{ή } \xi - \delta < x < \xi \text{ ή } \xi < x < \xi + \delta) \quad \Rightarrow \quad f(x) > M.$$

(iii) Λέμε ότι η f **αποκλίνει** στο $-\infty$ ή **τείνει** στο $-\infty$ ή έχει **όριο** το $-\infty$ όταν το x τείνει στο ξ (ή στο ξ από αριστερά του ή στο ξ από δεξιά του) και γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = -\infty \quad (\text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) = -\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x) = -\infty),$$

αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) < -M$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$ (ή την $\xi - \delta < x < \xi$ ή την $\xi < x < \xi + \delta$). Με σύμβολα:

$$x \in A \text{ και } 0 < |x - \xi| < \delta \quad (\text{ή } \xi - \delta < x < \xi \text{ ή } \xi < x < \xi + \delta) \quad \Rightarrow \quad f(x) < -M.$$

Μία πιο σύντομη διατύπωση του ορισμού του ορίου $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta$ (ή του $\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) = \eta$ ή του $\lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x) = \eta$)

$\lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x) = \eta$ είναι η εξής:

Το $|f(x) - \eta|$ είναι μικρότερο από κάθε $\epsilon > 0$ όταν το x είναι αρκετά κοντά στο ξ (ή στο ξ από αριστερά του ή στο ξ από δεξιά του) και είναι $\neq \xi$.

Ομοίως για το όριο $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = +\infty$ (ή το $\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) = +\infty$ ή το $\lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x) = +\infty$):

Το $f(x)$ είναι μεγαλύτερο από κάθε $M > 0$ όταν το x είναι αρκετά κοντά στο ξ (ή στο ξ από αριστερά του ή στο ξ από δεξιά του) και είναι $\neq \xi$.

Για να αποδείξουμε το $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta$ με τον ορισμό, θα ακολουθούμε την εξής διαδικασία, παρόμοια με την ανάλογη διαδικασία για το όριο ακολουθίας. Θα παίρνουμε $\epsilon > 0$ και θα προσπαθούμε να βρούμε κάποιον αριθμό a ώστε η ανισότητα $|f(x) - \eta| < \epsilon$ να συνεπάγεται από την $0 < |x - \xi| < a$, παίρνοντας υπόψη ότι το x ανήκει στο πεδίο ορισμού A της f . Όταν φτάνουμε στην ανισότητα $0 < |x - \xi| < a$ θα θεωρούμε τον αριθμό $\delta = a$ και τότε θα συμπεραίνουμε ότι από την $0 < |x - \xi| < \delta$ συνεπάγεται η $0 < |x - \xi| < a$, οπότε συνεπάγεται η $|f(x) - \eta| < \epsilon$. Τα ίδια με $f(x) < -M$ ή $f(x) > M$, αν πρόκειται για το $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = -\infty$ ή το $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = +\infty$, και με $\xi - \delta < x < \xi$ ή $\xi < x < \xi + \delta$, αν πρόκειται για το $\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x)$ ή το $\lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x)$.

Παράδειγμα 4.7. Θεωρούμε την $x^2 + 3$. Αυτή έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$, οπότε το 0 είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού. Βλέπουμε με πρόχειρους αριθμητικούς υπολογισμούς ότι, όταν το x προσεγγίζει το 0, είτε από αριστερά του είτε από δεξιά του, τότε το αντίστοιχο $x^2 + 3$ προσεγγίζει το 3, δηλαδή ότι $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 3) = 3$.

Για να το αποδείξουμε με τον ορισμό του ορίου, παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ και βρίσκουμε $\delta > 0$ ώστε η $0 < |x - 0| < \delta$ να συνεπάγεται την $|(x^2 + 3) - 3| < \epsilon$. Αυτό γίνεται ως εξής. Η $|(x^2 + 3) - 3| < \epsilon$ συνεπάγεται από την $x^2 < \epsilon$ και αυτή συνεπάγεται από την $|x| < \sqrt{\epsilon}$. Άρα, αν επιλέξουμε $\delta = \sqrt{\epsilon}$, τότε από την $0 < |x| < \delta$ συνεπάγεται η $|x| < \sqrt{\epsilon}$ και από αυτήν συνεπάγεται η $|(x^2 + 3) - 3| < \epsilon$.

Παράδειγμα 4.8. Θεωρούμε μία σταθερή συνάρτηση c και θα αποδείξουμε με τον ορισμό του ορίου ότι για κάθε ξ :

$$\lim_{x \rightarrow \xi} c = c.$$

Κατ' αρχάς, οποιοδήποτε ξ είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού $(-\infty, +\infty)$. Κατόπιν, παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ και παρατηρούμε ότι για κάθε x η απόσταση της τιμής c της συνάρτησης από τον αριθμό c είναι $|c - c| = 0$. Επιλέγουμε οποιοδήποτε $\delta > 0$, π.χ. $\delta = 1$, και τότε, προφανώς, από την $0 < |x - \xi| < \delta$ συνεπάγεται η $|c - c| = 0 < \epsilon$.

Παράδειγμα 4.9. Έστω $a > 0$. Το πεδίο ορισμού της $|x|^a$ είναι το $(-\infty, +\infty)$, οπότε το 0 είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού. Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x|^a = 0 \quad \text{αν } a > 0.$$

Ειδικές περιπτώσεις: $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{|x|} = 0$.

Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ και θα βρούμε $\delta > 0$ ώστε η $0 < |x| < \delta$ να συνεπάγεται την $||x|^a - 0| < \epsilon$. Τώρα, η $||x|^a - 0| < \epsilon$ συνεπάγεται από την $|x|^a < \epsilon$ και αυτή συνεπάγεται από την $|x| < \epsilon^{\frac{1}{a}}$. Άρα, αν επιλέξουμε $\delta = \epsilon^{\frac{1}{a}}$, τότε από την $0 < |x| < \delta$ συνεπάγεται η $|x| < \epsilon^{\frac{1}{a}}$ και από αυτήν συνεπάγεται η $||x|^a - 0| < \epsilon$.

Παράδειγμα 4.10. Θεωρούμε την $\frac{1}{|x|^a}$ με $a > 0$. Το πεδίο ορισμού της είναι το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, οπότε το 0 είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού. Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|^a} = +\infty \quad \text{αν } a > 0.$$

Ειδικές περιπτώσεις: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{|x|}} = +\infty$.

Παίρνουμε οποιοδήποτε $M > 0$ και θα βρούμε $\delta > 0$ ώστε η $0 < |x| < \delta$ να συνεπάγεται την $\frac{1}{|x|^a} > M$. Τώρα, η $\frac{1}{|x|^a} > M$ συνεπάγεται από την $0 < |x|^a < \frac{1}{M}$ και αυτή συνεπάγεται από την $0 < |x| < \frac{1}{M^{\frac{1}{a}}}$. Επιλέγουμε $\delta = \frac{1}{M^{\frac{1}{a}}}$ και τότε από την $0 < |x| < \delta$ συνεπάγεται η $0 < |x| < \frac{1}{M^{\frac{1}{a}}}$ και από αυτήν συνεπάγεται η $\frac{1}{|x|^a} > M$.

Αν το ξ είναι σημείο συσσώρευσης από αριστερά του και από δεξιά του του πεδίου ορισμού της f , τότε το όριο $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ είναι συνδυασμός των πλευρικών ορίων $\lim_{x \rightarrow \xi-} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow \xi+} f(x)$. Επίσης, αν το ξ είναι σημείο συσσώρευσης μόνο από αριστερά του ή μόνο από δεξιά του του πεδίου ορισμού της f , τότε η έννοια του ορίου ταυτίζεται με την έννοια του αντίστοιχου πλευρικού ορίου. Αυτό είναι το περιεχόμενο της Πρότασης 4.1.

Πρόταση 4.1. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

(i) Έστω ότι το ξ είναι σημείο συσσώρευσης από αριστερά του και από δεξιά του του A . Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$, τότε υπάρχουν και τα πλευρικά όρια $\lim_{x \rightarrow \xi-} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow \xi+} f(x)$ και τα τρία όρια είναι τα ίδια:

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \xi-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \xi+} f(x).$$

Αντιστρόφως, αν υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow \xi-} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow \xi+} f(x)$ και είναι ίδια, τότε υπάρχει και το όριο $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ και είναι το ίδιο με τα δύο πλευρικά όρια.

(ii) Έστω ότι το ξ είναι σημείο συσσώρευσης από αριστερά του, αλλά όχι από δεξιά του του A . Τότε το $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ υπάρχει, αν και μόνο αν το $\lim_{x \rightarrow \xi-} f(x)$ υπάρχει και τότε τα δύο όρια είναι τα ίδια:

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \xi-} f(x).$$

(iii) Έστω ότι το ξ είναι σημείο συσσώρευσης από δεξιά του, αλλά όχι από αριστερά του του A . Τότε το $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ υπάρχει, αν και μόνο αν το $\lim_{x \rightarrow \xi+} f(x)$ υπάρχει και τότε τα δύο όρια είναι τα ίδια:

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \xi+} f(x).$$

Απόδειξη. (i) Ξεκινάμε με την περίπτωση κατά την οποία τα όρια είναι αριθμοί.

Έστω $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta$. Παίρνουμε $\epsilon > 0$. Όταν το x είναι αρκετά κοντά στο ξ , είτε από αριστερά του είτε από δεξιά του, τότε ισχύει $|f(x) - \eta| < \epsilon$. Επομένως, όταν το x είναι αρκετά κοντά στο ξ από αριστερά του, τότε ισχύει $|f(x) - \eta| < \epsilon$, οπότε $\lim_{x \rightarrow \xi-} f(x) = \eta$. Επίσης, όταν το x είναι αρκετά κοντά στο ξ από δεξιά του, τότε ισχύει $|f(x) - \eta| < \epsilon$, οπότε $\lim_{x \rightarrow \xi+} f(x) = \eta$.

Αντιστρόφως, έστω $\lim_{x \rightarrow \xi-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \xi+} f(x) = \eta$. Παίρνουμε $\epsilon > 0$. Το $\lim_{x \rightarrow \xi-} f(x) = \eta$ σημαίνει ότι, όταν το x είναι αρκετά κοντά στο ξ από αριστερά του, τότε ισχύει $|f(x) - \eta| < \epsilon$. Επίσης, το $\lim_{x \rightarrow \xi+} f(x) = \eta$ σημαίνει ότι, όταν το x είναι αρκετά κοντά στο ξ από δεξιά του, τότε ισχύει $|f(x) - \eta| < \epsilon$. Τώρα, έστω ότι το x είναι αρκετά κοντά στο ξ και είναι $\neq \xi$. Τότε το x , ευρισκόμενο αρκετά κοντά στο ξ , είναι είτε αριστερά είτε δεξιά του ξ . Λόγω της υπόθεσής μας, και στις δύο περιπτώσεις ισχύει $|f(x) - \eta| < \epsilon$. Άρα $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta$.

Αν τα όρια είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε επαναλαμβάνουμε τα προηγούμενα αυτολεξεί, αντικαθιστώντας μόνο το $|f(x) - \eta| < \epsilon$ με το $f(x) > M$ ή με το $f(x) < -M$.

(ii) Το x δεν μπορεί να προσεγγίσει το ξ από δεξιά του, αφού το x πρέπει να ανήκει στο A και το ξ δεν είναι σημείο συσσώρευσης από δεξιά του του A . Επομένως, το ότι το x προσεγγίζει το ξ και είναι $\neq \xi$ είναι ταυτόσημο με το ότι το x προσεγγίζει το ξ από αριστερά του. Άρα ο ορισμός του ορίου $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ είναι ταυτόσημος με τον ορισμό του πλευρικού ορίου $\lim_{x \rightarrow \xi-} f(x)$.

(iii) Αναλόγως με το (ii), το ότι το x προσεγγίζει το ξ και είναι $\neq \xi$ είναι ταυτόσημο με το ότι το x προσεγγίζει το ξ από δεξιά του. Άρα ο ορισμός του ορίου $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ είναι ταυτόσημος με τον ορισμό του πλευρικού ορίου $\lim_{x \rightarrow \xi+} f(x)$. $\square$

Παράδειγμα 4.11. Έστω $a > 0$. Για την $|x|^a$ με πεδίο ορισμού $(-\infty, +\infty)$ ισχύει, όπως έχουμε δει, $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^a = 0$. Άρα $\lim_{x \rightarrow 0+} |x|^a = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0-} |x|^a = 0$.

Παράδειγμα 4.12. Έστω $a > 0$. Για την $\frac{1}{|x|^a}$ με πεδίο ορισμού $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ γνωρίζουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|^a} = +\infty$. Άρα $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{|x|^a} = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{|x|^a} = +\infty$.

Παράδειγμα 4.13. Θεωρούμε την $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{αν } x > 0, \\ x^2 + 1, & \text{αν } x \leq 0, \end{cases}$ ορισμένη στο $(-\infty, +\infty)$. Το 0 είναι σημείο συσσώρευσης από αριστερά του και από δεξιά του του πεδίου ορισμού και θα μελετήσουμε τα πλευρικά όρια της f στο 0. Πιο συγκεκριμένα, θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1$, οπότε θα συμπεράνουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

Παίρνουμε $\epsilon > 0$ και εργαζόμαστε στο διάστημα $(-\infty, 0)$. Επειδή $x < 0$, η $|f(x) - 1| < \epsilon$ συνεπάγεται από την $|(x^2 + 1) - 1| < \epsilon$ και αυτή συνεπάγεται από την $x^2 < \epsilon$ και αυτή συνεπάγεται από την $-\sqrt{\epsilon} < x < 0$. Αν επιλέξουμε $\delta = \sqrt{\epsilon}$, τότε για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $-\delta < x < 0$ ισχύει $-\sqrt{\epsilon} < x < 0$, οπότε ισχύει $|f(x) - 1| < \epsilon$. Άρα $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 1$.

Τώρα παίρνουμε $\epsilon > 0$ και εργαζόμαστε στο διάστημα $(0, +\infty)$. Επειδή $x > 0$, η $|f(x) - 1| < \epsilon$ συνεπάγεται από την $|(2x + 1) - 1| < \epsilon$ και αυτή συνεπάγεται από την $2|x| < \epsilon$ και αυτή συνεπάγεται από την $0 < x < \frac{\epsilon}{2}$. Αν επιλέξουμε $\delta = \frac{\epsilon}{2}$, τότε για κάθε x , το οποίο ικανοποιεί την $0 < x < \delta$, ισχύει $0 < x < \frac{\epsilon}{2}$, οπότε ισχύει $|f(x) - 1| < \epsilon$. Άρα $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1$.

Άμεση και χρήσιμη συνέπεια της Πρότασης 4.1 είναι η εξής παρατήρηση.

Έστω ότι το ξ είναι σημείο συσσώρευσης από αριστερά του και από δεξιά του του πεδίου ορισμού της f . Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow \xi-} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow \xi+} f(x)$ δεν υπάρχει ή αν υπάρχουν και τα δύο, αλλά είναι διαφορετικά, τότε το όριο $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 4.14. Η συνάρτηση $\frac{|x|}{x}$ ορίζεται στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, οπότε το 0 είναι σημείο συσσώρευσης από αριστερά του και από δεξιά του του πεδίου ορισμού της f . Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|x|}{x} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|x|}{x} = 1,$$

οπότε δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$.

Στο $(-\infty, 0)$ ισχύει $\frac{|x|}{x} = -1$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$. Επειδή η συνάρτηση είναι σταθερή -1 στο $(-\infty, 0)$, είναι προφανές ότι όποιο $\delta > 0$ και αν επιλέξουμε θα ισχύει

$$\left| \frac{|x|}{x} - (-1) \right| = |(-1) - (-1)| = 0 < \epsilon$$

για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $-\delta < x < 0$. Άρα $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|x|}{x} = -1$.

Ομοίως, στο $(0, +\infty)$ ισχύει $\frac{|x|}{x} = 1$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$. Επειδή η συνάρτηση είναι σταθερή 1 στο $(0, +\infty)$, όποιο $\delta > 0$ και αν επιλέξουμε, θα ισχύει

$$\left| \frac{|x|}{x} - 1 \right| = |1 - 1| = 0 < \epsilon$$

για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $0 < x < \delta$. Άρα $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|x|}{x} = 1$.

Παράδειγμα 4.15. Η $\frac{1}{x}$ ορίζεται στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, οπότε το 0 είναι σημείο συσσώρευσης από αριστερά του και από δεξιά του του πεδίου ορισμού της f . Θα δούμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty,$$

οπότε δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$.

Παίρνουμε οποιοδήποτε $M > 0$ και εργαζόμαστε στο $(-\infty, 0)$. Η $\frac{1}{x} < -M$ συνεπάγεται από την $-\frac{1}{M} < x < 0$. Αν επιλέξουμε $\delta = \frac{1}{M}$, τότε για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $-\delta < x < 0$ ισχύει $-\frac{1}{M} < x < 0$, οπότε ισχύει $\frac{1}{x} < -M$. Άρα $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Πάλι παίρνουμε οποιοδήποτε $M > 0$ και εργαζόμαστε στο $(0, +\infty)$. Η $\frac{1}{x} > M$ συνεπάγεται από την $0 < x < \frac{1}{M}$. Αν επιλέξουμε $\delta = \frac{1}{M}$, τότε για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $0 < x < \delta$ ισχύει $0 < x < \frac{1}{M}$, οπότε ισχύει $\frac{1}{x} > M$. Άρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Παράδειγμα 4.16. Έστω ότι το $a > 0$ δεν είναι ακέραιος. Τότε η x^a είναι ορισμένη μόνο στο $[0, +\infty)$, οπότε το 0 είναι σημείο συσσώρευσης μόνο από δεξιά του του πεδίου ορισμού της συνάρτησης. Επίσης, ισχύει $x^a = |x|^a$ για $x \geq 0$. Είδαμε στο παράδειγμα 4.9 ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} |x|^a = 0$. Άρα

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^a = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a = \lim_{x \rightarrow 0^+} |x|^a = 0.$$

Παράδειγμα 4.17. Έστω πάλι ότι το $a > 0$ δεν είναι ακέραιος. Τότε η $\frac{1}{x^a}$ ορίζεται μόνο στο $(0, +\infty)$, οπότε το 0 είναι σημείο συσσώρευσης μόνο από δεξιά του του πεδίου ορισμού της συνάρτησης. Επίσης, ισχύει $\frac{1}{x^a} = \frac{1}{|x|^a}$ για $x > 0$. Από το παράδειγμα 4.10 γνωρίζουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{|x|^a} = +\infty$. Άρα

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^a} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^a} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{|x|^a} = +\infty.$$

Ας δούμε τώρα τον ορισμό του ορίου στο $+\infty$.

Ορισμός 4.2. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω ότι το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A .

(i) Λέμε ότι η f **συγκλίνει** στο η ή **τείνει** στο η ή έχει **όριο** το η όταν το x τείνει στο $+\infty$ και γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \eta,$$

αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - \eta| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $x > N$. Με σύμβολα:

$$x \in A \text{ και } x > N \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \eta| < \epsilon.$$

(ii) Λέμε ότι η f **αποκλίνει** στο $+\infty$ ή **τείνει** στο $+\infty$ ή έχει **όριο** το $+\infty$ όταν το x τείνει στο $+\infty$ και γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $N > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) > M$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $x > N$. Με σύμβολα:

$$x \in A \text{ και } x > N \quad \Rightarrow \quad f(x) > M.$$

(iii) Λέμε ότι η f **αποκλίνει** στο $-\infty$ ή **τείνει** στο $-\infty$ ή έχει **όριο** το $-\infty$ όταν το x τείνει στο $+\infty$ και γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty,$$

αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $N > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) < -M$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $x > N$. Με σύμβολα:

$$x \in A \text{ και } x > N \quad \Rightarrow \quad f(x) < -M.$$

Μία πιο σύντομη διατύπωση του ορισμού του ορίου $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \eta$ είναι η εξής:

Το $|f(x) - \eta|$ είναι μικρότερο από κάθε $\epsilon > 0$, όταν το x είναι αρκετά κοντά στο $+\infty$.

Ομοίως για το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$:

Το $f(x)$ είναι μεγαλύτερο από κάθε $M > 0$, όταν το x είναι αρκετά κοντά στο $+\infty$.

Παράδειγμα 4.18. Έστω σταθερή συνάρτηση c . Το $+\infty$ είναι, προφανώς, σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού $(-\infty, +\infty)$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ και παρατηρούμε ότι, όποιο $N > 0$ και αν επιλέξουμε, ισχύει $|c - c| = 0 < \epsilon$ για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $x > N$. Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} c = c.$$

Παράδειγμα 4.19. Έστω $a > 0$. Η x^a είναι ορισμένη τουλάχιστον στο $[0, +\infty)$ και το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού. Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = +\infty \quad \text{αν } a > 0.$$

Ειδικές περιπτώσεις: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

Παίρνουμε οποιοδήποτε $M > 0$ και θα βρούμε $N > 0$ ώστε να ισχύει $x^a > M$ για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $x > N$. Τώρα, η $x^a > M$ συνεπάγεται από την $x > M^{\frac{1}{a}}$. Επιλέγουμε $N = M^{\frac{1}{a}} > 0$ και τότε για κάθε $x > N$ ισχύει $x > M^{\frac{1}{a}}$, οπότε ισχύει $x^a > M$.

Παράδειγμα 4.20. Έστω $a > 0$. Η $\frac{1}{x^a}$ είναι ορισμένη τουλάχιστον στο $(0, +\infty)$ και το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού. Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^a} = 0 \quad \text{αν } a > 0.$$

Ειδικές περιπτώσεις: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0$.

Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ και θα βρούμε $N > 0$ ώστε να ισχύει $|\frac{1}{x^a} - 0| < \epsilon$ για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $x > N$. Τώρα, η $|\frac{1}{x^a} - 0| < \epsilon$ συνεπάγεται από την $\frac{1}{x^a} < \epsilon$ και αυτή συνεπάγεται από την $x > \frac{1}{\epsilon^{\frac{1}{a}}}$. Επιλέγουμε $N = \frac{1}{\epsilon^{\frac{1}{a}}} > 0$ και τότε για κάθε $x > N$ ισχύει $x > \frac{1}{\epsilon^{\frac{1}{a}}}$, οπότε ισχύει $|\frac{1}{x^a} - 0| < \epsilon$.

Παράδειγμα 4.21. Το πεδίο ορισμού της $\frac{x+1}{x-3}$ είναι το $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$, οπότε το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού. Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-3} = 1$.

Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ και θα βρούμε $N > 0$ ώστε να ισχύει $|\frac{x+1}{x-3} - 1| < \epsilon$ για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $x > N$. Τώρα, η $|\frac{x+1}{x-3} - 1| < \epsilon$ συνεπάγεται από την $\frac{4}{|x-3|} < \epsilon$ και αυτή συνεπάγεται από την $|x-3| > \frac{4}{\epsilon}$ και αυτή συνεπάγεται από την $x-3 > \frac{4}{\epsilon}$ και αυτή συνεπάγεται από την $x > 3 + \frac{4}{\epsilon}$. Επιλέγουμε $N = 3 + \frac{4}{\epsilon} > 0$ και τότε για κάθε $x > N$ ισχύει $x > 3 + \frac{4}{\epsilon}$, οπότε ισχύει $|\frac{x+1}{x-3} - 1| < \epsilon$.

Παράδειγμα 4.22. Το πεδίο ορισμού της $\frac{x^2}{x+1}$ είναι το $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$, οπότε το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού. Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x+1} = +\infty$.

Παίρνουμε οποιοδήποτε $M > 0$ και θα βρούμε $N > 0$ ώστε να ισχύει $\frac{x^2}{x+1} > M$ για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $x > N$. Τώρα, η $\frac{x^2}{x+1} > M$ συνεπάγεται από την $x^2 > M(x+1)$ και αυτή συνεπάγεται από την $x^2 - Mx - M > 0$ και αυτή συνεπάγεται από την $x < \frac{M - \sqrt{M^2 + 4M}}{2}$ και από την $x > \frac{M + \sqrt{M^2 + 4M}}{2}$. Επιλέγουμε $N = \frac{M + \sqrt{M^2 + 4M}}{2} > 0$ και τότε για κάθε $x > N$ ισχύει $x > \frac{M + \sqrt{M^2 + 4M}}{2}$, οπότε ισχύει $\frac{x^2}{x+1} > M$.

Τέλος, έχουμε τον ορισμό του ορίου στο $-\infty$.

Ορισμός 4.3. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω ότι το $-\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A .

(i) Λέμε ότι η f **συγκλίνει** στο η ή **τείνει** στο η ή έχει **όριο** το η όταν το x τείνει στο $-\infty$ και γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \eta,$$

αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - \eta| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $x < -N$. Με σύμβολα:

$$x \in A \text{ και } x < -N \Rightarrow |f(x) - \eta| < \epsilon.$$

(ii) Λέμε ότι η f **αποκλίνει** στο $+\infty$ ή **τείνει** στο $+\infty$ ή έχει **όριο** το $+\infty$ όταν το x τείνει στο $-\infty$ και γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty,$$

αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $N > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) > M$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $x < -N$. Με σύμβολα:

$$x \in A \text{ και } x < -N \Rightarrow f(x) > M.$$

(iii) Λέμε ότι η f **αποκλίνει** στο $-\infty$ ή **τείνει** στο $-\infty$ ή έχει **όριο** το $-\infty$ όταν το x τείνει στο $-\infty$ και γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty,$$

αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $N > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) < -M$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $x < -N$. Με σύμβολα:

$$x \in A \text{ και } x < -N \Rightarrow f(x) < -M.$$

Παράδειγμα 4.23. Έστω σταθερή συνάρτηση c . Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ και βλέπουμε ότι για οποιοδήποτε $N > 0$ ισχύει $|c - c| = 0 < \epsilon$ για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $x < -N$. Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} c = c.$$

Παράδειγμα 4.24. Το πεδίο ορισμού της $\frac{3-x}{7+x}$ είναι το $(-\infty, -7) \cup (-7, +\infty)$, οπότε το $-\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού. Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-x}{7+x} = -1$.

Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ και θα βρούμε $N > 0$ ώστε να ισχύει $\left| \frac{3-x}{7+x} - (-1) \right| < \epsilon$ για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $x < -N$. Τώρα, η $\left| \frac{3-x}{7+x} - (-1) \right| < \epsilon$ συνεπάγεται από την $\frac{10}{|7+x|} < \epsilon$ και αυτή συνεπάγεται από την $|x+7| > \frac{10}{\epsilon}$ και αυτή συνεπάγεται από την $x < -7 - \frac{10}{\epsilon}$. Επιλέγουμε $N = 7 + \frac{10}{\epsilon} > 0$ και τότε για κάθε $x < -N$ ισχύει $x < -7 - \frac{10}{\epsilon}$, οπότε ισχύει $\left| \frac{3-x}{7+x} - (-1) \right| < \epsilon$.

Ασκήσεις

4.1. Αποδείξτε ότι δεν έχουν νόημα τα όρια $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x^2-2x}}$, $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x+|x|}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{-x^2}$, $\lim_{x \rightarrow 1-} \log(x^2 - 1)$, $\lim_{x \rightarrow 1+} \sqrt{1-x^2}$. Προσέξτε: δεν εξετάζουμε το αν υπάρχουν τα όρια αυτά ή το ποια είναι η τιμή τους. Εξετάζουμε, απλώς, αν έχουν νόημα. Π.χ. για το πρώτο όριο εξετάζουμε αν το 1 είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της συνάρτησης $\frac{1}{\sqrt{x^2-2x}}$ και για το δεύτερο όριο εξετάζουμε αν το 0 είναι σημείο συσσώρευσης από αριστερά του του πεδίου ορισμού της συνάρτησης $\frac{1}{x+|x|}$.

Αντιθέτως, αποδείξτε ότι έχουν νόημα τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\sin x}}{x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\sin x-1}}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\sin \frac{1}{x}}$.

4.2. Βρείτε τις τιμές των $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x+1}$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+1}{(x-1)^2}$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^2-1}$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2-1}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3+2x}$. Δώστε «απλοϊκή» αλλά όσο το δυνατόν πειστικότερη εξήγηση της απάντησής σας, χωρίς να χρησιμοποιήσετε τους αυστηρούς ορισμούς των ορίων. Για να αποκτήσετε *αίσθηση* των ορίων αυτών, υπολογίστε αρκετές τιμές των συναρτήσεων, επιλέγοντας τυχαία σκόρπιες τιμές της μεταβλητής x αρκετά κοντά στο σημείο το οποίο πρέπει να προσεγγίζει.

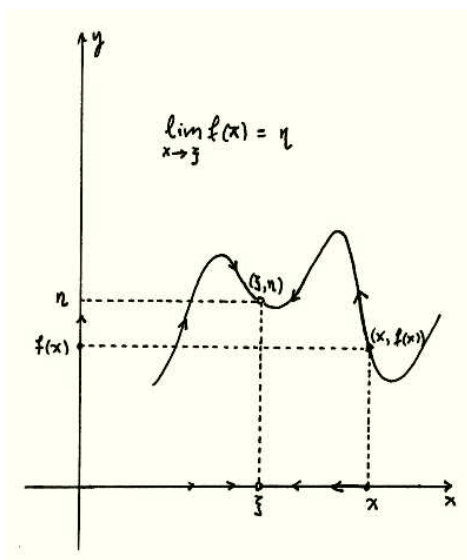
4.3. Αποδείξτε με τους ορισμούς ότι $\lim_{x \rightarrow 1} 3x = 3$, $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x} = \sqrt{2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1} \log x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{x+1}{x+3}\right)^2 = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{2-x} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-3}{2x+1} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2-x^2}{x+1} = \mp\infty$.

4.4. Βρείτε τα πλευρικά όρια στο 0 των συναρτήσεων $\begin{cases} 2x+3, & \text{αν } x > 0, \\ 1-2x, & \text{αν } x < 0, \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{x+1}, & \text{αν } x \geq 0, \\ (x+1)^2, & \text{αν } x < 0, \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{2x+2}{x}, & \text{αν } x > 0, \\ \frac{1}{x^2}, & \text{αν } x < 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x, & \text{αν } x \geq 0, \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } x < 0, \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt[4]{|x-1|}}, & \text{αν } |x| \geq 1, \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } |x| < 1. \end{cases}$ Χρησιμοποιήστε τους ορισμούς για να τα αποδείξετε. Υπάρχουν τα όρια στο 0 και, αν υπάρχουν, ποια είναι η τιμή τους; Κατόπιν, βρείτε και αποδείξτε με τους ορισμούς τα όρια των συναρτήσεων στο $+\infty$.

4.3 Όριο συνάρτησης και γράφημα

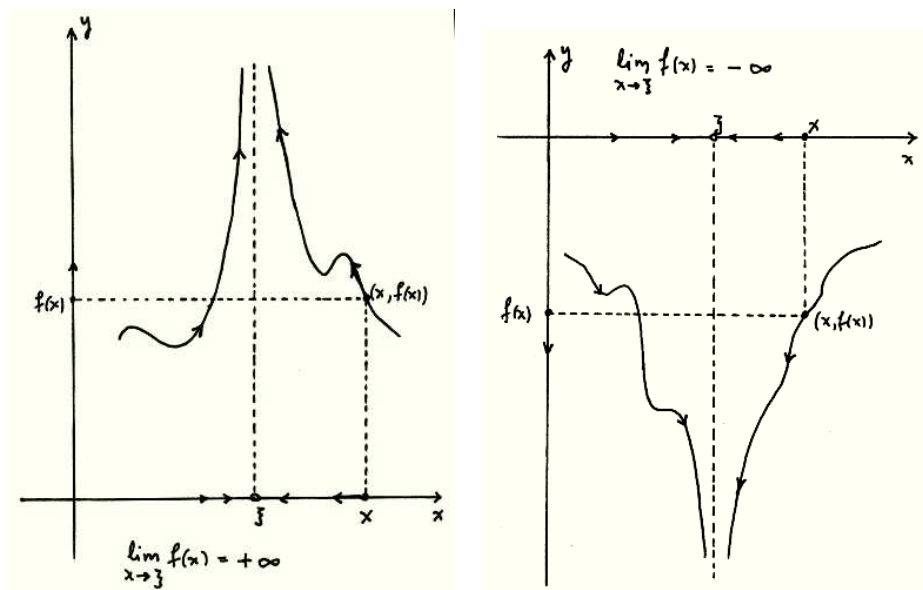
Το γεωμετρικό περιεχόμενο του ορίου μίας συνάρτησης f αποτυπώνεται στο γράφημά της.

Έστω ότι το μεταβλητό x προσεγγίζει το ξ και είναι $\neq \xi$. Αυτή η μετακίνηση του x στον x -άξονα συνεπάγεται την αντίστοιχη μετακίνηση του $y = f(x)$ στον y -άξονα, οπότε και την αντίστοιχη μετακίνηση του σημείου $(x, y) = (x, f(x))$ στο xy -επίπεδο. Είναι φανερό ότι η συμπεριφορά του $f(x)$ και η συμπεριφορά του $(x, f(x))$ αλληλοκαθορίζονται. Π.χ. το $f(x)$ προσεγγίζει τον αριθμό η όταν το x προσεγγίζει το ξ και είναι $\neq \xi$, δηλαδή $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta$, αν και μόνο αν το σημείο $(x, f(x))$ προσεγγίζει το σημείο (ξ, η) . Παρατηρήστε το σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.1

Ομοίως, το $y = f(x)$ ανεβαίνει απεριόριστα πάνω στον y -άξονα όταν το x προσεγγίζει το ξ , δηλαδή $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = +\infty$, αν και μόνο αν το $(x, y) = (x, f(x))$ ανεβαίνει απεριόριστα και, ταυτόχρονα, προσεγγίζει την κατακόρυφη ευθεία με εξίσωση $x = \xi$. Παρομοίως: $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = -\infty$, αν και μόνο αν το $(x, y) = (x, f(x))$ κατεβαίνει απεριόριστα και, ταυτόχρονα, προσεγγίζει την κατακόρυφη ευθεία με εξίσωση $x = \xi$. Και για τις δύο περιπτώσεις παρατηρήστε τα σχήματα 4.2.

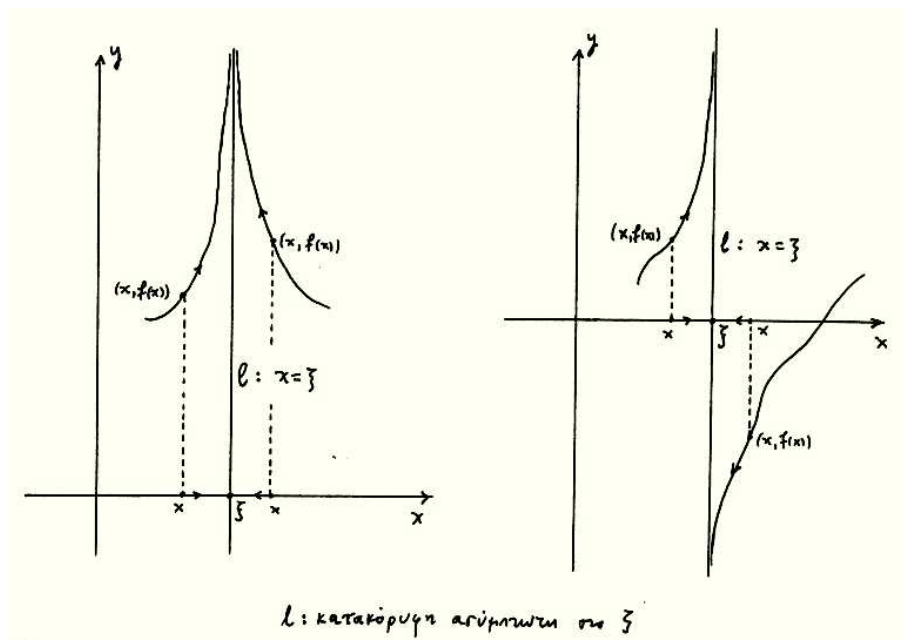


Σχήμα 4.2

Όμοιοι συλλογισμοί ισχύουν για τα πλευρικά όρια $\lim_{x \rightarrow \xi^\pm} f(x)$. Στην περίπτωση του $\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x)$ η μόνη αλλαγή στα προηγούμενα είναι ότι το σημείο $(x, f(x))$ βρίσκεται στην αριστερή μεριά της κατακόρυφης ευθείας με εξίσωση $x = \xi$, ενώ στην περίπτωση του $\lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x)$ το σημείο $(x, f(x))$ βρίσκεται στη δεξιά μεριά της ευθείας με εξίσωση $x = \xi$.

Ορισμός 4.4. Η κατακόρυφη ευθεία l με εξίσωση $x = \xi$ χαρακτηρίζεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** του γραφήματος της f στο ξ , αν $\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) = \pm\infty$ ή $\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) = \pm\infty$ ή $\lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x) = \pm\infty$.

Παρατηρήστε το σχήμα 4.3.

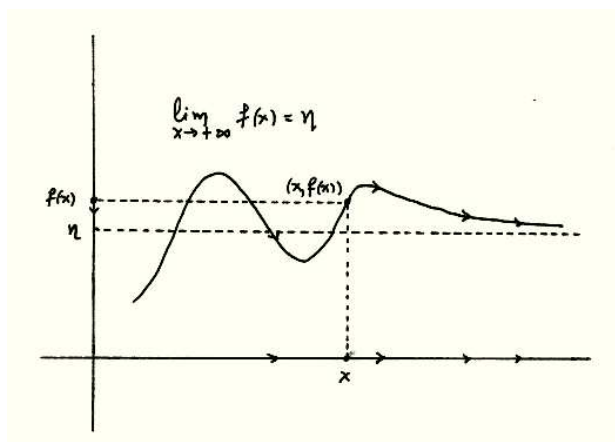


Σχήμα 4.3

Παρεμπιπτόντως, μπορεί κανείς να δει στο γράφημα της συνάρτησης ότι, αν τα $\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x)$ είναι διαφορετικά, τότε δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$.

Έστω τώρα ότι το x απομακρύνεται προς τα δεξιά στον x -άξονα. Πάλι, η μετακίνηση του $f(x)$ στον y -άξονα και η μετακίνηση του σημείου $(x, f(x))$ στο επίπεδο αλληλοκαθορίζονται. Για

παράδειγμα, το $f(x)$ προσεγγίζει τον αριθμό η , δηλαδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \eta$, αν και μόνο αν το σημείο $(x, f(x))$ απομακρύνεται προς τα δεξιά προσεγγίζοντας την οριζόντια ευθεία με εξίσωση $y = \eta$. Παρατηρήστε το σχήμα 4.4.



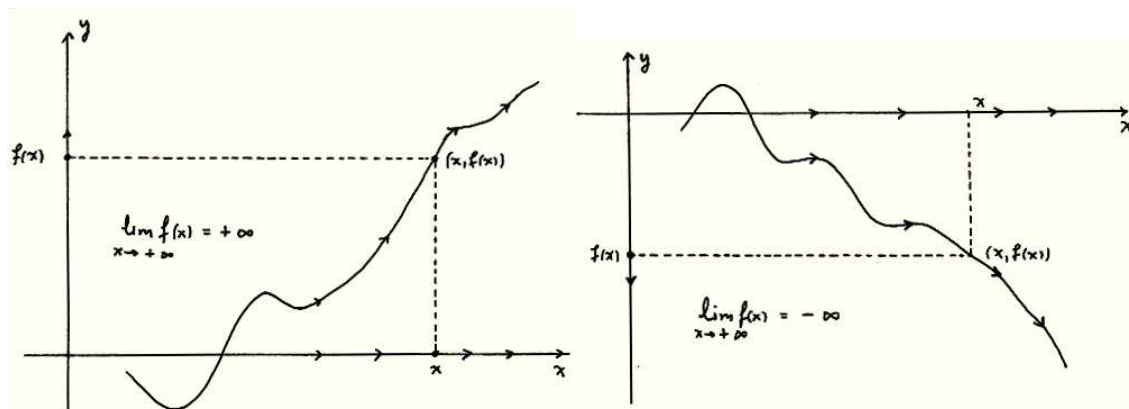
Σχήμα 4.4

Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \eta$, αν και μόνο αν το σημείο $(x, f(x))$ απομακρύνεται προς τα αριστερά προσεγγίζοντας την οριζόντια ευθεία με εξίσωση $y = \eta$.

Ορισμός 4.5. (i) Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \eta$, τότε η οριζόντια ευθεία l με εξίσωση $y = \eta$ χαρακτηρίζεται **οριζόντια ασύμπτωτη** στο $+\infty$ του γραφήματος της f .

(ii) Αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \eta$, τότε η οριζόντια ευθεία l με εξίσωση $y = \eta$ χαρακτηρίζεται **οριζόντια ασύμπτωτη** στο $-\infty$ του γραφήματος της f .

Ομοίως, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, αν και μόνο αν το σημείο $(x, f(x))$ απομακρύνεται προς τα δεξιά ανεβαίνοντας απερίοριστα. Επίσης, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, αν και μόνο αν το σημείο $(x, f(x))$ απομακρύνεται προς τα δεξιά κατεβαίνοντας απερίοριστα. Και για τις δύο περιπτώσεις παρατηρήστε τα σχήματα 4.5.



Σχήμα 4.5

Ομοίως, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, αν και μόνο αν το σημείο $(x, f(x))$ απομακρύνεται προς τα αριστερά ανεβαίνοντας απερίοριστα. Και, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, αν και μόνο αν το σημείο $(x, f(x))$ απομακρύνεται προς τα αριστερά κατεβαίνοντας απερίοριστα.

Ένας τρόπος να αποτυπώσουμε την ποσοτική έκφραση, με τα ϵ και δ , της έννοιας του ορίου $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta$ στο γράφημα της f είναι ο εξής. Το να ισχύει το όριο αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ ώστε για κάθε x στο πεδίο ορισμού της f το οποίο βρίσκεται στην ένωση $(\xi - \delta, \xi) \cup (\xi, \xi + \delta)$ το αντίστοιχο ύψος $f(x)$ του σημείου $(x, f(x))$ βρίσκεται ανάμεσα

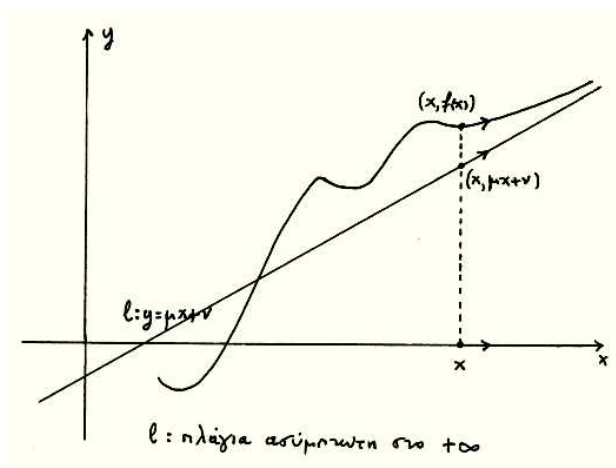
στα ύψη $\eta - \epsilon$ και $\eta + \epsilon$ ή, με άλλα λόγια, το μέρος του γραφήματος το οποίο αντιστοιχεί στην ένωση $(\xi - \delta, \xi) \cup (\xi, \xi + \delta)$ βρίσκεται ανάμεσα στις οριζόντιες ευθείες με εξισώσεις $y = \eta - \epsilon$ και $y = \eta + \epsilon$.

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να δούμε κάθε άλλη περίπτωση ορίου. Για παράδειγμα, το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ είναι ισοδύναμο με το ότι για κάθε $M > 0$ υπάρχει κάποιος $N > 0$ ώστε το μέρος του γραφήματος της f το οποίο αντιστοιχεί στην ημιευθεία $(N, +\infty)$ βρίσκεται κάτω από την οριζόντια ευθεία με εξίσωση $y = -M$.

Ορισμός 4.6. (i) Μία ευθεία l με εξίσωση $y = \mu x + \nu$ χαρακτηρίζεται (πλάγια) ασύμπτωτη ευθεία στο $+\infty$ του γραφήματος της f , αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \mu x - \nu) = 0$.

(ii) Μία ευθεία l με εξίσωση $y = \mu x + \nu$ χαρακτηρίζεται (πλάγια) ασύμπτωτη ευθεία στο $-\infty$ του γραφήματος της f , αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \mu x - \nu) = 0$.

Παρατηρήστε το σχήμα 4.6.



Σχήμα 4.6

Η ισότητα $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \mu x - \nu) = 0$ σημαίνει ότι το μεταβλητό σημείο $(x, f(x))$ του γραφήματος της συνάρτησης και το αντίστοιχο μεταβλητό σημείο $(x, \mu x + \nu)$ της ευθείας l προσεγγίζουν το ένα το άλλο όταν τα σημεία αυτά απομακρύνονται προς τα δεξιά. Πιο απλά: το γράφημα της συνάρτησης προσεγγίζει την ευθεία l κοντά στο $+\infty$.

Στην Πρόταση 4.4 θα δούμε μία μέθοδο εύρεσης, αν υπάρχουν, των πλάγιων ασύμπτωτων ευθειών στο γράφημα μίας συνάρτησης.

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι μία οριζόντια ασύμπτωτη ευθεία στο γράφημα της f είναι ειδική περίπτωση πλάγιας ασύμπτωτης ευθείας. Πράγματι, μία οριζόντια ασύμπτωτη ευθεία είναι πλάγια ασύμπτωτη ευθεία με κλίση ίση με 0, δηλαδή με $\mu = 0$.

Ασκήσεις

4.5. Από τα γραφήματα των $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{αν } x < 2, \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } x \geq 2, \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \geq 2, \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } x < 2, x \neq 0, \end{cases}$ αναγνωρίστε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 2^\pm} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$.

4.4 Όρια και αλγεβρικές πράξεις

Θα δούμε τώρα αρκετές ιδιότητες του ορίου συνάρτησης.

Προσέξτε πόσο όμοιες είναι οι περισσότερες από τις ιδιότητες τις οποίες θα δούμε με ανάλογες ιδιότητες του ορίου ακολουθίας. Είναι εντυπωσιακό το ότι αυτό ισχύει όχι μόνο για τις διατυπώσεις των ιδιοτήτων αλλά και για τις αποδείξεις τους, λες και έχει γίνει απλή αντιγραφή της φρασολογίας με απλή αλλαγή κάποιων συμβόλων. Αυτό δεν είναι τυχαίο. Πάρτε, για παράδειγμα τον κανόνα αθροίσματος. Αν έχουμε δύο μεταβλητές ποσότητες H, Z οι οποίες προσεγγίζουν δύο αντίστοιχες σταθερές ποσότητες η, ζ , τότε το άθροισμα $H + Z$ είναι μία μεταβλητή ποσότητα η οποία προσεγγίζει το σταθερό άθροισμα $\eta + \zeta$. Τώρα, οι τιμές των H, Z μπορεί να είναι οι όροι x_n, y_n δύο ακολουθιών ή μπορεί να είναι οι τιμές $f(x), g(x)$ δύο συναρτήσεων. Στην πρώτη περίπτωση λέμε ότι, αν $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \eta$ και $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \zeta$, τότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n + y_n) = \eta + \zeta$. Στη δεύτερη περίπτωση λέμε, όπως θα δούμε σε λίγο, ότι, αν $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta$ και $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = \zeta$, τότε $\lim_{x \rightarrow \xi} (f(x) + g(x)) = \eta + \zeta$.

Όλα τα αποτελέσματα θα διατυπώνονται, για συντομία, με το σύμβολο $\lim_{x \rightarrow \xi}$ και θα εννοούμε ότι το ξ είναι αριθμός ή $-\infty$ ή $+\infty$, δηλαδή ότι $\xi \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Επίσης, όλα τα αποτελέσματα ισχύουν και στις περιπτώσεις των $\lim_{x \rightarrow \xi+}$ και $\lim_{x \rightarrow \xi-}$. Για το σύμβολο $x \rightarrow \xi$ θα χρησιμοποιούμε την έκφραση «το x προσεγγίζει το ξ και είναι $\neq \xi$ » ό,τι και αν είναι το ξ : αριθμός ή $-\infty$ ή $+\infty$. Βέβαια, το «είναι $\neq \xi$ » είναι πλεονασμός στην περίπτωση κατά την οποία το ξ είναι $-\infty$ ή $+\infty$, διότι το x παίρνει πραγματικές τιμές, οπότε $x \neq \pm\infty$.

Πρόταση 4.2. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ και έστω ότι οι f, g ταυτίζονται κοντά στο ξ . Αν υπάρχει το όριο της f στο ξ , τότε υπάρχει και το όριο της g στο ξ και τα δύο όρια είναι ίσα.

Η Πρόταση 4.2 είναι προφανής. Οι f, g ταυτίζονται κοντά στο ξ , οπότε όταν το x προσεγγίζει το ξ ισχύει $f(x) = g(x)$, οπότε, αν το $f(x)$ έχει κάποιο όριο, τότε το $g(x)$ έχει το ίδιο όριο.

Παράδειγμα 4.25. Έστω $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|^2}, & \text{αν } 0 < |x| < \frac{1}{10}, \\ x, & \text{αν } x = 0 \text{ ή } |x| \geq \frac{1}{10}. \end{cases}$

Ισχύει $f(x) = \frac{1}{|x|^2}$ στην ένωση $(-\frac{1}{10}, 0) \cup (0, \frac{1}{10})$. Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|^2} = +\infty$.

Παράδειγμα 4.26. Έστω $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } x > 1 \text{ ή } x < 0. \end{cases}$

Ισχύει $f(x) = x$ στο διάστημα $(0, 1)$. Άρα $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} x = 0$.

Ισχύει $f(x) = \frac{1}{x}$ στο διάστημα $(-\infty, 0)$. Άρα $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Παράδειγμα 4.27. Έστω $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{αν } x > 100, \\ x, & \text{αν } x \leq 100. \end{cases}$

Ισχύει $f(x) = \frac{1}{x}$ στο διάστημα $(100, +\infty)$. Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Ισχύει $f(x) = x$ στο διάστημα $(-\infty, 100]$. Άρα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$.

Έστω συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x)$. Η **αντίθετη** συνάρτηση $-f : A \rightarrow \mathbb{R}$ έχει τύπο $(-f)(x) = -f(x)$.

Κανόνας αντίθετου. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$. Αν υπάρχει το όριο της f στο ξ , τότε υπάρχει και το όριο της $-f$ στο ξ και

$$\lim_{x \rightarrow \xi} (-f(x)) = -\lim_{x \rightarrow \xi} f(x).$$

Απόδειξη. Έστω $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta$. Παίρνουμε $\epsilon > 0$. Όταν το x είναι αρκετά κοντά στο ξ και είναι $\neq \xi$, τότε ισχύει $|f(x) - \eta| < \epsilon$, οπότε ισχύει

$$|(-f(x)) - (-\eta)| = |-f(x) + \eta| = |f(x) - \eta| < \epsilon.$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow \xi} (-f(x)) = -\eta$.

Έστω $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = +\infty$. Παίρνουμε $M > 0$. Όταν το x είναι αρκετά κοντά στο ξ και είναι $\neq \xi$, τότε ισχύει $f(x) > M$, οπότε ισχύει $-f(x) < -M$. Άρα $\lim_{x \rightarrow \xi} (-f(x)) = -\infty = -(+\infty)$.

Ομοίως, αποδεικνύεται ότι, αν $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow \xi} (-f(x)) = +\infty = -(-\infty)$. $\square$

Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $f(x)$ και $g(x)$. Το **άθροισμα** $f + g : A \rightarrow \mathbb{R}$ των δύο συναρτήσεων έχει τύπο $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

Κανόνας αθροίσματος. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$. Αν υπάρχουν τα όρια των f, g στο ξ και αν το άθροισμα των δύο ορίων δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε υπάρχει το όριο της $f + g$ στο ξ και

$$\lim_{x \rightarrow \xi} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) + \lim_{x \rightarrow \xi} g(x).$$

Απόδειξη. Έστω $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta$ και $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = \zeta$. Παίρνουμε $\epsilon > 0$. Όταν το x είναι αρκετά κοντά στο ξ και είναι $\neq \xi$, τότε ισχύει $|f(x) - \eta| < \frac{\epsilon}{2}$ και $|g(x) - \zeta| < \frac{\epsilon}{2}$, οπότε ισχύει

$$|(f(x) + g(x)) - (\eta + \zeta)| = |(f(x) - \eta) + (g(x) - \zeta)| \leq |f(x) - \eta| + |g(x) - \zeta| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow \xi} (f(x) + g(x)) = \eta + \zeta$.

Έστω $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = +\infty$. Παίρνουμε $M > 0$. Όταν το x είναι αρκετά κοντά στο ξ και είναι $\neq \xi$, τότε ισχύει $f(x) > \frac{M}{2}$ και $g(x) > \frac{M}{2}$, οπότε ισχύει $f(x) + g(x) > M$. Άρα $\lim_{x \rightarrow \xi} (f(x) + g(x)) = +\infty$.

Έστω $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta$ και $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = +\infty$. Παίρνουμε $M > 0$. Όταν το x είναι αρκετά κοντά στο ξ και είναι $\neq \xi$, τότε ισχύει $|f(x) - \eta| < 1$ και $g(x) > M + |\eta| + 1$, οπότε ισχύει

$$f(x) + g(x) \geq -|\eta| - |f(x) - \eta| + g(x) > -|\eta| - 1 + M + |\eta| + 1 = M.$$

Επομένως, $\lim_{x \rightarrow \xi} (f(x) + g(x)) = +\infty$.

Οι υπόλοιπες περιπτώσεις έχουν παρόμοια απόδειξη. $\square$

Παράδειγμα 4.28. $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$. Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{1}{|x|}) = 1 + (+\infty) = +\infty$.

Παράδειγμα 4.29. $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$. Άρα $\lim_{x \rightarrow 0+} (\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}) = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$.

Παράδειγμα 4.30. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-\frac{1}{x}) = 0$. Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \frac{1}{x}) = 1 + 0 = 1$.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα για την περίπτωση απροσδιόριστης μορφής.

Παράδειγμα 4.31. $\lim_{x \rightarrow 0+} (\frac{1}{x} + 3) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0+} (-\frac{1}{x}) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0+} (\frac{1}{x} + 3 - \frac{1}{x}) = 3$. Προφανώς, μπορεί να είναι οποιοσδήποτε αριθμός στη θέση του 3.

Παράδειγμα 4.32. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{|x|} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} (-\frac{1}{|x|}) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{2}{|x|} - \frac{1}{|x|}) = +\infty$.

Παράδειγμα 4.33. $\lim_{x \rightarrow 0-} (-\frac{1}{x}) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{2}{x} = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0-} (-\frac{1}{x} + \frac{2}{x}) = -\infty$.

Παράδειγμα 4.34. $\lim_{x \rightarrow 0} (-\frac{2}{x^2}) = -\infty$. Θα αποδείξουμε λίγο παρακάτω, στο παράδειγμα 4.77, ότι $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}) = +\infty$. Όμως, το $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ δεν υπάρχει.

Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $f(x)$ και $g(x)$. Η **διαφορά** $f - g : A \rightarrow \mathbb{R}$ των δύο συναρτήσεων έχει τύπο $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$. Η περίπτωση του ορίου της διαφοράς συναρτήσεων ανάγεται στις περιπτώσεις του ορίου του αθροίσματος συναρτήσεων και του ορίου της αντίθετης συνάρτησης, αφού $f(x) - g(x) = f(x) + (-g(x))$. Επομένως,

Κανόνας διαφοράς. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$. Αν υπάρχουν τα όρια των f, g στο ξ και αν η διαφορά των δύο ορίων δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε υπάρχει το όριο της $f - g$ στο ξ και

$$\lim_{x \rightarrow \xi} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) - \lim_{x \rightarrow \xi} g(x).$$

Παράδειγμα 4.35. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \frac{1}{x}) = 1 - 0 = 1$.

Παράδειγμα 4.36. $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$. Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} (x - \frac{1}{|x|}) = 0 - (+\infty) = -\infty$.

Παράδειγμα 4.37. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{-x}} = +\infty$. Άρα $\lim_{x \rightarrow 0^-} (\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{-x}}) = (-\infty) - (+\infty) = -\infty$.

Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $f(x)$ και $g(x)$. Το **γινόμενο** $fg : A \rightarrow \mathbb{R}$ των δύο συναρτήσεων έχει τύπο $(fg)(x) = f(x)g(x)$.

Κανόνας γινομένου. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$. Αν υπάρχουν τα όρια των f, g στο ξ και αν το γινόμενο των δύο ορίων δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε υπάρχει το όριο της fg στο ξ και

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) \lim_{x \rightarrow \xi} g(x).$$

Απόδειξη. Έστω $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta$ και $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = \zeta$. Παίρνουμε $\epsilon > 0$. Όταν το x είναι αρκετά κοντά στο ξ και είναι $\neq \xi$, τότε ισχύει $|f(x) - \eta| < \min\{(\frac{\epsilon}{3})^{\frac{1}{2}}, \frac{\epsilon}{3|\zeta|+1}\}$ και $|g(x) - \zeta| < \min\{(\frac{\epsilon}{3})^{\frac{1}{2}}, \frac{\epsilon}{3|\eta|+1}\}$, οπότε ισχύει

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - \eta\zeta| &= |(f(x) - \eta)(g(x) - \zeta) + \eta(g(x) - \zeta) + \zeta(f(x) - \eta)| \\ &\leq |f(x) - \eta||g(x) - \zeta| + |\eta||g(x) - \zeta| + |\zeta||f(x) - \eta| \\ &< (\frac{\epsilon}{3})^{\frac{1}{2}}(\frac{\epsilon}{3})^{\frac{1}{2}} + \frac{|\eta|\epsilon}{3|\eta|+1} + \frac{|\zeta|\epsilon}{3|\zeta|+1} < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)g(x) = \eta\zeta$.

Έστω $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = +\infty$. Παίρνουμε $M > 0$. Όταν το x είναι αρκετά κοντά στο ξ και είναι $\neq \xi$, τότε ισχύει $f(x) > \sqrt{M}$ και $g(x) > \sqrt{M}$, οπότε ισχύει $f(x)g(x) > M$. Άρα $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)g(x) = +\infty$.

Έστω $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta > 0$ και $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = +\infty$. Παίρνουμε $M > 0$. Όταν το x είναι αρκετά κοντά στο ξ και είναι $\neq \xi$, τότε ισχύει $|f(x) - \eta| < \frac{\eta}{2}$ και $g(x) > \frac{2M}{\eta} > 0$, οπότε ισχύει

$$f(x)g(x) \geq (\eta - |f(x) - \eta|)g(x) > (\eta - \frac{\eta}{2})\frac{2M}{\eta} = M.$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)g(x) = +\infty$.

Σε όλες τις υπόλοιπες περιπτώσεις η απόδειξη είναι παρόμοια. □

Παράδειγμα 4.38. Μία ειδική περίπτωση του κανόνα γινομένου είναι η εξής. Έστω αριθμός c και έστω ότι υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ και ότι το γινόμενο $c \lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή. Τότε

$$\lim_{x \rightarrow \xi} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow \xi} f(x).$$

Απλά εφαρμόζουμε τον κανόνα γινομένου με τη σταθερή συνάρτηση c η οποία έχει όριο c .

Το γινόμενο του c με το $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ είναι απροσδιόριστη μορφή μόνο όταν $c = 0$ και το $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ είναι το $+\infty$ ή το $-\infty$. Τότε, όμως, $0f(x) = 0$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της f , δηλαδή η $0f(x)$ είναι η σταθερή συνάρτηση 0 , οπότε $\lim_{x \rightarrow \xi} 0f(x) = 0$.

Παράδειγμα 4.39. $\lim_{x \rightarrow 0} (x + 1) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$. Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{|x|} = 1(+\infty) = +\infty$.

Παράδειγμα 4.40. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$. Επομένως, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(x - 1) = (+\infty)(+\infty) = +\infty$. Παρατηρήστε ότι η εφαρμογή του κανόνα διαφοράς στο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x)$ καταλήγει σε απροσδιόριστη μορφή.

Παράδειγμα 4.41. $\lim_{x \rightarrow -1-} (x^2 - x + 1) = \lim_{x \rightarrow -1-} (x x - x + 1) = (-1)(-1) - (-1) + 1 = 3$, $\lim_{x \rightarrow -1-} \frac{1}{x+1} = -\infty$. Άρα $\lim_{x \rightarrow -1-} \frac{x^2 - x + 1}{x+1} = 3(-\infty) = -\infty$.

Παράδειγμα 4.42. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} (2 + x) = 2$. Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+x}{x^2} = (+\infty)2 = +\infty$. Δείτε ότι ο κανόνας αθροίσματος δεν εφαρμόζεται στο $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x})$, διότι δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$.

Θα δούμε τώρα μερικά παραδείγματα για περιπτώσεις απροσδιόριστης μορφής.

Παράδειγμα 4.43. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7}{x} = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{7}{x} = 7$. Το 7 μπορεί να αντικατασταθεί με οποιονδήποτε αριθμό.

Παράδειγμα 4.44. $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x^2} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0+} x = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x^2} x = +\infty$.

Παράδειγμα 4.45. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} x^2 = 0$.

Παράδειγμα 4.46. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, αλλά το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ δεν υπάρχει.

Πρόταση 4.3. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $k \in \mathbb{N}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$. Αν υπάρχει το όριο της f στο ξ , τότε

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)^k = \left(\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) \right)^k \quad \text{αν } k \in \mathbb{N}.$$

Απόδειξη. Από τον κανόνα γινομένου για το γινόμενο k συναρτήσεων, όλων ίσων με την f . $\square$

Παράδειγμα 4.47. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \frac{1}{x}) = 1 - 0 = 1$. Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \frac{1}{x})^3 = 1^3 = 1$.

Παράδειγμα 4.48. $\lim_{x \rightarrow 0} (3 - \frac{1}{x^2}) = 3 - (+\infty) = -\infty$. Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} (3 - \frac{1}{x^2})^4 = (-\infty)^4 = +\infty$.

Παράδειγμα 4.49. Έστω $k \in \mathbb{N}$. Τότε $\lim_{x \rightarrow \xi} x^k = \left(\lim_{x \rightarrow \xi} x \right)^k = \xi^k$. Δηλαδή,

$$\lim_{x \rightarrow \xi} x^k = \xi^k \quad \text{αν } k \in \mathbb{N}.$$

Αν, επιπλέον, $\xi \neq 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{1}{x^k} = \left(\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{1}{x} \right)^k = \left(\frac{1}{\xi} \right)^k = \frac{1}{\xi^k}$. Δηλαδή,

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{1}{x^k} = \frac{1}{\xi^k} \quad \text{αν } k \in \mathbb{N} \text{ και } \xi \neq 0.$$

Παράδειγμα 4.50. Έστω $k \in \mathbb{N}$. Τότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^k} = (\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x})^k = (+\infty)^k = +\infty$. Δηλαδή,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^k} = +\infty \quad \text{αν } k \in \mathbb{N}.$$

Αν το $k \in \mathbb{N}$ είναι άρτιο, τότε $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^k} = (\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x})^k = (-\infty)^k = +\infty$. Αν το $k \in \mathbb{N}$ είναι περιττό, τότε $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^k} = (\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x})^k = (-\infty)^k = -\infty$. Δηλαδή,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^k} = \begin{cases} +\infty, & \text{αν το } k \in \mathbb{N} \text{ είναι άρτιο,} \\ -\infty, & \text{αν το } k \in \mathbb{N} \text{ είναι περιττό.} \end{cases}$$

Παράδειγμα 4.51. Έστω $k \in \mathbb{N}$. Τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = (\lim_{x \rightarrow +\infty} x)^k = (+\infty)^k = +\infty$. Δηλαδή,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty \quad \text{αν } k \in \mathbb{N}.$$

Αν το $k \in \mathbb{N}$ είναι άρτιο, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = (\lim_{x \rightarrow -\infty} x)^k = (-\infty)^k = +\infty$. Αν το $k \in \mathbb{N}$ είναι περιττό, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = (\lim_{x \rightarrow -\infty} x)^k = (-\infty)^k = -\infty$. Δηλαδή,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty, & \text{αν το } k \in \mathbb{N} \text{ είναι άρτιο,} \\ -\infty, & \text{αν το } k \in \mathbb{N} \text{ είναι περιττό.} \end{cases}$$

Παράδειγμα 4.52. Έστω $k \in \mathbb{N}$. Τότε $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^k} = (\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x})^k = 0^k = 0$. Δηλαδή,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^k} = 0 \quad \text{αν } k \in \mathbb{N}.$$

Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, και έστω $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$. Το **αντίστροφο** $\frac{1}{f} : A \rightarrow \mathbb{R}$ της συνάρτησης f έχει τύπο $(\frac{1}{f})(x) = \frac{1}{f(x)}$. Προσέξτε: άλλο το αντίστροφο και άλλη η αντίστροφη μίας συνάρτησης.

Κανόνας αντίστροφου, I. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ και έστω $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$. Αν υπάρχει το όριο της f στο ξ και αν το αντίστροφο του ορίου δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, δηλαδή αν $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) \neq 0$, τότε υπάρχει και το όριο της $\frac{1}{f}$ στο ξ και

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)}.$$

Απόδειξη. Έστω $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta > 0$. Παίρνουμε $\epsilon > 0$. Όταν το x είναι αρκετά κοντά στο ξ και είναι $\neq \xi$, τότε ισχύει $|f(x) - \eta| < \min\{\frac{\eta}{2}, \frac{\eta^2 \epsilon}{2}\}$, οπότε ισχύει

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\eta} \right| = \frac{|f(x) - \eta|}{f(x)\eta} \leq \frac{|f(x) - \eta|}{(\eta - |f(x) - \eta|)\eta} < \frac{|f(x) - \eta|}{\frac{\eta}{2}\eta} < \epsilon.$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\eta}$.

Έστω $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = +\infty$. Παίρνουμε $\epsilon > 0$. Όταν το x είναι αρκετά κοντά στο ξ και είναι $\neq \xi$, τότε ισχύει $f(x) > \frac{1}{\epsilon} > 0$, οπότε ισχύει $\left| \frac{1}{f(x)} - 0 \right| = \frac{1}{f(x)} < \epsilon$. Άρα $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{1}{f(x)} = 0 = \frac{1}{+\infty}$.

Αν το όριο είναι αρνητικός αριθμός ή $-\infty$, τότε η απόδειξη είναι παρόμοια. □

Παράδειγμα 4.53. $\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$.

Παράδειγμα 4.54. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x + 1) = +\infty$, οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{+\infty} = 0$.

Παράδειγμα 4.55. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - x + 1) = -\infty$, οπότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3-x+1} = \frac{1}{-\infty} = 0$.

Παράδειγμα 4.56. Ο κανόνας δεν ισχύει, αν το όριο μίας συνάρτησης είναι 0. Π.χ. $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, αλλά δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$.

Όπως θα φανεί στο αποτέλεσμα το οποίο ακολουθεί, το πρόβλημα στο τελευταίο παράδειγμα είναι ότι η συνάρτηση έχει και θετικές και αρνητικές τιμές.

Κανόνας αντίστροφου, II. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ και έστω $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$.

(i) Αν $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = 0$ και αν ισχύει $f(x) > 0$ κοντά στο ξ , τότε $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

(ii) Αν $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = 0$ και αν ισχύει $f(x) < 0$ κοντά στο ξ , τότε $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

Απόδειξη. (i) Έστω $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = 0$ και έστω ότι ισχύει $f(x) > 0$ κοντά στο ξ . Παίρνουμε $M > 0$.

Όταν το x είναι αρκετά κοντά στο ξ και είναι $\neq \xi$, τότε ισχύει $0 < f(x) < \frac{1}{M}$, οπότε ισχύει $\frac{1}{f(x)} > M$. Άρα $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

(ii) Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του (i). □

Παράδειγμα 4.57. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}) = 0$. Εύκολα βλέπουμε ότι ισχύει $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x > 1$. Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = +\infty$.

Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $f(x)$ και $g(x)$ και έστω ότι ισχύει $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$. Ο λόγος $\frac{f}{g} : A \rightarrow \mathbb{R}$ των δύο συναρτήσεων έχει τύπο $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Τα αποτελέσματα για το όριο του λόγου δύο συναρτήσεων προκύπτουν από τον συνδυασμό του κανόνα γινομένου και του κανόνα αντίστροφου.

Κανόνας λόγου. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ και έστω ότι ισχύει $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$. Αν υπάρχουν τα όρια των f, g στο ξ και αν ο λόγος των δύο ορίων δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε υπάρχει το όριο της $\frac{f}{g}$ στο ξ και

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \xi} g(x)}.$$

Παράδειγμα 4.58. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 2) = -1$. Άρα $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x}{x-2} = \frac{2}{-1} = -2$.

Παράδειγμα 4.59. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x^2}) = 1 + 0 = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{2}{x}) = 1 + 0 = 1$. Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}} = (+\infty) \frac{1}{1} = +\infty$. Παρατηρήστε ότι η άμεση εφαρμογή του κανόνα λόγου στο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x+2}$ καταλήγει σε απροσδιόριστη μορφή.

Ας δούμε τώρα μερικά παραδείγματα για τις απροσδιόριστες μορφές $\frac{0}{0}$ και $\frac{+\infty}{+\infty}$.

Παράδειγμα 4.60. $\lim_{x \rightarrow 0+} (-2x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0+} x = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} (-2) = -2$. Στη θέση του -2 μπορεί να είναι οποιοσδήποτε αριθμός.

Παράδειγμα 4.61. $\lim_{x \rightarrow 0+} x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0+} x^2 = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Παράδειγμα 4.62. $\lim_{x \rightarrow 0+} x^2 = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0+} x = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} x = 0$.

Παράδειγμα 4.63. $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, αλλά το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 4.64. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{x} = 5$.

Μπορεί να είναι οποιοσδήποτε θετικός αριθμός στη θέση του 5.

Παράδειγμα 4.65. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$.

Παράδειγμα 4.66. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = 0$.

Θα δούμε τώρα έναν τρόπο να βρίσκουμε, αν υπάρχουν, τις πλάγιες ασύμπτωτες ευθείες στο γράφημα μιας συνάρτησης.

Πρόταση 4.4. (i) Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση $y = \mu x + \nu$ είναι ασύμπτωτη ευθεία της συνάρτησης $y = f(x)$ στο $+\infty$. Τότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \mu, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \mu x) = \nu.$$

Αντιστρόφως, αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και είναι αριθμός και ορίσουμε το μ να είναι ίσο με το όριο αυτό και αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \mu x)$ και είναι αριθμός και ορίσουμε το ν να είναι ίσο με το όριο αυτό, τότε η ευθεία με εξίσωση $y = \mu x + \nu$ είναι ασύμπτωτη ευθεία της συνάρτησης στο $+\infty$.

(ii) Ισχύουν τα ανάλογα με του (i) για ασύμπτωτη ευθεία στο $-\infty$ και με όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty}$.

Απόδειξη. (i) Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση $y = \mu x + \nu$ είναι ασύμπτωτη ευθεία στο $+\infty$. Από την $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \mu x - \nu) = 0$ συνεπάγεται $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - \mu x - \nu}{x} = 0$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - \mu x - \nu}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu x + \nu}{x} = 0 + \mu = \mu.$$

Επίσης,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \mu x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \mu x - \nu) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \nu = 0 + \nu = \nu.$$

Αντιστρόφως, έστω $\mu = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\nu = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \mu x)$. Τότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \mu x - \nu) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \mu x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \nu = \nu - \nu = 0,$$

οπότε η ευθεία με εξίσωση $y = \mu x + \nu$ είναι ασύμπτωτη ευθεία στο $+\infty$.

(ii) Ομοίως. □

Παράδειγμα 4.67. Θεωρούμε τη συνάρτηση $x + \frac{1}{x}$ στο σύνολο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Υπολογίζουμε διαδοχικά τα όρια:

$$\mu = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x} \right) = 1, \quad \nu = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x} - 1x \right) = 0.$$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $y = 1x + 0 = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της συνάρτησης στο $+\infty$.

Επίσης:

$$\mu = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x} \right) = 1, \quad \nu = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{1}{x} - 1x \right) = 0.$$

Άρα πάλι η ευθεία με εξίσωση $y = 1x + 0 = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της συνάρτησης στο $-\infty$.

Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x)$. Η **απόλυτη τιμή** $|f| : A \rightarrow \mathbb{R}$ της συνάρτησης έχει τύπο $|f|(x) = |f(x)|$.

Κανόνας απόλυτου. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$, τότε υπάρχει και το $\lim_{x \rightarrow \xi} |f(x)|$ και

$$\lim_{x \rightarrow \xi} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) \right|.$$

Απόδειξη. Έστω $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta$. Παίρνουμε $\epsilon > 0$. Όταν το x είναι αρκετά κοντά στο ξ και είναι $\neq \xi$, τότε ισχύει $|f(x) - \eta| < \epsilon$, οπότε ισχύει

$$||f(x)| - |\eta|| \leq |f(x) - \eta| < \epsilon.$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow \xi} |f(x)| = |\eta|$.

Έστω $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = +\infty$ ή $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = -\infty$. Παίρνουμε $M > 0$. Όταν το x είναι αρκετά κοντά στο ξ και είναι $\neq \xi$, τότε ισχύει $f(x) > M$ ή $f(x) < -M$, αντιστοίχως, οπότε ισχύει $|f(x)| > M$. Άρα $\lim_{x \rightarrow \xi} |f(x)| = +\infty$. $\square$

Παράδειγμα 4.68. $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 2) = -1$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 1} |x - 2| = |-1| = 1$.

Παράδειγμα 4.69. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = -\infty$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right| = |-\infty| = +\infty$.

Παράδειγμα 4.70. Δεν ισχύει το αντίστροφο του κανόνα απόλυτου. Έστω η συνάρτηση $\frac{|x|}{x}$ με πεδίο ορισμού $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Τότε $\lim_{x \rightarrow 0} \left|\frac{|x|}{x}\right| = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$. Όμως, γνωρίζουμε ότι το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ δεν υπάρχει.

Υπάρχει μόνο μία περίπτωση κατά την οποία ισχύει το αντίστροφο του κανόνα απόλυτου.

Πρόταση 4.5. Αν $\lim_{x \rightarrow \xi} |f(x)| = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = 0$.

Απόδειξη. Έστω $\lim_{x \rightarrow \xi} |f(x)| = 0$. Παίρνουμε $\epsilon > 0$. Όταν το x είναι αρκετά κοντά στο ξ και είναι $\neq \xi$, τότε ισχύει $||f(x)| - 0| < \epsilon$, οπότε ισχύει

$$|f(x) - 0| = |f(x)| = ||f(x)| - 0| < \epsilon.$$

Επομένως, $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = 0$. $\square$

Ασκήσεις

4.6. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x}{1+x^3} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{1-x^3} = \frac{2}{3}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 - |x|} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{|x|}\right) = \pm\infty$.

4.7. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3+1}{x^2+1} = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+x+1}{2x^2+1} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x+1)^3(3x^2+2)^2(x+4)^{13}}{(x-5)^{20}} = 9$.

4.8. (i) Αν $\xi \in \mathbb{Z}$, αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow \xi^-} [x] = \xi - 1 = [\xi] - 1$ και $\lim_{x \rightarrow \xi^+} [x] = \xi = [\xi]$.

Υπόδειξη: Με τι ισούται η συνάρτηση $[x]$ στο διάστημα $(\xi - 1, \xi)$ και με τι στο $(\xi, \xi + 1)$;

(ii) Αν $\xi \notin \mathbb{Z}$, αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow \xi^-} [x] = \lim_{x \rightarrow \xi^+} [x] = [\xi]$.

Υπόδειξη: Με τι ισούται η συνάρτηση στο διάστημα $([\xi], \xi)$ και με τι στο $(\xi, [\xi] + 1)$;

(iii) Για ποια ξ υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow \xi} [x]$;

4.9. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} [\frac{1}{x}] = -1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\frac{1}{x}] = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x[\frac{1}{x}] = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\frac{1}{x}] = 0$.

Υπόδειξη: Με τι ισούται η συνάρτηση $[\frac{1}{x}]$ στο διάστημα $(-\infty, -1)$ και με τι στο $(1, +\infty)$;

4.10. Έστω $f(x) \neq 1$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της f . Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = 2$, αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)+3}{f(x)-1} = 5$.

4.11. Βρείτε, αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτες ευθείες, κατακόρυφες και πλάγιες, των x^2 , $-5x + \frac{7x+1}{x}$, $\frac{2x^3+x^2-3}{x^2+1}$, $\frac{x^4-1}{(x-1)(x^2+1)}$, $\frac{1}{x} + \frac{x}{x-1} + \frac{x^2}{x-2}$.

4.12. (i) Βρείτε τις πλάγιες και τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της συνάρτησης $y = \frac{2x+1}{x-1}$ και της αντίστροφής της $x = \frac{y+1}{y-2}$.

(ii) Θεωρήστε την $y = 2x - \frac{1}{x}$ με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$. Αποδείξτε ότι το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, +\infty)$ και ότι η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $x = \frac{1}{4}(y + \sqrt{y^2 + 8})$. Βρείτε τις πλάγιες και τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των δύο αυτών συναρτήσεων.

(iii) Γενικότερα, πώς σχετίζονται οι πλάγιες και οι κατακόρυφες ασύμπτωτες μίας συνάρτησης $y = f(x)$ και της αντίστροφής της $x = f^{-1}(y)$; Απαντήστε με τη βοήθεια ενός γενικού γραφήματος μιας συνάρτησης και του αντίστοιχου γραφήματος της αντίστροφής της, σχεδιασμένα στο ίδιο xy -επίπεδο.

4.13. Αν $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta$ και $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = \zeta$, αποδείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \max\{f(x), g(x)\} = \max\{\eta, \zeta\}, \quad \lim_{x \rightarrow \xi} \min\{f(x), g(x)\} = \min\{\eta, \zeta\}.$$

Υπόδειξη: Θυμηθείτε τους τύπους στην άσκηση 1.4.

4.14. (i) Δώστε παράδειγμα όπου υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow \xi} (f(x) + g(x))$ και όχι τα $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x)$.

(ii) Δώστε παράδειγμα όπου υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)g(x)$ και όχι τα $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x)$.

4.15. (i) Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in A$. Αν $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = 0$, αποδείξτε με τον ορισμό ότι $\lim_{x \rightarrow \xi} \sqrt{f(x)} = 0$.

(ii) Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$. Αν $\lim_{x \rightarrow \xi} (f(x) + \frac{1}{f(x)}) = 2$, αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = 1$.
Αν $\lim_{x \rightarrow \xi} (f(x) + \frac{1}{|f(x)|}) = 0$, αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = -1$.

4.5 Όρια και αλλαγές μεταβλητής

Μερικές φορές θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο συνάρτησης $g(f(x))$ η οποία παρουσιάζεται ως *σύνθεση* δύο συναρτήσεων: της $f(x)$ και της $g(y)$. Εννοείται ότι για να ορίζεται η σύνθεση αυτή πρέπει το σύνολο τιμών της $f(x)$ να περιέχεται στο πεδίο ορισμού της $g(y)$. Πιο τυπικά, υποθέτουμε ότι έχουμε συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ με τύπο $f(x)$ και συνάρτηση $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(y)$. Τότε η *σύνθεση* $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$ των δύο συναρτήσεων έχει τύπο $(g \circ f)(x) = g(f(x))$: στον τύπο $g(y)$ αντικαθιστούμε το y με το $f(x)$.

Σε πολλές περιπτώσεις είναι ήδη γνωστά τα όρια των δύο απλούστερων συναρτήσεων. Για παράδειγμα, έστω

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta, \quad \lim_{y \rightarrow \eta} g(y) = \zeta,$$

όπου $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ και $\eta \in \overline{\mathbb{R}}$. Παρατηρήστε τώρα την εξής «αλυσιδωτή διαδικασία». Όταν το x προσεγγίζει το ξ και είναι $\neq \xi$, τότε το $f(x)$ προσεγγίζει το η . Αν, επιπλέον, υποθέσουμε ότι ισχύει $f(x) \neq \eta$ κοντά στο ξ , τότε το $f(x)$ προσεγγίζει το η και είναι $\neq \eta$. Επομένως, το $g(f(x))$ προσεγγίζει το ζ .

Ξεκινώντας, λοιπόν, από το ότι το x προσεγγίζει το ξ και είναι $\neq \xi$, καταλήγουμε στο ότι το $g(f(x))$ προσεγγίζει το ζ . Συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow \xi} g(f(x)) = \zeta = \lim_{y \rightarrow \eta} g(y).$$

Παρατηρήστε ότι στο αρχικό όριο το οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε, δηλαδή στο όριο της συνάρτησης $g(f(x))$, δεν εμφανίζεται η μεταβλητή y . Την μεταβλητή αυτή την εμφανίζουμε εμείς και συνηθίζεται να λέμε ότι κάνουμε **αλλαγή μεταβλητής** ή **αντικατάσταση**, εννοώντας ότι αλλάζουμε τη μεταβλητή x σε μεταβλητή $y = f(x)$ ή ότι αντικαθιστούμε τη μεταβλητή $f(x)$ με τη μεταβλητή y και ότι μετατρέπουμε το $\lim_{x \rightarrow \xi}$ σε $\lim_{y \rightarrow \eta}$.

Το γενικό αποτέλεσμα έχει ως εξής.

Κανόνας αλλαγής μεταβλητής ή κανόνας αντικατάστασης, I. Έστω $f : A \rightarrow B$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ και $\xi \in \mathbb{R}$, $\eta \in \mathbb{R}$. Αν $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta$ και αν ισχύει $f(x) \neq \eta$ κοντά στο ξ και αν υπάρχει το $\lim_{y \rightarrow \eta} g(y)$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow \xi} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow \eta} g(y).$$

Αν $\eta \in \mathbb{R}$, τότε τα ανάλογα ισχύουν αν αντικαταστήσουμε το η με ένα από τα $\eta \pm$. Πιο αναλυτικά:

$$\lim_{x \rightarrow \xi} g(f(x)) = \begin{cases} \lim_{y \rightarrow \eta} g(y), & \text{αν } \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta \in \mathbb{R} \text{ και } f(x) \neq \eta \text{ κοντά στο } \xi, \\ \lim_{y \rightarrow \eta+} g(y), & \text{αν } \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta \in \mathbb{R} \text{ και } f(x) > \eta \text{ κοντά στο } \xi, \\ \lim_{y \rightarrow \eta-} g(y), & \text{αν } \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta \in \mathbb{R} \text{ και } f(x) < \eta \text{ κοντά στο } \xi, \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} g(y), & \text{αν } \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = +\infty, \\ \lim_{y \rightarrow -\infty} g(y), & \text{αν } \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = -\infty. \end{cases}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\eta \in \mathbb{R}$, $\zeta \in \mathbb{R}$ και ότι $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta$ και $\lim_{y \rightarrow \eta} g(y) = \zeta$ και, επιπλέον, ότι ισχύει $f(x) \neq \eta$ κοντά στο ξ .

Παίρνουμε $\epsilon > 0$. Όταν το y είναι αρκετά κοντά στο η και είναι $\neq \eta$, τότε ισχύει $|g(y) - \zeta| < \epsilon$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ ώστε, αν ισχύει $|y - \eta| < \delta$ και $y \neq \eta$, τότε ισχύει $|g(y) - \zeta| < \epsilon$. Τώρα, όταν το x είναι αρκετά κοντά στο ξ και είναι $\neq \xi$, τότε ισχύει $|f(x) - \eta| < \delta$ και $f(x) \neq \eta$, οπότε ισχύει $|g(f(x)) - \zeta| < \epsilon$. Άρα $\lim_{x \rightarrow \xi} g(f(x)) = \zeta$.

Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις η απόδειξη είναι παρόμοια. □

Παράδειγμα 4.71. Αν $a > 0$, τότε από τα όρια $\lim_{y \rightarrow 0} |y|^a = 0$ και $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{|y|^a} = +\infty$, τα οποία αποδείξαμε στα παραδείγματα 4.9 και 4.10, προκύπτουν, με την προφανή αλλαγή μεταβλητής $y = x - \xi$, τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow \xi} |x - \xi|^a = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{1}{|x - \xi|^a} = +\infty.$$

Επίσης, από τα όρια $\lim_{y \rightarrow 0-} \frac{1}{y} = -\infty$ και $\lim_{y \rightarrow 0+} \frac{1}{y} = +\infty$ προκύπτουν τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow \xi-} \frac{1}{x - \xi} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \xi+} \frac{1}{x - \xi} = +\infty.$$

Παράδειγμα 4.72. Θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\sqrt{x}+1)^4}{(\sqrt{x}+1)^8 + (\sqrt{x}+1)^{13} + 5}$.

Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $y = \sqrt{x} + 1$ και η $\frac{(\sqrt{x}+1)^4}{(\sqrt{x}+1)^8 + (\sqrt{x}+1)^{13} + 5}$ γράφεται $\frac{y^4}{y^8 + y^{13} + 5}$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0+} (\sqrt{x} + 1) = 1$ και επειδή $\sqrt{x} + 1 > 1$ για κάθε x κοντά στο 0 από δεξιά του, συνεπάγεται

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\sqrt{x}+1)^4}{(\sqrt{x}+1)^8 + (\sqrt{x}+1)^{13} + 5} = \lim_{y \rightarrow 1+} \frac{y^4}{y^8 + y^{13} + 5} = \frac{1}{7}.$$

Παράδειγμα 4.73. Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x \rightarrow 1+} (\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{(x-1)^3} + 1)$.

Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ και η $\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{(x-1)^3} + 1$ γράφεται $y - y^6 + 1$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty$, συνεπάγεται

$$\lim_{x \rightarrow 1+} (\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{(x-1)^3} + 1) = \lim_{y \rightarrow +\infty} (y - y^6 + 1) = \lim_{y \rightarrow +\infty} y^6 (-1 + \frac{1}{y^5} + \frac{1}{y^6}) = -\infty.$$

Παράδειγμα 4.74. Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((\frac{x-1}{x^2+x+1})^{-2} + (\frac{x-1}{x^2+x+1})^{-3})$.

Με την αλλαγή μεταβλητής $y = \frac{x-1}{x^2+x+1}$, η $(\frac{x-1}{x^2+x+1})^{-2} + (\frac{x-1}{x^2+x+1})^{-3}$ γράφεται $y^{-2} + y^{-3}$. Επειδή

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^2+x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = 0$$

και επειδή $\frac{x-1}{x^2+x+1} > 0$ για κάθε $x > 1$, δηλαδή για κάθε x κοντά στο $+\infty$, συνεπάγεται

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} ((\frac{x-1}{x^2+x+1})^{-2} + (\frac{x-1}{x^2+x+1})^{-3}) = \lim_{y \rightarrow 0+} (y^{-2} + y^{-3}) = +\infty.$$

Παράδειγμα 4.75. Μερικές χρήσιμες, απλές και κάπως γενικές σχέσεις είναι οι παρακάτω.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(\frac{1}{x}) = \lim_{y \rightarrow +\infty} g(y), \quad \lim_{x \rightarrow 0-} g(\frac{1}{x}) = \lim_{y \rightarrow -\infty} g(y),$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(\frac{1}{x}) = \lim_{y \rightarrow 0+} g(y), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(\frac{1}{x}) = \lim_{y \rightarrow 0-} g(y),$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(-x) = \lim_{y \rightarrow -\infty} g(y), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(-x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} g(y),$$

$$\lim_{x \rightarrow \xi} g(ax+b) = \lim_{y \rightarrow a\xi+b} g(y).$$

Οι σχέσεις αυτές δικαιολογούνται μέσω των αλλαγών μεταβλητής $y = \frac{1}{x}$, $y = -x$ και $y = ax + b$.

Ασκήσεις

4.16. Με κατάλληλες αλλαγές μεταβλητής αποδείξτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} ((\frac{x^2+1}{x^5+2})^8 + 3(\frac{x^2+1}{x^5+2})^4 + 1) = \frac{113}{64}$,

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} + 1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + \sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} + 1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0-} \sqrt[3]{(\sqrt{|x|} + \frac{1}{x})^2 + (\sqrt{|x|} + \frac{1}{x})} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} (\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}} + \sqrt{\frac{\sqrt{x}+x}{x+1}}) = 0.$$

4.17. Δικαιολογήστε: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x^2) = \lim_{y \rightarrow +\infty} g(y)$, $\lim_{x \rightarrow 0+} g(\sqrt{x}) = \lim_{y \rightarrow 0+} g(y)$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(\frac{1}{x^2}) = \lim_{y \rightarrow +\infty} g(y)$.

4.18. Έστω ότι ισχύει $f(\sqrt{x}) = -f(x)^2 + 2$ για κάθε $x > 1$.

(i) Αποδείξτε ότι, αν το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ είναι αριθμός, τότε οι μόνες πιθανές τιμές του είναι -2 και 1 . Μπορείτε να βρείτε συγκεκριμένες συναρτήσεις f οι οποίες υλοποιούν καθεμία από αυτές τις περιπτώσεις;

(ii) Αποδείξτε ότι δεν μπορεί να είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

(iii) Αποδείξτε ότι δεν μπορεί να είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$;

Υπόδειξη: Ποιον αναδρομικό τύπο ικανοποιεί η ακολουθία $x_n = f(2^{2^{n-1}})$;

4.6 Όρια και ανισότητες

Πρόταση 4.6. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ και έστω ότι ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο ξ .

(i) Αν $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = +\infty$.

(ii) Αν $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = -\infty$.

Απόδειξη. (i) Έστω $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = +\infty$. Παίρνουμε $M > 0$. Όταν το x είναι αρκετά κοντά στο ξ και είναι $\neq \xi$, τότε ισχύει $f(x) > M$, οπότε ισχύει $g(x) \geq f(x) > M$. Άρα $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = +\infty$.

(ii) Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του (i). □

Παράδειγμα 4.76. Θεωρούμε την $\frac{x^2+x-1}{x}$. Επειδή ισχύει $\frac{x^2+x-1}{x} \geq \frac{x^2}{x} = x$ για κάθε x στο $(1, +\infty)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, προκύπτει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x-1}{x} = +\infty$.

Παράδειγμα 4.77. Επειδή ισχύει $\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} \geq \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}$ για κάθε x στο $(-1, 0) \cup (0, 1)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, συνεπάγεται $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} \right) = +\infty$.

Πρόταση 4.7. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$. Αν $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta$ και $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = \zeta$ και αν ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο ξ , τότε $\eta \leq \zeta$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι $\zeta < \eta$, οπότε ο αριθμός $\frac{\eta-\zeta}{2}$ είναι θετικός. Επειδή $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta$ και $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = \zeta$, όταν το x είναι αρκετά κοντά στο ξ και είναι $\neq \xi$, τότε ισχύει

$$|f(x) - \eta| < \frac{\eta-\zeta}{2}, \quad |g(x) - \zeta| < \frac{\eta-\zeta}{2},$$

οπότε

$$f(x) > \eta - \frac{\eta-\zeta}{2} = \frac{\eta+\zeta}{2}, \quad g(x) < \zeta + \frac{\eta-\zeta}{2} = \frac{\eta+\zeta}{2}.$$

Άρα, όταν το x είναι αρκετά κοντά στο ξ και είναι $\neq \xi$, τότε ισχύει $f(x) > \frac{\eta+\zeta}{2} > g(x)$, το οποίο αντιφάσκει με το ότι ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο ξ . □

Παράδειγμα 4.78. Αν υπάρχει το $\eta = \lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ και ισχύει $f(x) \leq u$ κοντά στο ξ , τότε $\eta \leq u$.

Πράγματι, μπορούμε να θεωρήσουμε τη σταθερή συνάρτηση u , οπότε, επειδή ισχύει $f(x) \leq u$ κοντά στο ξ και $\lim_{x \rightarrow \xi} u = u$, συνεπάγεται $\eta \leq u$.

Αν υπάρχει το $\eta = \lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ και ισχύει $f(x) \geq l$ κοντά στο ξ , τότε $\eta \geq l$. Η απόδειξη είναι παρόμοια με την προηγούμενη.

Αν υπάρχει το $\eta = \lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ και ισχύει $f(x) \in [l, u]$ κοντά στο ξ , τότε $\eta \in [l, u]$. Αυτό είναι συνδυασμός των δύο προηγούμενων.

Κανόνας παρεμβολής. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$. Αν $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \xi} h(x) = \rho$, όπου το ρ είναι αριθμός, και αν ισχύει $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ κοντά στο ξ , τότε $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = \rho$.

Απόδειξη. Έστω $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \xi} h(x) = \rho$ και έστω $\epsilon > 0$. Όταν το x είναι αρκετά κοντά στο ξ και είναι $\neq \xi$, τότε ισχύει $|f(x) - \rho| < \epsilon$ και $|h(x) - \rho| < \epsilon$, οπότε ισχύει

$$\rho - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < \rho + \epsilon,$$

δηλαδή $|g(x) - \rho| < \epsilon$. Άρα $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = \rho$. □

Παράδειγμα 4.79. Έστω ότι ισχύει $-\frac{1}{x^2} \leq f(x) < \frac{1}{x}$ για κάθε $x \geq 3$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-\frac{1}{x^2}) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, συνεπάγεται $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Παράδειγμα 4.80. Ισχύει $x - 1 < [x] \leq x$ για κάθε x . Άρα ισχύει $1 - \frac{1}{x} < \frac{[x]}{x} \leq 1$ για κάθε $x > 0$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \frac{1}{x}) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$, συνεπάγεται $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[x]}{x} = 1$.

Από τον κανόνα παρεμβολής έχουμε το εξής χρήσιμο συμπέρασμα:

Αν $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = 0$ και g είναι φραγμένη κοντά στο ξ , τότε $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)g(x) = 0$.

Πράγματι, επειδή g είναι φραγμένη κοντά στο ξ , υπάρχει M ώστε να ισχύει $|g(x)| \leq M$ κοντά στο ξ . Συνεπάγεται ότι ισχύει

$$-M|f(x)| \leq f(x)g(x) \leq M|f(x)|$$

κοντά ξ . Επειδή $\lim_{x \rightarrow \xi} M|f(x)| = 0$ και $\lim_{x \rightarrow \xi} (-M|f(x)|) = 0$, από τον κανόνα παρεμβολής παίρνουμε ότι $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)g(x) = 0$.

Παράδειγμα 4.81. Επειδή $|\sin x| \leq 1$ για κάθε x και $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$, είναι $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Πρόταση 4.8. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$.

- (i) Αν $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) < u$, τότε ισχύει $f(x) < u$ κοντά στο ξ .
(ii) Αν $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) > l$, τότε ισχύει $f(x) > l$ κοντά στο ξ .

Απόδειξη. (i) Έστω $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) < u$.

Έστω ότι το $\eta = \lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ είναι αριθμός, οπότε $\eta < u$. Τότε το $u - \eta$ είναι θετικός αριθμός. Τώρα, όταν το x είναι αρκετά κοντά στο ξ και είναι $\neq \xi$, τότε ισχύει $|f(x) - \eta| < u - \eta$, οπότε ισχύει $f(x) < \eta + (u - \eta) = u$.

Έστω $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = -\infty$. Επειδή το $-|u| - 1$ είναι αρνητικός αριθμός, όταν το x είναι αρκετά κοντά στο ξ και είναι $\neq \xi$, τότε ισχύει $f(x) < -|u| - 1 < u$.

(ii) Περιπτώσεις: το $\eta = \lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ είναι αριθμός, οπότε $\eta > l$, και $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = +\infty$. □

Παράδειγμα 4.82. Είναι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - 2x^6 + x^4 + 3x^2 - 5x + 1}{x^8 + 6x^5 - x^4 + 22x^2 + 1} = -\frac{1}{29} > -\frac{1}{28}$. Άρα ισχύει $\frac{x^7 - 2x^6 + x^4 + 3x^2 - 5x + 1}{x^8 + 6x^5 - x^4 + 22x^2 + 1} > -\frac{1}{28}$ κοντά στο 1, δηλαδή για κάθε $x \in (1 - \delta, 1) \cup (1, 1 + \delta)$ για κατάλληλο $\delta > 0$.

Παράδειγμα 4.83. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \frac{1}{x} + 1}{(x + \frac{1}{x})^2 + 1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t + 1}{t^2 + 1} = 0$. Άρα ισχύει $\frac{x + \frac{1}{x} + 1}{(x + \frac{1}{x})^2 + 1} < \frac{1}{5}$ κοντά στο $+\infty$. Με άλλα λόγια, υπάρχει $N > 0$ ώστε να ισχύει $\frac{x + \frac{1}{x} + 1}{(x + \frac{1}{x})^2 + 1} < \frac{1}{5}$ για κάθε $x \in (N, +\infty)$.

Πρόταση 4.9. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$.

- (i) Αν το $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ είναι αριθμός, τότε f είναι φραγμένη κοντά στο ξ .
(ii) Αν $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = +\infty$, τότε f είναι κάτω φραγμένη, αλλά όχι άνω φραγμένη κοντά στο ξ .
(iii) Αν $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = -\infty$, τότε f είναι άνω φραγμένη, αλλά όχι κάτω φραγμένη κοντά στο ξ .

Απόδειξη. (i) Έστω ότι το $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta$ είναι αριθμός. Όταν το x είναι αρκετά κοντά στο ξ και είναι $\neq \xi$, τότε ισχύει $|f(x) - \eta| < 1$, οπότε το $f(x)$ περιέχεται στο φραγμένο διάστημα $[\eta - 1, \eta + 1]$.

Άρα η f είναι φραγμένη κοντά στο ξ .

(ii) Έστω $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = +\infty$. Όταν το x είναι αρκετά κοντά στο ξ και είναι $\neq \xi$, τότε ισχύει $f(x) > 1$, οπότε το $f(x)$ περιέχεται στο διάστημα $[1, +\infty)$. Άρα η f είναι κάτω φραγμένη κοντά στο ξ . Επίσης, για κάθε u θα ισχύει $f(x) > u$ όταν το x είναι αρκετά κοντά στο ξ και είναι $\neq \xi$, οπότε το u δεν είναι άνω φράγμα της f κοντά στο ξ . Άρα η f δεν έχει κανένα άνω φράγμα κοντά στο ξ .

(iii) Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του (ii). $\square$

Παράδειγμα 4.84. Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5+1}{2x^5-x^3+x^2+8x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+\frac{1}{x^5}}{2-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{8}{x^4}+\frac{1}{x^5}} = \frac{1}{2}$. Άρα η συνάρτηση $\frac{x^5+1}{2x^5-x^3+x^2+8x+1}$ είναι φραγμένη κοντά στο $-\infty$. Δηλαδή, υπάρχει $N > 0$ ώστε η συνάρτηση να είναι φραγμένη στο διάστημα $(-\infty, -N)$.

Παράδειγμα 4.85. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{(x+\frac{1}{x})^7+1}{3(x+\frac{1}{x})^6+(x+\frac{1}{x})^2} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t^7+1}{3t^6+t^2} = \lim_{t \rightarrow -\infty} t \frac{1+\frac{1}{t^7}}{3+\frac{1}{t^4}} = -\infty$. Άρα η συνάρτηση $\frac{(x+\frac{1}{x})^7+1}{3(x+\frac{1}{x})^6+(x+\frac{1}{x})^2}$ είναι άνω φραγμένη κοντά στο 0 από αριστερά του. Δηλαδή, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η συνάρτηση να είναι άνω φραγμένη στο διάστημα $(-\delta, 0)$.

Ασκήσεις

4.19. (i) Αν $1 - \sqrt{|x|} < f(x) \leq 1 + \sqrt{|x|}$ για κάθε $x \in (-1, 1)$, αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

(ii) Αν $\frac{x+1}{2x-1} < f(x) < \frac{x-1}{2x+1}$ για κάθε $x \leq -7$, αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.

(iii) Αν $(x-1)f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, 2)$, αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = +\infty$.

4.20. Χρησιμοποιώντας τη βασική ανισότητα για το ακέραιο μέρος στον ορισμό 1.4, αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [x] = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{[2x]}{x} = 2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\sqrt{x}]}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0\pm} \left[\frac{1}{x}\right] = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0\pm} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1$.

4.21. (i) Έστω $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = +\infty$ και έστω ότι η g είναι κάτω φραγμένη κοντά στο ξ . Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow \xi} (f(x) + g(x)) = +\infty$.

(ii) Έστω $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = -\infty$ και έστω ότι η g είναι άνω φραγμένη κοντά στο ξ . Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow \xi} (f(x) + g(x)) = -\infty$.

(iii) Έστω $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$ και έστω ότι η g έχει θετικό κάτω φράγμα κοντά στο ξ . Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)g(x) = +\infty$ ή $-\infty$, αντιστοίχως.

(iv) Έστω $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$ και έστω ότι η g έχει αρνητικό άνω φράγμα κοντά στο ξ . Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)g(x) = -\infty$ ή $+\infty$, αντιστοίχως.

4.22. Υπολογίζοντας κατάλληλα όρια,

(i) αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{3x^2+7x+1}{x^2-5x+1} < \frac{301}{100}$ κοντά στο $+\infty$.

(ii) αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{x^8+1}{4x^4-x^2+2x-1} < \frac{3}{4}$ κοντά στο 1.

(iii) αποδείξτε ότι ισχύει $(x - \frac{1}{x})^5 - (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^3 > 10^7$ κοντά στο $+\infty$.

(iv) αποδείξτε ότι ισχύει $1 - \frac{1}{10^8} < \frac{x^5+13x^3+25x^2+33}{x^5+2x+1} < 1 + \frac{1}{10^7}$ κοντά στο $-\infty$.

4.23. Έστω $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) < \lim_{x \rightarrow \xi} g(x)$. Αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) < g(x)$ κοντά στο ξ .

4.24. Θεωρήστε τις συναρτήσεις $\begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{αν } x < 0, \\ -\frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{αν } x > 0, \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{αν } x < 0, \\ x, & \text{αν } x \geq 0, \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{|x|}, & \text{αν } x < 0, \\ \frac{1}{x-1}, & \text{αν } x \geq 0. \end{cases}$ Αφού υπολογίσετε τα κατάλληλα όρια, βρείτε ποιες από αυτές είναι άνω φραγμένες ή κάτω φραγμένες ή

φραγμένες κοντά στο 0 ή στο 0 από δεξιά του ή στο 0 από αριστερά του. Μπορείτε να βρείτε συγκεκριμένα διαστήματα $(a, 0)$ ή $(0, b)$ ή ενώσεις $(a, 0) \cup (0, b)$ στα οποία οι παραπάνω συναρτήσεις είναι άνω φραγμένες ή κάτω φραγμένες ή φραγμένες, καθώς και συγκεκριμένα άνω φράγματα ή κάτω φράγματα;

4.25. Αφού υπολογίσετε τα κατάλληλα όρια, βρείτε ποιες από τις συναρτήσεις x^2 , $-x^3$, $\frac{1}{x^2}$, $-|x|$, $x - \sqrt{|x|}$, $\frac{x^3-4x^2+1}{x^2+x+1}$, $\frac{x^3+x-6}{x+4}$, $\frac{x^2-x+1}{x^3-7x^2+x+6}$ είναι άνω φραγμένες ή κάτω φραγμένες ή φραγμένες κοντά στο $+\infty$ ή στο $-\infty$. Μπορείτε να βρείτε συγκεκριμένα διαστήματα $(a, +\infty)$ ή $(-\infty, b)$ στα οποία οι παραπάνω συναρτήσεις είναι άνω φραγμένες ή κάτω φραγμένες ή φραγμένες, καθώς και συγκεκριμένα άνω φράγματα ή κάτω φράγματα;

4.7 Όριο συνάρτησης και ακολουθίες

Έστω $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta$. Ας θεωρήσουμε και κάποια ακολουθία (x_n) , όλοι οι όροι της οποίας περιέχονται στο πεδίο ορισμού της $f(x)$ και είναι διαφορετικοί από το ξ και η οποία συγκλίνει στο ξ . Δηλαδή, έστω $x_n \neq \xi$ για κάθε n και $x_n \rightarrow \xi$. Σχηματίζουμε την ακολουθία $(f(x_n))$ και θέλουμε να βρούμε το όριό της, αν υπάρχει. Παρατηρήστε την εξής «αλυσιδωτή διαδικασία». Έστω ότι το n τείνει στο $+\infty$. Τότε το x_n προσεγγίζει το ξ και είναι $\neq \xi$. Άρα το $f(x_n)$ προσεγγίζει το η . Επομένως, από το ότι το n τείνει στο $+\infty$ καταλήγουμε στο ότι το $f(x_n)$ προσεγγίζει το η . Συμπεραίνουμε ότι $f(x_n) \rightarrow \eta$.

Με παρόμοιο συλλογισμό βγάζουμε ανάλογα συμπεράσματα σε όλες τις περιπτώσεις ορίου, και έχουμε το εξής γενικό αποτέλεσμα.

Πρόταση 4.10. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ και έστω $x_n \in A$ για κάθε n . Αν $x_n \rightarrow \xi$ και αν ισχύει $x_n \neq \xi$ για κάθε n και αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$, τότε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow \xi} f(x).$$

Τα ανάλογα ισχύουν, αν αντικαταστήσουμε το ξ με ένα από τα $\xi \pm$ ή $\pm\infty$. Πιο αναλυτικά:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \xi} f(x), & \text{αν } x_n \rightarrow \xi \in \mathbb{R} \text{ και } x_n \neq \xi \text{ για κάθε } n, \\ \lim_{x \rightarrow \xi+} f(x), & \text{αν } x_n \rightarrow \xi \in \mathbb{R} \text{ και } x_n > \xi \text{ για κάθε } n, \\ \lim_{x \rightarrow \xi-} f(x), & \text{αν } x_n \rightarrow \xi \in \mathbb{R} \text{ και } x_n < \xi \text{ για κάθε } n, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), & \text{αν } x_n \rightarrow +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), & \text{αν } x_n \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\xi \in \mathbb{R}$, $\eta \in \mathbb{R}$ και ότι $x_n \rightarrow \xi$ και $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta$ και, επιπλέον, ότι ισχύει $x_n \neq \xi$ για κάθε n .

Παίρνουμε $\epsilon > 0$, οπότε, όταν το x είναι αρκετά κοντά στο ξ και είναι $\neq \xi$, τότε ισχύει $|f(x) - \eta| < \epsilon$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ ώστε, όταν ισχύει $|x - \xi| < \delta$ και $x \neq \xi$, τότε ισχύει $|f(x) - \eta| < \epsilon$. Τώρα, αν το n είναι αρκετά μεγάλο, τότε ισχύει $|x_n - \xi| < \delta$ και $x_n \neq \xi$, οπότε ισχύει $|f(x_n) - \eta| < \epsilon$. Άρα $f(x_n) \rightarrow \eta$.

Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις η απόδειξη είναι παρόμοια. □

Ως επιβεβαίωση, έχουμε τα εξής απλά παραδείγματα.

Παράδειγμα 4.86. Από το $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ προκύπτει το $n^2 \rightarrow +\infty$. Για να το αποδείξουμε, αρκεί να θεωρήσουμε την ακολουθία (x_n) με τύπο $x_n = n$ η οποία αποκλίνει στο $+\infty$ και όλοι οι όροι της περιέχονται στο πεδίο ορισμού της x^2 .

Παράδειγμα 4.87. Από το $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$ συνεπάγεται το $\frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$. Αρκεί να θεωρήσουμε την ακολουθία (x_n) με τύπο $x_n = \frac{1}{n}$ η οποία συγκλίνει στο 0, όλοι οι όροι της περιέχονται στο πεδίο ορισμού $[0, +\infty)$ της $\sqrt{x}$ και είναι $\neq 0$.

Παράδειγμα 4.88. Για το όριο της ακολουθίας $(1 + (1 + \frac{1}{n})^{2n} - 3(1 + \frac{1}{n})^{3n})$ θεωρούμε τη συνάρτηση $1 + x^2 - 3x^3$ και την ακολουθία (x_n) με τύπο $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Τότε $x_n \rightarrow e$ και $x_n \neq e$ για κάθε n . Επίσης, $\lim_{x \rightarrow e} (1 + x^2 - 3x^3) = 1 + e^2 - 3e^3$. Άρα

$$1 + (1 + \frac{1}{n})^{2n} - 3(1 + \frac{1}{n})^{3n} = 1 + x_n^2 - 3x_n^3 \rightarrow 1 + e^2 - 3e^3.$$

Η Πρόταση 4.10 χρησιμοποιείται, συνήθως, με δύο τρόπους. Όπως κάναμε στα παραδείγματα 4.86, 4.87 και 4.88, γνωρίζοντας ήδη κάποια όρια συναρτήσεων, βγάζουμε συμπεράσματα για όρια ακολουθιών. Αλλά μπορούμε να κάνουμε και το εξής. Έστω ότι δεν γνωρίζουμε αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$. Ας υποθέσουμε ότι μπορούμε να βρούμε *μία* ακολουθία (x_n) στο πεδίο ορισμού της f έτσι ώστε $x_n \rightarrow \xi$ και $x_n \neq \xi$ για κάθε n και ώστε η ακολουθία $(f(x_n))$ να μην έχει όριο. Τότε συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$. Διότι, αν υπήρχε αυτό το όριο, τότε και η $(f(x_n))$ θα είχε το ίδιο όριο. Το ίδιο συμπέρασμα θα προκύψει και με μία παραλλαγή του προηγούμενου. Ας υποθέσουμε ότι μπορούμε να βρούμε *δύο* ακολουθίες (x'_n) και (x''_n) στο πεδίο ορισμού της f έτσι ώστε $x'_n \rightarrow \xi$, $x''_n \rightarrow \xi$ και $x'_n \neq \xi$, $x''_n \neq \xi$ για κάθε n και ώστε οι ακολουθίες $(f(x'_n))$ και $(f(x''_n))$ να έχουν διαφορετικά όρια. Τότε συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$.

Παράδειγμα 4.89. Η ακολουθία (x_n) με τύπο $x_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ συγκλίνει στο 0, όλοι οι όροι της είναι $\neq 0$ και περιέχονται στο πεδίο ορισμού της $\frac{1}{x}$. Γνωρίζουμε ότι η αντίστοιχη ακολουθία $(\frac{1}{x_n})$ με τύπο $\frac{1}{x_n} = (-1)^{n-1}n$ δεν έχει όριο. Άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$.

Παράδειγμα 4.90. Για να μελετήσουμε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-1)^{[x]}$ σχεδιάζουμε το γράφημα της $(-1)^{[x]}$. Δείτε και την άσκηση 2.8.

Σε κάθε διάστημα $[n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, η συνάρτηση είναι σταθερή $(-1)^{[x]} = (-1)^n$. Όταν το x απομακρύνεται προς τα δεξιά περνά από κάθε τέτοιο διάστημα στο επόμενο του, με αποτέλεσμα η συνάρτηση να παίρνει εναλλάξ τις τιμές $+1$ και -1 . Επομένως, οι τιμές της συνάρτησης δεν προσεγγίζουν κάποιον αριθμό και φαίνεται ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-1)^{[x]}$.

Ας δούμε την αναλυτική απόδειξη. Σχηματίζουμε μία ακολουθία τιμών του x η οποία αποκλίνει στο $+\infty$, επιλέγοντας τις τιμές αυτές μία σε καθένα από τα παραπάνω διαδοχικά διαστήματα: έστω, για παράδειγμα, η ακολουθία (x_n) με τύπο $x_n = n$. Τότε $x_n \rightarrow +\infty$ και το $(-1)^{[x_n]} = (-1)^{[n]} = (-1)^n$ δεν έχει όριο. Άρα το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-1)^{[x]}$ δεν υπάρχει.

Ασκήσεις

4.26. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow 0+} (-1)^{[\frac{1}{x}]}$ και $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x - [x])$.

Υπόδειξη για το $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x - [x])$. Σχεδιάστε το γράφημα της $x - [x]$ και βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $x - [x] = 0$, καθώς και της εξίσωσης $x - [x] = \frac{1}{2}$. Από όλους αυτούς τους αριθμούς δημιουργήστε κατάλληλες ακολουθίες οι οποίες αποκλίνουν στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

4.27. (i) Έστω ότι η f είναι περιοδική με περίοδο $T > 0$, δηλαδή ισχύει $f(x \pm T) = f(x)$ για κάθε x . Αποδείξτε ότι, αν υπάρχει ένα από τα $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$, τότε η f είναι σταθερή συνάρτηση.

Υπόδειξη: Έστω $f(x') \neq f(x'')$ για κάποια x', x'' . Θεωρήστε τις ακολουθίες (x'_n) και (x''_n) με τύπους $x'_n = x' + nT$ και $x''_n = x'' + nT$.

(ii) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cos x$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin x$ και $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x - [x])$.

4.8 Όρια ρητών συναρτήσεων

Έστω πολωνυμική συνάρτηση $a_N x^N + \dots + a_1 x + a_0$ με $N \geq 1$ και $a_N \neq 0$. Από το $\lim_{x \rightarrow \xi} x^k = \xi^k$ και από το $\lim_{x \rightarrow \xi} a_k = a_k$ παίρνουμε το $\lim_{x \rightarrow \xi} a_k x^k = a_k \xi^k$ και, εφαρμόζοντας τον κανόνα αθροίσματος σε $N + 1$ συναρτήσεις, βρίσκουμε

$$\lim_{x \rightarrow \xi} (a_N x^N + \dots + a_1 x + a_0) = a_N \xi^N + \dots + a_1 \xi + a_0.$$

Για να βρούμε τα όρια όταν $x \rightarrow \pm\infty$, γράφουμε

$$a_N x^N + \dots + a_1 x + a_0 = a_N x^N \left(1 + \frac{a_{N-1}}{a_N} \frac{1}{x} + \dots + \frac{a_0}{a_N} \frac{1}{x^N}\right),$$

οπότε, επειδή το όριο της παρένθεσης όταν $x \rightarrow \pm\infty$ είναι 1, έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (a_N x^N + \dots + a_1 x + a_0) = a_N (+\infty) = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a_N > 0, \\ -\infty, & \text{αν } a_N < 0, \end{cases}$$

και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (a_N x^N + \dots + a_1 x + a_0) = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a_N > 0 \text{ και } N \text{ άρτιο ή αν } a_N < 0 \text{ και } N \text{ περιττό,} \\ -\infty, & \text{αν } a_N < 0 \text{ και } N \text{ άρτιο ή αν } a_N > 0 \text{ και } N \text{ περιττό.} \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι το $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_N x^N + \dots + a_1 x + a_0)$ εξαρτάται μόνο από τον μεγιστοβάθμιο όρο του πολωνύμου, δηλαδή

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_N x^N + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_N x^N.$$

Παράδειγμα 4.91. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-5x^3 + x^2 - 4x - 12) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-5x^3) = -\infty.$

Παράδειγμα 4.92. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^3 + x^2 - 12) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^3) = +\infty.$

Παράδειγμα 4.93. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (7x^4 + x^3 - x + 5) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 7x^4 = +\infty.$

Τα όρια ρητών συναρτήσεων δεν είναι αρκετά πιο περίπλοκα. Αν $\frac{a_N x^N + \dots + a_1 x + a_0}{b_M x^M + \dots + b_1 x + b_0}$ είναι ρητή συνάρτηση με $a_N \neq 0$, $b_M \neq 0$, τότε γράφουμε πάλι

$$\frac{a_N x^N + \dots + a_1 x + a_0}{b_M x^M + \dots + b_1 x + b_0} = \frac{a_N}{b_M} x^{N-M} \frac{1 + \frac{a_{N-1}}{a_N} \frac{1}{x} + \dots + \frac{a_0}{a_N} \frac{1}{x^N}}{1 + \frac{b_{M-1}}{b_M} \frac{1}{x} + \dots + \frac{b_0}{b_M} \frac{1}{x^M}},$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_N x^N + \dots + a_1 x + a_0}{b_M x^M + \dots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \left(\frac{a_N}{b_M}\right)(+\infty), & \text{αν } N > M, \\ \frac{a_N}{b_M}, & \text{αν } N = M, \\ 0, & \text{αν } N < M, \end{cases}$$

και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_N x^N + \dots + a_1 x + a_0}{b_M x^M + \dots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \left(\frac{a_N}{b_M}\right)(+\infty), & \text{αν } N > M \text{ και } N - M \text{ είναι άρτιο,} \\ \left(\frac{a_N}{b_M}\right)(-\infty), & \text{αν } N > M \text{ και } N - M \text{ είναι περιττό,} \\ \frac{a_N}{b_M}, & N = M, \\ 0, & \text{αν } N < M. \end{cases}$$

Παρατηρήστε, και πάλι, ότι το $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_N x^N + \dots + a_1 x + a_0}{b_M x^M + \dots + b_1 x + b_0}$ εξαρτάται μόνο από τους μεγιστοβάθμιους όρους του αριθμητή και του παρονομαστή, δηλαδή

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_N x^N + \dots + a_1 x + a_0}{b_M x^M + \dots + b_1 x + b_0} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_N x^N}{b_M x^M}.$$

Παράδειγμα 4.94. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - x^2 + 2x + 4}{2x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

Παράδειγμα 4.95. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^5 + 3x^2 + 4}{2x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^5}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^3}{2} = \mp\infty.$

Παράδειγμα 4.96. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^3 + x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x^2} = 0.$

Παράδειγμα 4.97. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^3 - x + 5}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^3}{2x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2}{2} = -\infty.$

Όταν το x τείνει σε αριθμό, τότε έχουμε τις εξής περιπτώσεις.

Αν $b_M \xi^M + \dots + b_1 \xi + b_0 \neq 0$, δηλαδή αν το ξ δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου $b_M x^M + \dots + b_1 x + b_0$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{a_N x^N + \dots + a_1 x + a_0}{b_M x^M + \dots + b_1 x + b_0} = \frac{a_N \xi^N + \dots + a_1 \xi + a_0}{b_M \xi^M + \dots + b_1 \xi + b_0}.$$

Παράδειγμα 4.98. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 2}{x^4 + 2x^3 - 4} = \frac{3 \cdot 1 - 2}{1^4 + 2 \cdot 1^3 - 4} = -1.$

Πριν προχωρήσουμε θα ορίσουμε την έννοια της πολλαπλότητας ρίζας (ή και μη-ρίζας) πολυωνύμου. Αν $p(x)$ είναι πολυώνυμο και το ξ είναι ρίζα του, δηλαδή $p(\xi) = 0$, τότε το $x - \xi$ διαιρεί το $p(x)$. Αν $(x - \xi)^m$, $m \geq 1$, είναι η μέγιστη δύναμη του $x - \xi$ η οποία διαιρεί το $p(x)$, τότε μπορούμε να γράψουμε

$$p(x) = (x - \xi)^m q(x),$$

όπου $q(x)$ είναι κάποιο πολυώνυμο το οποίο δεν διαιρείται από το $x - \xi$, οπότε $q(\xi) \neq 0$. Ο φυσικός m είναι η λεγόμενη **πολλαπλότητα** του ξ ως ρίζα του $p(x)$. Αν το ξ δεν είναι ρίζα του $p(x)$, δηλαδή $p(\xi) \neq 0$, τότε το $x - \xi$ δεν διαιρεί το $p(x)$. Μπορούμε να πούμε ότι η μέγιστη δύναμη του $x - \xi$, η οποία διαιρεί το $p(x)$, είναι η $(x - \xi)^0 = 1$ και τότε, προφανώς, είναι

$$p(x) = (x - \xi)^0 q(x),$$

όπου $q(x)$ είναι το ίδιο το πολυώνυμο $p(x)$. Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι το $m = 0$ είναι η **πολλαπλότητα** του ξ ως ρίζα του $p(x)$.

Τώρα, έστω $b_M \xi^M + \dots + b_1 \xi + b_0 = 0$, δηλαδή το ξ είναι ρίζα του πολυωνύμου $b_M x^M + \dots + b_1 x + b_0$. Αν $m \geq 1$ είναι η πολλαπλότητα του ξ ως ρίζα του $b_M x^M + \dots + b_1 x + b_0$, τότε μπορούμε να γράψουμε

$$b_M x^M + \dots + b_1 x + b_0 = (x - \xi)^m q(x),$$

όπου $q(x)$ είναι κάποιο πολυώνυμο το οποίο δεν διαιρείται από το $x - \xi$, οπότε $q(\xi) \neq 0$.

Επίσης, είτε το $x - \xi$ διαιρεί το $a_N x^N + \dots + a_1 x + a_0$ είτε όχι, μπορούμε να θεωρήσουμε την πολλαπλότητα $n \geq 0$ του ξ ως ρίζα του $a_N x^N + \dots + a_1 x + a_0$ και να γράψουμε

$$a_N x^N + \dots + a_1 x + a_0 = (x - \xi)^n p(x),$$

όπου $p(x)$ είναι κάποιο πολυώνυμο το οποίο δεν διαιρείται από το $x - \xi$, οπότε $p(\xi) \neq 0$.

Συνολικά, λοιπόν, έχουμε ότι

$$\frac{a_N x^N + \dots + a_1 x + a_0}{b_M x^M + \dots + b_1 x + b_0} = (x - \xi)^{n-m} \frac{p(x)}{q(x)},$$

και, επειδή $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(\xi)}{q(\xi)} \neq 0$, συνεπάγεται

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{a_N x^N + \dots + a_1 x + a_0}{b_M x^M + \dots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} 0, & \text{αν } n > m, \\ \frac{p(\xi)}{q(\xi)}, & \text{αν } n = m, \\ \frac{p(\xi)}{q(\xi)} (+\infty), & \text{αν } m > n \text{ και } m - n \text{ είναι άρτιο,} \end{cases}$$

ενώ

$$\lim_{x \rightarrow \xi \pm} \frac{a_N x^N + \dots + a_1 x + a_0}{b_M x^M + \dots + b_1 x + b_0} = \frac{p(\xi)}{q(\xi)} (\pm\infty) \quad \text{αν } m > n \text{ και το } m - n \text{ είναι περιττό.}$$

Παράδειγμα 4.99. Για να υπολογίσουμε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^4 - 2x^2 + 1}$, παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι το 1 είναι ρίζα του πολυώνυμου $x^4 - 2x^2 + 1$, οπότε το πολυώνυμο αυτό διαιρείται από το $x - 1$. Παραγοντοποιούμε είτε με τον αλγόριθμο της Ευκλείδειας διαίρεσης είτε στην περίπτωση αυτή πιο απλά:

$$x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 = (x - 1)^2(x + 1)^2.$$

Κατόπιν, βλέπουμε ότι το 1 είναι ρίζα και του $x^3 - x^2 - x + 1$, οπότε το $x - 1$ διαιρεί και αυτό το πολυώνυμο. Όπως πριν, υπολογίζουμε:

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x - 1)x^2 - (x - 1) = (x - 1)(x^2 - 1) = (x - 1)^2(x + 1).$$

Άρα $\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^4 - 2x^2 + 1} = \frac{1}{x + 1}$ για κάθε $x \neq \pm 1$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^4 - 2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x + 1} = \frac{1}{2}.$$

Παράδειγμα 4.100. Για το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{x^3 - x^2 - x + 1}$, βλέπουμε ότι το 1 είναι ρίζα του $x^3 - x^2 - x + 1$ και, όπως στο παράδειγμα 4.99: $x^3 - x^2 - x + 1 = (x - 1)^2(x + 1)$. Το 1 είναι ρίζα και του $x^3 + 4x^2 + x - 6$ και παραγοντοποιούμε το $x - 1$ ως εξής:

$$\begin{aligned} x^3 + 4x^2 + x - 6 &= x^3 - x^2 + 5x^2 - 5x + 6x - 6 = (x - 1)x^2 + (x - 1)5x + (x - 1)6 \\ &= (x - 1)(x^2 + 5x + 6). \end{aligned}$$

Το $x - 1$ δεν διαιρεί το $x^2 + 5x + 6$, διότι το 1 δεν είναι ρίζα του. Άρα $\frac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{x^2 + 5x + 6}{(x - 1)(x + 1)}$ για κάθε $x \neq \pm 1$. Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{x^3 - x^2 - x + 1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{x^3 - x^2 - x + 1} = -\infty,$$

οπότε δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

Ασκήσεις

4.28. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 - x + 1}{-3x^4 + x^2} = -\frac{1}{3}$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - x^8}{1 + 2x^2} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x + x^5}{1 - x^2} = \mp\infty$.

4.29. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 1\pm} \frac{x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2}{x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1} = -\frac{1}{5}$, $\lim_{x \rightarrow 1\pm} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 10x^2 + 9x - 3} = \pm\infty$.

4.30. Έστω $f(x) \begin{cases} \leq \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}, & \text{αν } 0 \leq x < 1, \\ \geq \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}, & \text{αν } x > 1. \end{cases}$ Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 1\pm} f(x) = \pm\infty$.

4.31. Αν $\frac{x^3 + x^2 - 3x - 7}{2x^3 + 8x^2 + x + 3} \leq f(x) < \frac{x^5 + x^4 + 7}{2x^5 - 4x^4 - x^3 - 8x - 3}$ για $x > 5$, αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.

4.32. Υπολογίζοντας τα κατάλληλα όρια,

(i) αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{11}{8} < \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} < \frac{3}{2} + \frac{1}{10^4}$ κοντά στο 1.

(ii) αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{2x^7 - 14x^6 - x^5 + 3x^4 - 7x^2 - 1}{3x^4 + x^2 + 6} < -10^{13}$ κοντά στο $-\infty$.

(iii) αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^4 - 2x^2 + 1} < -10^9$ κοντά στο 1 από αριστερά του.

4.33. Με τα κατάλληλα όρια, βρείτε ποιες από τις συναρτήσεις $\frac{x^7 + 2x^5 + 5x^2}{-x^6 + 5x^5 + x^4}$, $\frac{3x^5 + x^4 - 5x^3 + x^2}{8x^7 - x^5 - x^4 + 7x^3}$, $\frac{x^7 + x^5 + x^3}{-x^7 - 4x^5 + x^3}$ είναι άνω φραγμένες ή κάτω φραγμένες ή φραγμένες κοντά στο 0 ή κοντά στο 0 από δεξιά του ή από αριστερά του, καθώς και κοντά στο $+\infty$ και κοντά στο $-\infty$.

4.9 Όρια δυνάμεων

Το πεδίο ορισμού της x^a , όπου a είναι οποιοσδήποτε αριθμός, περιέχει, σε κάθε περίπτωση, τουλάχιστον το διάστημα $(0, +\infty)$. Το πρώτο όριο το οποίο θα αποδείξουμε είναι το

$$\lim_{x \rightarrow \xi} x^a = \xi^a \quad \text{αν } \xi > 0.$$

Κατ' αρχάς, έστω $a > 0$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ και θα βρούμε $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|x^a - \xi^a| < \epsilon$ για κάθε $x > 0$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$.

Τώρα, η $|x^a - \xi^a| < \epsilon$ συνεπάγεται από την $\xi^a - \epsilon < x^a < \xi^a + \epsilon$.

Στην περίπτωση $0 < \epsilon < \xi^a$ είναι $\xi^a - \epsilon > 0$. Οπότε η $\xi^a - \epsilon < x^a < \xi^a + \epsilon$ συνεπάγεται από την $(\xi^a - \epsilon)^{\frac{1}{a}} < x < (\xi^a + \epsilon)^{\frac{1}{a}}$. Παρατηρούμε ότι το ξ βρίσκεται ανάμεσα στους αριθμούς $(\xi^a - \epsilon)^{\frac{1}{a}}$ και $(\xi^a + \epsilon)^{\frac{1}{a}}$ και επιλέγουμε

$$\delta = \min \{ \xi - (\xi^a - \epsilon)^{\frac{1}{a}}, (\xi^a + \epsilon)^{\frac{1}{a}} - \xi \},$$

δηλαδή τη μικρότερη από τις αποστάσεις του ξ από τους αριθμούς $(\xi^a - \epsilon)^{\frac{1}{a}}$ και $(\xi^a + \epsilon)^{\frac{1}{a}}$. Τότε για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$ ισχύει $(\xi^a - \epsilon)^{\frac{1}{a}} < x < (\xi^a + \epsilon)^{\frac{1}{a}}$, οπότε ισχύει $|x^a - \xi^a| < \epsilon$.

Στην περίπτωση $\epsilon \geq \xi^a$ είναι $\xi^a - \epsilon \leq 0$. Οπότε η $\xi^a - \epsilon < x^a < \xi^a + \epsilon$ συνεπάγεται από την $0 < x^a < \xi^a + \epsilon$ και αυτή συνεπάγεται από την $0 < x < (\xi^a + \epsilon)^{\frac{1}{a}}$. Επειδή $0 < \xi < (\xi^a + \epsilon)^{\frac{1}{a}}$, επιλέγουμε

$$\delta = \min \{ \xi - 0, (\xi^a + \epsilon)^{\frac{1}{a}} - \xi \},$$

δηλαδή τη μικρότερη από τις αποστάσεις του ξ από τους αριθμούς 0 και $(\xi^a + \epsilon)^{\frac{1}{a}}$. Τότε για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$ ισχύει $0 < x < (\xi^a + \epsilon)^{\frac{1}{a}}$, οπότε ισχύει $|x^a - \xi^a| < \epsilon$.

Άρα, σε κάθε περίπτωση, μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|x^a - \xi^a| < \epsilon$ για κάθε $x > 0$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Άρα $\lim_{x \rightarrow \xi} x^a = \xi^a$.

Αν $a < 0$, τότε χρησιμοποιούμε το προηγούμενο αποτέλεσμα με το $-a > 0$ και παίρνουμε $\lim_{x \rightarrow \xi} x^a = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{1}{x^{-a}} = \frac{1}{\xi^{-a}} = \xi^a$.

Τέλος, αν $a = 0$, τότε έχουμε απλώς $\lim_{x \rightarrow \xi} x^0 = \lim_{x \rightarrow \xi} 1 = 1 = \xi^0$.

Τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a = \begin{cases} 0, & \text{αν } a > 0, \\ 1, & \text{αν } a = 0, \\ +\infty, & \text{αν } a < 0, \end{cases}$$

καθώς και τα

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a > 0, \\ 1, & \text{αν } a = 0, \\ 0, & \text{αν } a < 0 \end{cases}$$

έχουν ήδη αποδειχθεί ως παραδείγματα.

Αν θέλουμε να μελετήσουμε το όριο $\lim_{x \rightarrow \xi} x^a$ με $\xi < 0$ καθώς και τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^a$ και $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^a$, θα πρέπει το πεδίο ορισμού της x^a να περιέχει και το διάστημα $(-\infty, 0)$, δηλαδή το a να είναι ακέραιος. Αλλά αυτή η περίπτωση μελετήθηκε στην ενότητα 4.8.

Παράδειγμα 4.101. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt{y} = +\infty$.

Παράδειγμα 4.102. Το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = 0$ εμπίπτει στην κατηγορία των απροσδιόριστων μορφών $(+\infty) - (+\infty)$. Όμως,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1) - x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{(+\infty) + (+\infty)} = 0.$$

Παράδειγμα 4.103. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x+1}{x^2+1} \right)^{\frac{1}{5}} = \lim_{y \rightarrow \frac{2}{5}} y^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{2}{5} \right)^{\frac{1}{5}}.$

Παράδειγμα 4.104. $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[4]{(x^2 - 2x + 1)(x^3 + x)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \sqrt[4]{y} = 0.$

Παράδειγμα 4.105. $\lim_{x \rightarrow 4^-} \left(\frac{x+1}{4-x} \right)^{\frac{1}{3}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} y^{\frac{1}{3}} = +\infty.$

Παράδειγμα 4.106. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+\frac{1}{x}} + \sqrt[3]{x+\frac{1}{x}}}{x+\frac{1}{x} - \sqrt{x+\frac{1}{x}}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{y} + \sqrt[3]{y}}{y - \sqrt{y}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^3 + t^2}{t^6 - t^3} = 0.$

Ασκήσεις

4.34. Δείτε αν έχουν νόημα τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{\frac{6}{4}}, \lim_{x \rightarrow -1} x^{-\sqrt{2}}, \lim_{x \rightarrow 0^-} x^{-\frac{1}{2}}, \lim_{x \rightarrow 0^-} x^{3+\sqrt{3}}.$

4.35. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} (x^{\sqrt{2}} - 5x^{-\sqrt{2}}) = -4, \lim_{x \rightarrow 64} (2x^{\frac{4}{3}} + x^{-\frac{1}{6}}) = \frac{1025}{2}, \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) = -\infty.$

4.36. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{7}{8}+2x^{\frac{6}{5}}-4}}{x^{\frac{6}{5}-2x^{\frac{9}{8}}+2}} = 2, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}-2x^{\frac{6}{5}}+1}}{x+4x^{\frac{4}{3}}+2} = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{7}{4}-x^{\frac{1}{3}}}}{x^2+3x^{\frac{15}{8}}} = 0.$

4.37. Έστω $a \neq 0$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x^a-1)^2} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{3a}-1}{x^a-1} = 3, \lim_{x \rightarrow 1 \pm} \frac{1}{x^a-1} = \begin{cases} \pm\infty, & \text{αν } a > 0, \\ \mp\infty, & \text{αν } a < 0. \end{cases}$

4.38. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1}-x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) = \frac{1}{2}, \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}) = 0,$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-2\sqrt{x}+\sqrt{x-1}) = -\frac{1}{4}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}) = \frac{1}{3}.$

4.39. Με κατάλληλες αλλαγές μεταβλητής αποδείξτε τα $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3x^2-7x+1}{x^2+1} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{3}} = 1,$
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(1 - \frac{1}{x-1} \right)^{\frac{2}{3}} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{5}} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 3\sqrt[7]{\frac{x+1}{x-1}} + 1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 7\sqrt[5]{\frac{x+1}{x-1}} + 3} = \frac{1}{2}.$

4.40. Έστω a, b, c με $a > 0$. Βρείτε k, l ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{ax^2+bx+c} - kx - l) = 0.$

Με τα k, l τα οποία βρήκατε, αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{ax^2+bx+c} - kx - l) = \frac{4ac-b^2}{8a\sqrt{a}}.$

4.41. Έστω ακολουθία (x_n) και $a > 0$. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.10, αποδείξτε ότι:

(i) αν $x_n \rightarrow +\infty$ και $x_n \geq 0$ για κάθε n , τότε $x_n^a \rightarrow +\infty$.

(iii) αν $x_n \rightarrow 0$ και $x_n > 0$ για κάθε n , τότε $x_n^a \rightarrow 0$.

Τι γίνεται αν $a < 0$;

Αποδείξτε ότι $\left(\frac{n^3+n}{2n^2-1} \right)^{\sqrt{2}} \rightarrow +\infty, \left(\frac{2^n n + n^4}{5^n - n^3 + 2} \right)^{\frac{3}{4}} \rightarrow 0, \left(\frac{4^n - n^2}{3^n - 2^n + 1} \right)^{\frac{1}{5}} \rightarrow +\infty.$

4.10 Όρια εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων

Θα μελετήσουμε τώρα τα όρια της εκθετικής συνάρτησης a^x , όπου $a > 0$. Το πεδίο ορισμού της a^x είναι το $(-\infty, +\infty)$. Κατ' αρχάς, θα δούμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow \xi} a^x = a^{\xi}.$$

Έστω $a > 1$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ και θα βρούμε $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|a^x - a^{\xi}| < \epsilon$ για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Τώρα, η $|a^x - a^{\xi}| < \epsilon$ συνεπάγεται από την $a^{\xi} - \epsilon < a^x < a^{\xi} + \epsilon$.

Αν $0 < \epsilon < a^\xi$, τότε $a^\xi - \epsilon > 0$, οπότε η τελευταία ανισότητα συνεπάγεται από την $\log_a(a^\xi - \epsilon) < x < \log_a(a^\xi + \epsilon)$. Επειδή το ξ βρίσκεται ανάμεσα στα $\log_a(a^\xi - \epsilon)$ και $\log_a(a^\xi + \epsilon)$, επιλέγουμε

$$\delta = \min \{ \xi - \log_a(a^\xi - \epsilon), \log_a(a^\xi + \epsilon) - \xi \},$$

δηλαδή τη μικρότερη από τις αποστάσεις του ξ από τους αριθμούς $\log_a(a^\xi - \epsilon)$ και $\log_a(a^\xi + \epsilon)$. Τότε για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$ ισχύει $\log_a(a^\xi - \epsilon) < x < \log_a(a^\xi + \epsilon)$, οπότε ισχύει $|a^x - a^\xi| < \epsilon$.

Αν $\epsilon \geq a^\xi$, τότε $a^\xi - \epsilon < 0$, οπότε η $a^\xi - \epsilon < a^x < a^\xi + \epsilon$ συνεπάγεται από την $a^x < a^\xi + \epsilon$ και αυτή συνεπάγεται από την $x < \log_a(a^\xi + \epsilon)$. Επειδή $\xi < \log_a(a^\xi + \epsilon)$, επιλέγουμε

$$\delta = \log_a(a^\xi + \epsilon) - \xi,$$

δηλαδή την απόσταση του ξ από το $\log_a(a^\xi + \epsilon)$. Τότε για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$ ισχύει $x < \log_a(a^\xi + \epsilon)$, οπότε ισχύει $|a^x - a^\xi| < \epsilon$. Άρα $\lim_{x \rightarrow \xi} a^x = a^\xi$.

Αν $0 < a < 1$, οπότε $\frac{1}{a} > 1$, τότε από το προηγούμενο όριο: $\lim_{x \rightarrow \xi} a^x = \lim_{x \rightarrow \xi} \left(\frac{1}{a} \right)^x = \left(\frac{1}{a} \right)^\xi = a^\xi$.

Τέλος, αν $a = 1$, τότε έχουμε $\lim_{x \rightarrow \xi} 1^x = \lim_{x \rightarrow \xi} 1 = 1 = 1^\xi$.

Το επόμενο όριο είναι το

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a > 1, \\ 1, & \text{αν } a = 1, \\ 0, & \text{αν } 0 < a < 1. \end{cases}$$

Έστω $a > 1$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $M > 0$ και θα βρούμε $N > 0$ ώστε να ισχύει $a^x > M$ για κάθε $x > N$. Η $a^x > M$ συνεπάγεται από την $x > \log_a M$. Επιλέγουμε $N = \log_a M > 0$, αν $M > 1$, και $N = 1$, αν $0 < M \leq 1$. Τότε για κάθε $x > N$ ισχύει $x > \log_a M$, οπότε ισχύει $a^x > M$. Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$.

Αν $0 < a < 1$, οπότε $\frac{1}{a} > 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{a} \right)^x = \frac{1}{+\infty} = 0$.

Αν $a = 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$.

Τέλος:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{αν } a > 1, \\ 1, & \text{αν } a = 1, \\ +\infty, & \text{αν } 0 < a < 1. \end{cases}$$

Τα όρια αυτά μπορούν να αποδειχτούν, βάσει των ορισμών, όπως και τα αμέσως προηγούμενα όρια. Προτιμάμε, όμως, να τα αποδείξουμε χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα όρια και την αλλαγή μεταβλητής $y = -x$. Πράγματι, αν $a > 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{y \rightarrow +\infty} a^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^y} = \frac{1}{+\infty} = 0$.

Η απόδειξη είναι το ίδιο απλή, αν $a = 1$ ή $0 < a < 1$.

Για τα όρια της λογαριθμικής συνάρτησης έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα.

Θεωρούμε, για οποιοδήποτε $a > 0$, $a \neq 1$, την $\log_a x$ με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$. Το πρώτο όριο είναι το:

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \log_a x = \log_a \xi \quad \text{αν } \xi > 0.$$

Έστω $a > 1$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ και πρέπει να βρούμε $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|\log_a x - \log_a \xi| < \epsilon$ για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Η $|\log_a x - \log_a \xi| < \epsilon$ συνεπάγεται από την $\log_a \xi - \epsilon < \log_a x < \log_a \xi + \epsilon$ και αυτή από την $\xi a^{-\epsilon} < x < \xi a^\epsilon$. Το ξ βρίσκεται ανάμεσα στα $\xi a^{-\epsilon}$ και ξa^ϵ και επιλέγουμε

$$\delta = \min \{ \xi - \xi a^{-\epsilon}, \xi a^\epsilon - \xi \}.$$

Τότε για κάθε $x > 0$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$ ισχύει $\xi a^{-\epsilon} < x < \xi a^{\epsilon}$, οπότε ισχύει $|\log_a x - \log_a \xi| < \epsilon$. Άρα $\lim_{x \rightarrow \xi} \log_a x = \log_a \xi$.

Αν $0 < a < 1$, τότε $\frac{1}{a} > 1$, οπότε $\lim_{x \rightarrow \xi} \log_a x = \lim_{x \rightarrow \xi} (-\log_{\frac{1}{a}} x) = -\log_{\frac{1}{a}} \xi = \log_a \xi$.

Για το όριο όταν $x \rightarrow +\infty$ ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a > 1, \\ -\infty, & \text{αν } 0 < a < 1. \end{cases}$$

Έστω $a > 1$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $M > 0$ και πρέπει να βρούμε $N > 0$ ώστε να ισχύει $\log_a x > M$ για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $x > N$. Η $\log_a x > M$ συνεπάγεται από την $x > a^M$. Επιλέγουμε $N = a^M > 0$ και τότε για κάθε $x > N$ ισχύει $x > a^M$, οπότε ισχύει $\log_a x > M$. Επομένως, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$.

Αν $0 < a < 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\log_{\frac{1}{a}} x) = -(+\infty) = -\infty$.

Τέλος:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & \text{αν } a > 1, \\ +\infty, & \text{αν } 0 < a < 1. \end{cases}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τα αμέσως προηγούμενα όρια και την αλλαγή μεταβλητής $y = \frac{1}{x}$. Αν $a > 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow 0+} \log_a x = \lim_{y \rightarrow +\infty} \log_a \frac{1}{y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} (-\log_a y) = -\infty$.

Η απόδειξη είναι παρόμοια, αν $0 < a < 1$.

Αξίζει να γράψουμε ξεχωριστά τα όρια αυτής της ενότητας στην περίπτωση $a = e$, δηλαδή για τη συνήθη εκθετική και τη συνήθη λογαριθμική συνάρτηση:

$$\lim_{x \rightarrow \xi} e^x = e^{\xi}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

και

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \log x = \log \xi \text{ αν } \xi > 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \log x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty.$$

Ασκήσεις

4.42. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - e^{2x} + 2) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - e^{2x} + 2) = 2$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{2x} + e^x + 1}{2e^{2x} - e^x + 2} = \frac{1}{2}$.

4.43. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log^2 x - \log x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0+} (\log^2 x - \log x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \log^2 x}{1 + \log^3 x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1 + \log^2 x}{1 + \log^3 x} = 0$.

4.44. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 0\pm} \frac{1}{e^x - 1} = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} = 2$, $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log(2x)}{\log(3x)} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1\pm} \left(\frac{1}{\log^3 x} + \frac{1}{\log^2 x} \right) = \pm\infty$.

4.45. Με αλλαγές μεταβλητής αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\log^7 |x| - \log^4 |x| + 1}{\log^5 |x| + \log^2 |x| + 1} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \log \frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^x + 1} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0+} \log \frac{1 - \log x}{1 + \log^2 x} = -\infty$.

4.46. Υπολογίζοντας τα κατάλληλα όρια, δείτε αν οι συναρτήσεις e^x , $e^{-|x|}$, $\frac{1}{e^x - 1}$, $\frac{1}{(e^x - 1)^2}$, $\log |x|$, $\frac{1}{\log |x|}$, $\frac{1}{\log |1+x|}$ είναι φραγμένες ή άνω φραγμένες ή κάτω φραγμένες κοντά στο 0 ή κοντά στο 0 από αριστερά του ή από δεξιά του ή κοντά στα $\pm\infty$.

4.47. Έστω ακολουθία (x_n) και $a > 1$. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.10, αποδείξτε ότι:

(i) αν $x_n \rightarrow +\infty$, τότε $a^{x_n} \rightarrow +\infty$.

(iii) αν $x_n \rightarrow -\infty$, τότε $a^{x_n} \rightarrow 0$.

Τι γίνεται αν $0 < a < 1$;

Αποδείξτε ότι $e^{-\frac{n^3 + 3n - 1}{n^2 + 1}} \rightarrow +\infty$, $2^{2^n} \rightarrow +\infty$, $2^{\frac{1 - \sqrt{n} - n}{1 + \sqrt{n}}} \rightarrow 0$, $e^{\frac{n!}{3^n}} \rightarrow +\infty$.

4.48. Έστω ακολουθία (x_n) και $a > 1$. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.10, αποδείξτε ότι:

(i) αν $x_n \rightarrow +\infty$ και $x_n > 0$ για κάθε n , τότε $\log_a x_n \rightarrow +\infty$.

(iii) αν $x_n \rightarrow 0$ και $x_n > 0$ για κάθε n , τότε $\log_a x_n \rightarrow -\infty$.

Τι γίνεται αν $0 < a < 1$;

Αποδείξτε ότι $\log \frac{n^2 e^n + 1}{e^{2n} + 1} \rightarrow -\infty$, $\frac{\log^2 \frac{n}{n^2+1} - \log \frac{n}{n^2+1} + 2}{-\log^2 \frac{n}{n^2+1} + 4 \log \frac{n}{n^2+1} - 8} \rightarrow -1$.

4.11 Όρια τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Ακολουθεί μία πολύ χρήσιμη ανισότητα για τη συνάρτηση $\sin x$.

Πρόταση 4.11. Για κάθε x ισχύει

$$|\sin x| \leq |x|.$$

Η ισότητα $|\sin x| = |x|$ ισχύει μόνο για $x = 0$.

Απόδειξη. Έστω $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ και M το σημείο του τριγωνομετρικού κύκλου το οποίο αντιστοιχεί στο x . Δείτε πάλι το σχήμα 1.4 στην υποενότητα 1.11. Φέρνουμε την κάθετη ME στην οριζόντια διάμετρο $A'O A$, οπότε το τόξο AM έχει μήκος x και το ευθύγραμμο τμήμα ME έχει μήκος $\sin x$. Θεωρούμε και το συμμετρικό M' του M ως προς την οριζόντια διάμετρο, οπότε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $M'M$ είναι $2 \sin x$ και το τόξο $M'M$ έχει μήκος $2x$. Άρα $0 < 2 \sin x < 2x$, οπότε $0 < \sin x < x$, οπότε $|\sin x| < |x|$.

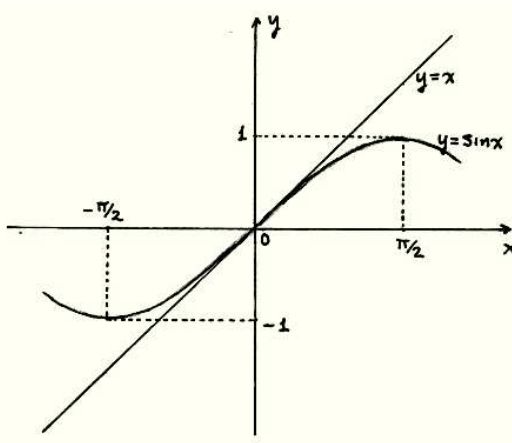
Αν $\frac{\pi}{2} < x$, τότε $|\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} < x = |x|$.

Συνδυάζοντας τα προηγούμενα, έχουμε ότι ισχύει $|\sin x| < |x|$ για κάθε $x > 0$.

Αν $x < 0$, τότε $-x > 0$, οπότε ισχύει $|\sin(-x)| < |-x|$, οπότε $|\sin x| < |x|$.

Άρα ισχύει $|\sin x| < |x|$ για κάθε $x \neq 0$. Προφανώς, για $x = 0$ έχουμε $|\sin 0| = |0|$. $\square$

Παρατηρήστε το σχήμα 4.7. Οι ανισότητες που αποδείξαμε λένε ότι το μέρος του γραφήματος της $y = \sin x$ που αντιστοιχεί στο $(0, +\infty)$ βρίσκεται κάτω από την ευθεία με εξίσωση $y = x$, ενώ το μέρος του γραφήματος της $y = \sin x$ που αντιστοιχεί στο $(-\infty, 0)$ βρίσκεται πάνω από την ευθεία με εξίσωση $y = x$.



Σχήμα 4.7

Τώρα, από την ισότητα

$$\cos x - \cos \xi = -2 \sin \frac{x-\xi}{2} \sin \frac{x+\xi}{2}$$

της Πρότασης 1.6 και από την ανισότητα της Πρότασης 4.11 συνεπάγεται

$$|\cos x - \cos \xi| = 2 \left| \sin \frac{x-\xi}{2} \right| \left| \sin \frac{x+\xi}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x-\xi}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x-\xi}{2} \right| = |x - \xi|.$$

Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ και επιλέγουμε $\delta = \epsilon$. Είναι προφανές ότι για κάθε x το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$ συνεπάγεται $|\cos x - \cos \xi| \leq |x - \xi| < \delta = \epsilon$. Άρα

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \cos x = \cos \xi.$$

Με τον ίδιο τρόπο, από την

$$\sin x - \sin \xi = 2 \sin \frac{x-\xi}{2} \cos \frac{x+\xi}{2},$$

αποδεικνύεται η $|\sin x - \sin \xi| \leq |x - \xi|$, οπότε, όπως πριν,

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \sin x = \sin \xi.$$

Από τα δύο αυτά όρια και από τον κανόνα του λόγου ορίων βλέπουμε ότι, αν $\cos \xi \neq 0$, δηλαδή αν $\xi \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \tan x = \tan \xi \quad \text{αν } \xi \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Επίσης, αν $\sin \xi \neq 0$, δηλαδή αν $\xi \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \cot x = \cot \xi \quad \text{αν } \xi \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ας δούμε τι ισχύει για τα ξ τα οποία εξαιρέθηκαν.

Αν $\xi = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \sin x = \sin \xi = 1.$$

Επίσης, $\lim_{x \rightarrow \xi} \cos x = \cos \xi = 0$ και, συγχρόνως, $\cos x > 0$ κοντά στο ξ από αριστερά του και $\cos x < 0$ κοντά στο ξ από δεξιά του. Συνεπάγεται

$$\lim_{x \rightarrow \xi^-} \frac{1}{\cos x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \xi^+} \frac{1}{\cos x} = -\infty.$$

Και τα τρία όρια τα οποία υπολογίσαμε αλλάζουν πρόσημο, αν $\xi = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$, οπότε από τον κανόνα γινομένου:

$$\lim_{x \rightarrow \xi^-} \tan x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \xi^+} \tan x = -\infty \quad \text{αν } \xi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι

$$\lim_{x \rightarrow \xi^-} \cot x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \xi^+} \cot x = +\infty \quad \text{αν } \xi = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Αυτά τα όρια συμφωνούν με την περιγραφή των γραφημάτων των $\tan x$ και $\cot x$ την οποία έχουμε κάνει στην ενότητα 2.8 και, ειδικότερα, με το ότι οι ευθείες με εξισώσεις $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες του γραφήματος της $\tan x$ και οι ευθείες με εξισώσεις $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες του γραφήματος της $\cot x$.

Παράδειγμα 4.107. Θα δούμε ότι δεν υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cos x$ και $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin x$.

Αν εμπιστευτούμε τα γραφήματα των συναρτήσεων αυτών, όπως τα έχουμε σχεδιάσει στην ενότητα 2.8, παρατηρούμε ότι, όταν $x \rightarrow \pm\infty$, τότε τα αντίστοιχα $\cos x$ και $\sin x$ «ταλαντώνονται» περιοδικά, καλύπτοντας όλο το εύρος τιμών ανάμεσα στις τιμές -1 και 1 χωρίς, επομένως, να προσεγγίζουν κάποιον συγκεκριμένο αριθμό.

Ένας αυστηρότερος τρόπος να αποδείξουμε το ίδιο αποτέλεσμα είναι να πάρουμε την ακολουθία (πn) η οποία αποκλίνει στο $+\infty$ και όλοι οι όροι της περιέχονται στο πεδίο ορισμού της $\cos x$, και να παρατηρήσουμε ότι η αντίστοιχη ακολουθία $(\cos(\pi n)) = ((-1)^n)$ δεν έχει όριο. Σύμφωνα με την Πρόταση 4.10, αυτό αποδεικνύει ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$. Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο με την ακολουθία $(\frac{\pi}{2} + \pi n)$, αποδεικνύουμε ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$. Με τις αντίθετες ακολουθίες αποδεικνύουμε ότι δεν υπάρχουν τα όρια όταν $x \rightarrow -\infty$.

Αξίζει να αποδείξουμε ακόμα δύο πολύ χρήσιμα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Και τα δύο αυτά όρια εντάσσονται στην κατηγορία των απροσδιόριστων μορφών $\frac{0}{0}$.

Πρόταση 4.12. Για κάθε x στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ισχύει

$$|x| \leq |\tan x|.$$

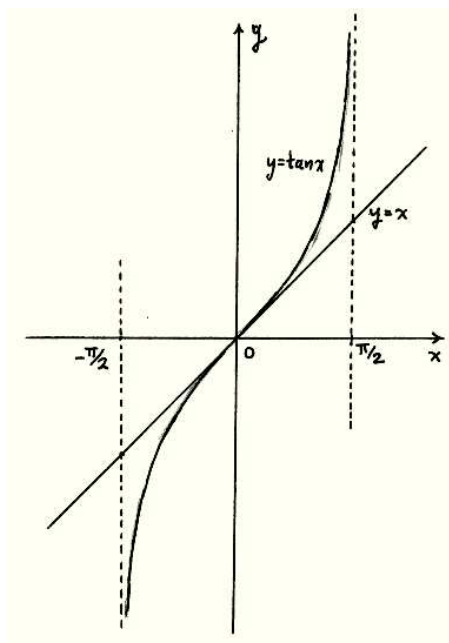
Η ισότητα $|x| = |\tan x|$ ισχύει μόνο για $x = 0$ στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Απόδειξη. Αν $0 < x < \frac{\pi}{2}$, τότε παίρνουμε στον τριγωνομετρικό κύκλο το σημείο M το οποίο αντιστοιχεί στο x και προεκτείνουμε την OM μέχρι να συναντήσει στο σημείο Δ την ευθεία η οποία είναι κάθετη στην οριζόντια διάμετρο $A'O A$ στο σημείο A . Τότε το μήκος του τόξου AM είναι x και το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $A\Delta$ είναι $\tan x$. Το εμβαδόν του τριγώνου $O A \Delta$ είναι ίσο με $\frac{\tan x}{2}$. Επίσης, το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $O A M$ είναι ίσο με $\frac{x}{2}$, διότι το εμβαδόν του κύκλου είναι ίσο με π , οπότε το εμβαδόν του τομέα είναι, αναλογικά, ίσο με $\frac{x}{2\pi} \pi$. Συγκρίνοντας τα εμβαδά, βλέπουμε ότι $0 < x < \tan x$, οπότε $|x| < |\tan x|$.

Αν $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, τότε $0 < -x < \frac{\pi}{2}$, οπότε $|-x| < |\tan(-x)|$, οπότε $|x| < |\tan x|$.

Άρα ισχύει $|x| < |\tan x|$ για κάθε $x \neq 0$ στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Προφανώς, για $x = 0$ έχουμε $|0| = |\tan 0|$. $\square$

Παρατηρήστε το σχήμα 4.8. Οι ανισότητες που αποδείξαμε λένε ότι το μέρος του γραφήματος της $y = \tan x$ που αντιστοιχεί στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$ βρίσκεται πάνω από την ευθεία με εξίσωση $y = x$, ενώ το μέρος του γραφήματος της $y = \tan x$ που αντιστοιχεί στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ βρίσκεται κάτω από την ευθεία με εξίσωση $y = x$.



Σχήμα 4.8

Συνδυάζοντας τις ανισότητες $|\sin x| \leq |x|$ και $|x| \leq |\tan x|$, εύκολα βλέπουμε ότι ισχύει $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$ για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$, από τον κανόνα παρεμβολής

συνεπάγεται $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Για το δεύτερο όριο γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{1}{1 + \cos x} = 1^2 \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

Ένας δεύτερος τρόπος να αποδείξουμε το δεύτερο όριο είναι ο εξής:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\sin y}{y} \right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Παράδειγμα 4.108.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$$

Παράδειγμα 4.109. Για να υπολογίσουμε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$, βλέπουμε ότι $\frac{\sin(3x)}{\sin(2x)} = \frac{3}{2} \frac{\frac{\sin(3x)}{3x}}{\frac{\sin(2x)}{2x}}$.

Τώρα,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)} = \frac{3}{2}.$$

Ασκήσεις

4.49. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \tan x}{x^2 + x^3} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^3 + \sin^2 x} = \frac{1}{2}$.

4.50. Με αλλαγές μεταβλητής αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(3x)}{x} = 3$, $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(3x)}{\sin x} = 3$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(13x)}{\sin^2(7x)} = \frac{169}{98}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(8x) - \cos(15x)}{x^2} = \frac{161}{2}$, $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} = -1$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = -1$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 (1 - \cos \frac{1}{x}) = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin(7x) - 7 \sin(3x)}{x^3} = -140$.

4.51. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 0+} x^a \sin x = \begin{cases} 0, & \text{αν } a > -1, \\ 1, & \text{αν } a = -1, \\ +\infty, & \text{αν } a < -1. \end{cases}$

4.52. Αν $a > 0$, αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 0+} x^a \sin \frac{1}{x} = 0$.

4.53. Γνωρίζοντας ότι δεν υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin x$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cos x$, αποδείξτε με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής ότι δεν υπάρχουν ούτε τα $\lim_{x \rightarrow 0\pm} \sin \frac{1}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow 0\pm} \cos \frac{1}{x}$.

4.54. (i) Έστω ακολουθία (x_n) . Αν $x_n \rightarrow 0$ και ισχύει $x_n \neq 0$ για κάθε n , αποδείξτε χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.10 ότι $\frac{\sin x_n}{x_n} \rightarrow 1$ και $\frac{1 - \cos x_n}{x_n^2} \rightarrow \frac{1}{2}$.

(ii) Αποδείξτε ότι $\sin \frac{\pi}{n} \rightarrow \pi$, $n^2(1 - \cos \frac{\pi}{n}) \rightarrow \frac{\pi^2}{2}$, $\frac{1}{n} \cot \frac{\pi}{2n} \rightarrow \frac{2}{\pi}$.

4.55. Σχεδιάστε τα γραφήματα των $\frac{1}{x} \sin x$, $\frac{1}{x^2} \sin x$, $x \sin \frac{1}{x}$, $x^2 \sin \frac{1}{x}$, $\sqrt{x} \sin \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ προσέχοντας τα όριά τους στο 0 και στα $\pm\infty$. Ελέγξτε ξανά και την άσκηση 2.26.

4.56. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.10, αποδείξτε ότι δεν υπάρχει κανένα από τα $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin x$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \sin x$, $\lim_{x \rightarrow 0+} \sin \frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$. Για καθένα από αυτά τα όρια επινοήστε κατάλληλη ακολουθία (x_n) .

Τα δύο τελευταία όρια γενικεύονται: αν $a \leq 0$, αποδείξτε ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0+} x^a \sin \frac{1}{x}$.

Να αντιπαραβάλετε το αποτέλεσμα αυτό με το αποτέλεσμα της άσκησης 4.52.

4.57. Αν ισχύει $|a \sin x + b \sin(3x) + c \sin(8x)| \leq |\sin x|$ για κάθε x , αποδείξτε ότι $|a + 3b + 8c| \leq 1$.

4.12 Όρια μονότονων συναρτήσεων

Έστω ότι η $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι *αύξουσα* αριστερά του ξ , όπου το ξ είναι αριθμός ή $+\infty$, και έστω ότι το ξ είναι σημείο συσσώρευσης από τα αριστερά του πεδίου ορισμού A της f . Για παράδειγμα, θα μπορούσε το A να περιέχει ένα διάστημα της μορφής (a, ξ) .

Αν το $x \in A$ αυξάνεται και προσεγγίζει το ξ από τα αριστερά, προφανώς, του ξ , τότε και το αντίστοιχο $f(x)$ αυξάνεται και είναι σαφές ότι υπάρχουν δύο ενδεχόμενα.

Παρατηρήστε το αριστερό από τα δύο σχήματα 4.9. Το πρώτο ενδεχόμενο είναι να γίνεται το $f(x)$ μεγαλύτερο από κάθε θετικό αριθμό, δηλαδή να ισχύει

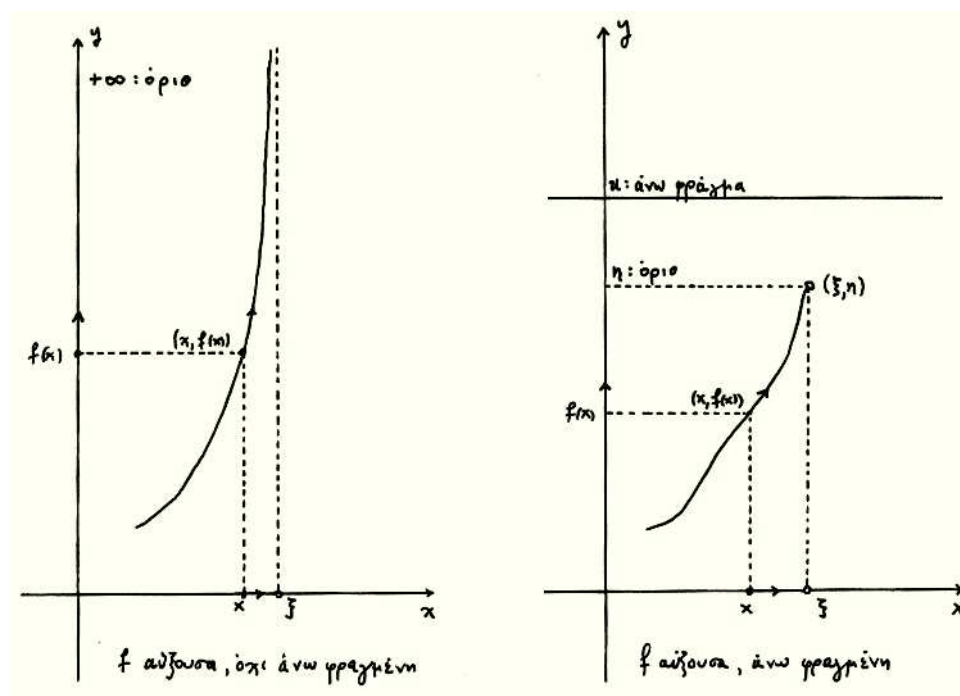
$$\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) = +\infty.$$

(Όταν $\xi = +\infty$, τότε με το $\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x)$ εννοούμε, προφανώς, το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.)

Τώρα παρατηρήστε το δεξιό από τα δύο σχήματα 4.9. Το δεύτερο ενδεχόμενο είναι να υπάρχει κάποιο άνω φράγμα για το $f(x)$, δηλαδή κάποιος αριθμός u ώστε να ισχύει $f(x) \leq u$ για κάθε $x \in A$ αριστερά του ξ . Σε αυτήν τη δεύτερη περίπτωση είναι φανερό ότι το $f(x)$ αυξανόμενο προσεγγίζει κάποιον αριθμό η , δηλαδή ότι

$$\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) = \eta.$$

Επομένως, σε κάθε περίπτωση, το $\eta = \lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός ή $+\infty$.



Σχήμα 4.9

Αλλά μπορούμε να βγάλουμε ένα ακόμη συμπέρασμα.

Αν πάρουμε οποιοδήποτε $x' \in A$, $x' < \xi$, τότε για κάθε $x \in A$ με $x' < x < \xi$ ισχύει $f(x') \leq f(x)$, οπότε $f(x') \leq \lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) = \eta$. Επομένως, για κάθε $x' \in A$, $x' < \xi$ ισχύει $f(x') \leq \eta$, οπότε το η είναι

άνω φράγμα της f στο μέρος του πεδίου ορισμού A το οποίο είναι αριστερά του ξ . Μάλιστα, αν u είναι οποιοδήποτε άνω φράγμα της f στο μέρος του A το οποίο είναι αριστερά του ξ , τότε ισχύει $f(x) \leq u$ για κάθε $x \in A$, $x < \xi$, οπότε $\eta = \lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) \leq u$. Δηλαδή, το η είναι το *ελάχιστο άνω φράγμα* της f στο μέρος του A το οποίο είναι αριστερά του ξ .

Με τη βοήθεια πρόχειρων γραφημάτων, εύκολα μπορούμε να σκεφτούμε ανάλογα συμπεράσματα για κάθε περίπτωση: (i) το ξ είναι σημείο συσσώρευσης από τα αριστερά του A , π.χ.

όταν το A περιέχει διάστημα (a, ξ) , η f είναι αύξουσα ή φθίνουσα αριστερά του ξ , αριστερό πλευρικό όριο στο ξ , (ii) το ξ είναι σημείο συσσώρευσης από τα δεξιά του του A , π.χ. όταν το A περιέχει διάστημα (ξ, b) , η f είναι αύξουσα ή φθίνουσα δεξιά του ξ , δεξιό πλευρικό όριο στο ξ .

Το ακόλουθο Θεώρημα 4.1 περιέχει όλα τα συμπεράσματα και είναι ιδιαίτερα σημαντικό: τόσο όσο και το αντίστοιχο Θεώρημα 3.1 για μονότονες ακολουθίες. Μας επιτρέπει να συμπεράνουμε την ύπαρξη πλευρικού ορίου συνάρτησης με μοναδικό δεδομένο τη μονοτονία της.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 4.1 βρίσκεται στην ενότητα 11.11 του κεφαλαίου 11.¹

Θεώρημα 4.1. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

(i) Έστω ότι το ξ (αριθμός ή $+\infty$) είναι σημείο συσσώρευσης από αριστερά του του A και ότι η f είναι αύξουσα (ή φθίνουσα) αριστερά του ξ . Τότε το $\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x)$ υπάρχει και είναι το ελάχιστο άνω φράγμα (μέγιστο κάτω φράγμα) της f στο μέρος του A το οποίο είναι αριστερά του ξ .

(α) Το $\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x)$ είναι $+\infty$ (ή $-\infty$), αν η f δεν είναι άνω (ή κάτω) φραγμένη στο μέρος του A το οποίο είναι αριστερά του ξ .

(β) Το $\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x)$ είναι αριθμός, αν η f είναι άνω (ή κάτω) φραγμένη στο μέρος του A το οποίο είναι αριστερά του ξ .

(ii) Έστω ότι το ξ (αριθμός ή $-\infty$) είναι σημείο συσσώρευσης από δεξιά του του A και ότι η f είναι αύξουσα (ή φθίνουσα) δεξιά του ξ . Τότε το $\lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x)$ υπάρχει και είναι το μέγιστο κάτω φράγμα (ελάχιστο άνω φράγμα) της f στο μέρος του A το οποίο είναι δεξιά του ξ .

(α) Το $\lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x)$ είναι $-\infty$ (ή $+\infty$), αν η f δεν είναι κάτω (ή άνω) φραγμένη στο μέρος του A το οποίο είναι δεξιά του ξ .

(β) Το $\lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x)$ είναι αριθμός, αν η f είναι κάτω (ή άνω) φραγμένη στο μέρος του A το οποίο είναι δεξιά του ξ .

Παράδειγμα 4.110. Με τη βοήθεια του Θεωρήματος 4.1 μπορούμε να μελετήσουμε με διαφορετικό τρόπο κάποια ήδη γνωστά όρια.

Για παράδειγμα, αν $a > 0$, θα αποδείξουμε τα $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a = 0$ με δεδομένο ότι η x^a είναι αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Η μονοτονία εξασφαλίζει την ύπαρξη των δύο ορίων καθώς και ότι το πρώτο όριο είναι είτε αριθμός είτε $+\infty$ και ότι το δεύτερο όριο είναι είτε αριθμός είτε $-\infty$.

Έστω, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι το πρώτο όριο είναι αριθμός η , δηλαδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = \eta$. Με μία απλή αλλαγή μεταβλητής, υπολογίζουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x)^a = \lim_{y \rightarrow +\infty} y^a = \eta$.

Επίσης, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x)^a = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^a x^a = 2^a \lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = 2^a \eta$.

Επομένως, $\eta = 2^a \eta$, οπότε $\eta = 0$. Αυτό είναι αδύνατον, διότι για κάθε $x \geq 1$ ισχύει $x^a \geq 1^a = 1$, οπότε $\eta = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^a \geq 1$. Άρα το πρώτο όριο είναι $+\infty$.

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι το δεύτερο όριο είναι 0. Πράγματι, επειδή ισχύει $x^a > 0$ για κάθε $x > 0$, συνεπώς $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \geq 0$, οπότε το δεύτερο όριο είναι αριθμός μη-αρνητικός:

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a = \eta \geq 0$. Με την ίδια αλλαγή μεταβλητής έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x)^a = \lim_{y \rightarrow 0^+} y^a = \eta$.

Επίσης, $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x)^a = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2^a x^a = 2^a \eta$.

Επομένως $\eta = 2^a \eta$, οπότε $\eta = 0$.

Ασκήσεις

4.58. Έστω $a > 1$. Από την ισότητα $\log_a(ax) = 1 + \log_a x$ και χρησιμοποιώντας τη μονοτονία της $\log_a x$, βρείτε με δεύτερο τρόπο τα γνωστά όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x$.

4.59. Έστω $a > 1$. Από την ισότητα $a^{x+1} = aa^x$ και χρησιμοποιώντας τη μονοτονία της a^x , βρείτε με δεύτερο τρόπο τα γνωστά όρια $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} a^x$.

¹ Δείτε και τις σημειώσεις «Ανάλυση» [1].

4.60. (i) Έστω ότι η f είναι αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$ και ότι ισχύει $f(\sqrt{n}) \geq \log n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Πρόταση 4.10.

(ii) Έστω ότι η f είναι φθίνουσα στο διάστημα $(0, 2)$ και ότι ισχύει $f(\frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$.

4.13 Βιβλιογραφία

Βασική βιβλιογραφία

Anton, H. (1984). *Calculus with Analytic Geometry*. Wiley.

Apostol, T. (1967). *Calculus, Vol I*. Wiley.

Courant, R. (1988). *Differential and Integral Calculus, Vol I*. Wiley.

Courant, R., John, F. (1989). *Introduction to Calculus and Analysis, Vol I*. Springer.

Hardy, G. (2008). *A Course of Pure Mathematics*. Cambridge Univ. Press.

Landau, E. (2001). *Differential and Integral Calculus*. American Math. Society & Chelsea.

Nikolsky, S. (1977). *A Course of Mathematical Analysis, Vol I*. Mir Publishers.

Smirnov, V. I. (1964). *A Course of Higher Mathematics, Vol I*. Pergammon Press.

Spiegel, M. (1963). *Schaum's Outline of Advanced Calculus*. McGraw Hill.

Spivak, M. (1994). *Calculus*. Cambridge Univ. Press.

Thomas, G. (2018). *Calculus*. Pearson.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

5.1 Σύνοψη

Σε αυτό το κεφάλαιο ορίζουμε και μελετάμε την έννοια της συνέχειας συνάρτησης, γνωστή εν μέρει από το Λύκειο, με αυστηρό τρόπο: με το ϵ και το δ . Συνδέουμε την έννοια της συνέχειας με την έννοια του ορίου. Κατόπιν μελετάμε τις βασικές ιδιότητες της συνέχειας σε σχέση με αλγεβρικές πράξεις και με ανισότητες καθώς και με τη σύνθεση συναρτήσεων. Μελετάμε διεξοδικά τα διάφορα είδη ασυνέχειας: άρσιμη, πρώτου είδους, δεύτερου είδους (ή ουσιώδη). Μελετάμε και τη σχέση ανάμεσα στη συνέχεια συνάρτησης και στο όριο ακολουθίας. Αναφέρουμε τα τρία βασικά θεωρήματα για συνεχείς συναρτήσεις: Φραγμένης Συνάρτησης, Μέγιστης / Ελάχιστης Τιμής, Ενδιάμεσης Τιμής. Αναφέρουμε και τα πορίσματα του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής: Θεώρημα Bolzano, ιδιότητα σταθερού προσήμου. Τέλος, μελετάμε το σύνολο τιμών συνεχούς συνάρτησης δίνοντας έμφαση σε πολωνυμικές συναρτήσεις και σε μονότονες συναρτήσεις.

Προαπαιτούμενη γνώση: Μαθηματικά του Λυκείου, καθώς και τα προηγούμενα κεφάλαια.

5.2 Συνέχεια συνάρτησης

Ορισμός 5.1. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $\xi \in A$. Λέμε ότι η f είναι **συνεχής** στο ξ (ή στο ξ από αριστερά του ή από δεξιά του), αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $|x - \xi| < \delta$ (ή την $\xi - \delta < x \leq \xi$ ή την $\xi \leq x < \xi + \delta$). Με σύμβολα:

$$x \in A \text{ και } |x - \xi| < \delta \text{ (ή } \xi - \delta < x \leq \xi \text{ ή } \xi \leq x < \xi + \delta) \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \epsilon.$$

Κατ' αρχάς, παρατηρούμε ότι δεν έχει νόημα η συνέχεια της f στο ξ , αν το ξ δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της: πρέπει να ορίζεται η τιμή $f(\xi)$.

Κατόπιν, παρατηρούμε ότι η διατύπωση του ορισμού της συνέχειας μοιάζει με τη διατύπωση του ορισμού του $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\xi)$. Ο ορισμός της συνέχειας λέει: για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $|x - \xi| < \delta$. Με σύμβολα:

$$x \in A \text{ και } |x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \epsilon.$$

Ο ορισμός του $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\xi)$ λέει: για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Με σύμβολα:

$$x \in A \text{ και } 0 < |x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \epsilon.$$

Η μόνη διαφορά είναι ανάμεσα στο $|x - \xi| < \delta$, στον ορισμό της συνέχειας, και στο $0 < |x - \xi| < \delta$, στον ορισμό του ορίου. Ας διερευνήσουμε αυτήν την ομοιότητα, διακρίνοντας δύο περιπτώσεις.

Παπαδημητράκης, Μ. (2024) «Απειροστικός Λογισμός».

Αθήνα: Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. <http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-1011>

 Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Μη Εμπορική Χρήση - Παρόμοια Διανομή 4.0

Η πρώτη περίπτωση είναι όταν το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού A , οπότε έχει νόημα να μιλήσουμε για το όριο $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$. Τώρα, έστω ότι η f είναι συνεχής στο ξ και ας πάρουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $|x - \xi| < \delta$. Οπότε, με το ίδιο $\delta > 0$, ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Αυτό σημαίνει ότι $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\xi)$. Αντιστρόφως, έστω ότι $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\xi)$ και ας πάρουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Όμως, αν $|x - \xi| = 0$, δηλαδή αν $x = \xi$, τότε, αυτομάτως, ισχύει $|f(x) - f(\xi)| = |f(\xi) - f(\xi)| = 0 < \epsilon$. Άρα, με το ίδιο $\delta > 0$, ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $|x - \xi| < \delta$. Αυτό σημαίνει ότι η f είναι συνεχής στο ξ . Βλέπουμε, λοιπόν, ότι η f είναι συνεχής στο ξ , αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\xi)$.

Η δεύτερη περίπτωση είναι όταν το ξ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A . Δηλαδή, όταν υπάρχει κάποιος $\delta_0 > 0$ ώστε να μην υπάρχει κανένα $x \in A$ στην ένωση $(\xi - \delta_0, \xi) \cup (\xi, \xi + \delta_0)$ ή, με άλλα λόγια, να μην υπάρχει κανένα $x \in A$ τέτοιο ώστε $0 < |x - \xi| < \delta_0$. Τότε το ξ χαρακτηρίζεται **μεμονωμένο σημείο** του A . Φυσικά, σε αυτήν περίπτωση το όριο $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ δεν έχει νόημα. Τώρα, παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ και παρατηρούμε ότι το μοναδικό $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $|x - \xi| < \delta_0$ είναι το ξ και ότι για το ξ ισχύει, προφανώς, $|f(\xi) - f(\xi)| = 0 < \epsilon$. Μπορούμε, λοιπόν, να πούμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει το $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $|x - \xi| < \delta_0$, οπότε η f είναι συνεχής στο ξ .

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι:

Αν έχει νόημα το $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$, δηλαδή αν το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A , τότε η f είναι συνεχής στο ξ , αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\xi)$. Αν δεν έχει νόημα το $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$, δηλαδή αν το ξ είναι μεμονωμένο σημείο του A , τότε η f είναι, αυτομάτως, συνεχής στο ξ .

Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι, αν το ξ είναι σημείο συσσώρευσης από αριστερά του του πεδίου ορισμού A , τότε η f είναι συνεχής στο ξ από αριστερά του, αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) = f(\xi)$, ενώ στην αντίθετη περίπτωση η f είναι, αυτομάτως, συνεχής στο ξ από αριστερά του. Ομοίως, αν το ξ είναι σημείο συσσώρευσης από δεξιά του του πεδίου ορισμού A , τότε η f είναι συνεχής στο ξ από δεξιά του, αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x) = f(\xi)$, ενώ στην αντίθετη περίπτωση η f είναι, αυτομάτως, συνεχής στο ξ από δεξιά του.

Τέλος, παρατηρούμε ότι η f είναι συνεχής στο ξ , αν και μόνο αν είναι συνεχής στο ξ από αριστερά του και από δεξιά του.

Πολλές φορές διατυπώνουμε πιο σύντομα τον ορισμό της συνέχειας της f στο ξ , ως εξής:

Το $|f(x) - f(\xi)|$ είναι μικρότερο από κάθε $\epsilon > 0$ όταν το x είναι αρκετά κοντά στο ξ .

Προσέξτε, πάλι, τη διαφορά με την ανάλογη διατύπωση του $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\xi)$: τώρα παραλείπουμε το «και είναι $\neq \xi$ ».

Παράδειγμα 5.1. Η x^2 είναι συνεχής στο 3, διότι $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9 = 3^2$.

Παράδειγμα 5.2. Η $\sqrt{x}$ είναι συνεχής στο 0, διότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0 = \sqrt{0}$.

Παράδειγμα 5.3. Η άσκηση 4.8 λέει ότι, αν $\xi \in \mathbb{Z}$, τότε $\lim_{x \rightarrow \xi^-} [x] \neq [\xi]$ και $\lim_{x \rightarrow \xi^+} [x] = [\xi]$. Δηλαδή, η συνάρτηση $[x]$ είναι συνεχής στο ξ από δεξιά του, αλλά όχι από αριστερά του. Επίσης, αν $\xi \notin \mathbb{Z}$, τότε $\lim_{x \rightarrow \xi} [x] = [\xi]$, οπότε η συνάρτηση $[x]$ είναι συνεχής στο ξ .

Παράδειγμα 5.4. Η $\sqrt{-x^2(x+1)}$ έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, -1] \cup \{0\}$. Το 0 είναι μεμονωμένο σημείο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης, οπότε αυτή είναι συνεχής στο 0.

Παράδειγμα 5.5. Η σταθερή συνάρτηση c είναι συνεχής σε κάθε ξ . Πράγματι, $\lim_{x \rightarrow \xi} c = c$, οπότε το όριο στο ξ είναι ίσο με την τιμή στο ξ .

Ορισμός 5.2. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής σε κάθε $\xi \in A$, τότε λέμε ότι η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της ή, απλώς, συνεχής.

Παράδειγμα 5.6. Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $p(x) = a_N x^N + \dots + a_1 x + a_0$ είναι συνεχής, αφού για κάθε ξ ισχύει $\lim_{x \rightarrow \xi} p(x) = p(\xi)$.

Παράδειγμα 5.7. Κάθε ρητή συνάρτηση $r(x) = \frac{a_N x^N + \dots + a_1 x + a_0}{b_M x^M + \dots + b_1 x + b_0}$ είναι συνεχής. Πράγματι, για κάθε ξ το οποίο δεν είναι ρίζα του παρονομαστή, δηλαδή για κάθε ξ στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, ισχύει $\lim_{x \rightarrow \xi} r(x) = r(\xi)$.

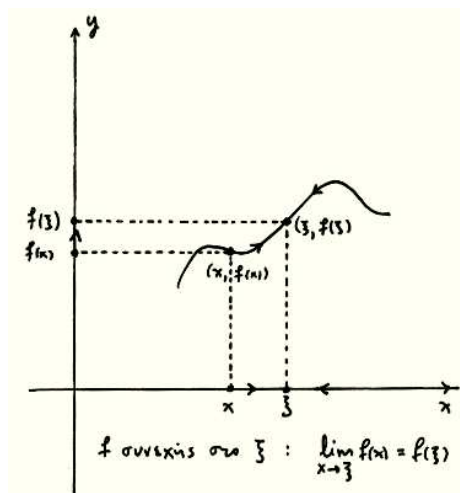
Παράδειγμα 5.8. Οι συναρτήσεις $\cos x$ και $\sin x$ είναι συνεχείς, αφού ισχύει $\lim_{x \rightarrow \xi} \cos x = \cos \xi$ και $\lim_{x \rightarrow \xi} \sin x = \sin \xi$ για κάθε ξ . Ομοίως, οι $\tan x$ και $\cot x$ είναι συνεχείς: για κάθε ξ στο πεδίο ορισμού τους, δηλαδή για κάθε $\xi \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, για την πρώτη και για κάθε $\xi \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, για τη δεύτερη, ισχύει $\lim_{x \rightarrow \xi} \tan x = \tan \xi$ και $\lim_{x \rightarrow \xi} \cot x = \cot \xi$.

Παράδειγμα 5.9. Η x^a είναι συνεχής: ισχύει $\lim_{x \rightarrow \xi} x^a = \xi^a$ για κάθε ξ στο πεδίο ορισμού της, δηλαδή: (i) για κάθε ξ , αν το a είναι ακέραιος (εξαιρείται το $\xi = 0$, αν $a \leq 0$), και (ii) για κάθε $\xi \geq 0$, αν το a δεν είναι ακέραιος (εξαιρείται, πάλι, το $\xi = 0$, αν $a < 0$).

Παράδειγμα 5.10. Αν $a > 0$, τότε η a^x είναι συνεχής, αφού για κάθε ξ ισχύει $\lim_{x \rightarrow \xi} a^x = a^\xi$.

Παράδειγμα 5.11. Αν $a > 0, a \neq 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow \xi} \log_a x = \log_a \xi$ για κάθε $\xi > 0$, οπότε η $\log_a x$ είναι συνεχής.

Στο γράφημα μιας συνάρτησης φαίνεται καθαρά αν αυτή είναι συνεχής ή όχι σε κάποιο σημείο του πεδίου ορισμού της. Για να είναι η f συνεχής στο ξ , πρέπει, όταν το x προσεγγίζει το ξ , το αντίστοιχο σημείο $(x, f(x))$ να προσεγγίζει το σημείο $(\xi, f(\xi))$. Με πιο απλά, αλλά και κάπως ασαφή, λόγια: η συνάρτηση είναι συνεχής στο ξ , αν το γράφημά της δεν «σπάει» στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ ή, αλλιώς, είναι «συνεχές» στο σημείο αυτό. Παρατηρήστε το σχήμα 5.1.



Σχήμα 5.1

Εξετάστε, όμως, και την άσκηση 5.8.

Ασκήσεις

5.1. Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις $x + 1, 2x - 3, x^2 + x, \frac{1}{x+1}, \frac{x+3}{x+1}, \sqrt{x}, \sqrt{x+1}, \log(x+1), e^x$ είναι συνεχείς στο 0 με τον ορισμό της συνέχειας με τα ϵ και δ .

5.2. Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις $\begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{αν } x \neq 0, \\ 1, & \text{αν } x = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2}, & \text{αν } x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{αν } x = 0, \end{cases}$ είναι συνεχείς στο 0.

5.3. Θεωρήστε τις συναρτήσεις $\begin{cases} x, & \text{αν } x \leq 0, \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } x > 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x^2, & \text{αν } x \neq 0, \\ 1, & \text{αν } x = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + 1, & \text{αν } x < 0, \\ \sqrt{x+1}, & \text{αν } x \geq 0, \end{cases}$ και βρείτε σε ποια σημεία είναι συνεχείς ή συνεχείς από δεξιά ή από αριστερά.

5.4. Θεωρήστε τις συναρτήσεις $[2x]$, $x - [x]$, $x - [x] - \frac{1}{2}$, $|x - [x] - \frac{1}{2}|$ και βρείτε σε ποια σημεία είναι συνεχείς ή συνεχείς από δεξιά ή από αριστερά. Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις τους.

5.5. Βρείτε σε ποια σημεία είναι συνεχής η $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}$ και σχεδιάστε το γράφημά της.

5.6. Έστω $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ και $a < \xi < b$. Αποδείξτε ότι $\lim_{h \rightarrow 0} (f(\xi + h) - f(\xi - h)) = 0$, αν η f είναι συνεχής στο ξ .

Αποδείξτε ότι το αντίστροφο δεν ισχύει: θεωρήστε $\xi = 0$ και την $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x = 0, \\ 0, & \text{αν } x \neq 0. \end{cases}$

5.7. Έστω διάστημα I , συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ και $\xi \in I$. Λέμε ότι η f είναι **Hölder συνεχής στο σημείο** ξ , αν υπάρχουν $M \geq 0$ και $\rho > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| \leq M|x - \xi|^\rho$ για κάθε $x \in I$ κοντά στο ξ . Αν $\rho = 1$, τότε λέμε, επίσης, ότι η f είναι **Lipschitz συνεχής στο σημείο** ξ .

Αν η f είναι Hölder συνεχής στο ξ , αποδείξτε ότι είναι συνεχής στο ξ .

Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις x , $|x|$, $\cos x$, $\sin x$, $\sqrt{|x|}$, $x\sqrt{|x|}$ είναι Hölder συνεχείς σε κάθε ξ .

5.8. Είπαμε ότι το να είναι η f συνεχής στο ξ σημαίνει ότι το γράφημά της δεν «σπάει» στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ ή, αλλιώς, είναι «συνεχές» στο σημείο αυτό. Αυτή η διατύπωση είναι κάπως ασαφής και, οπωσδήποτε, όχι τόσο απλή όσο φαίνεται.

Για παράδειγμα, θεωρήστε την $f(x) = \begin{cases} x(-1)^{[\frac{1}{x}]}, & \text{αν } x \neq 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0, \end{cases}$ και σχεδιάστε το γράφημά της. Δείτε

και την άσκηση 2.8. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο 0. Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση είναι ασυνεχής σε άπειρα σημεία τα οποία αποτελούν όρους ακολουθίας με όριο 0.

5.3 Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων

Όλα τα αποτελέσματα παρακάτω θα διατυπώνονται για την περίπτωση της συνέχειας σε κάποιο σημείο. Τα ίδια αποτελέσματα ισχύουν και στις περιπτώσεις της πλευρικής συνέχειας.

Πρόταση 5.1. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : A \rightarrow \mathbb{R}$, έστω $\xi \in A$ και $f(\xi) = g(\xi)$ και έστω ότι οι f, g ταυτίζονται κοντά στο ξ . Αν η f είναι συνεχής στο ξ , τότε και η g είναι συνεχής στο ξ .

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι συνεχής στο ξ . Τότε $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\xi)$, οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 4.2 ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\xi).$$

Επειδή $f(\xi) = g(\xi)$, συνεπάγεται $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = g(\xi)$. Άρα η g είναι συνεχής στο ξ . □

Παράδειγμα 5.12. Οι συναρτήσεις $x+1$ και $\begin{cases} x+1, & \text{αν } x \leq 1, \\ x-1, & \text{αν } 1 < x, \end{cases}$ ταυτίζονται στο $(-\infty, 1]$. Η πρώτη είναι συνεχής στο 1, οπότε είναι και συνεχής στο 1 από αριστερά του. Άρα και η δεύτερη συνάρτηση είναι συνεχής στο 1 από αριστερά του.

Παράδειγμα 5.13. Οι συναρτήσεις x^2 και $\begin{cases} 1+x, & \text{αν } |x| \geq \frac{1}{10^{10}}, \\ x^2, & \text{αν } |x| < \frac{1}{10^{10}}, \end{cases}$ ταυτίζονται στο $(-\frac{1}{10^{10}}, \frac{1}{10^{10}})$. Η πρώτη είναι συνεχής στο 0, οπότε και η δεύτερη είναι συνεχής στο 0.

Πρόταση 5.2. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $\xi \in A$. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο ξ , τότε και οι $f \pm g$, fg και $|f|$ είναι συνεχείς στο ξ . Αν, επιπλέον, ισχύει $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$, τότε και η $\frac{f}{g}$ είναι συνεχής στο ξ .

Απόδειξη. Αν το ξ είναι μεμονωμένο σημείο του A , τότε όλες οι συναρτήσεις είναι, αυτομάτως, συνεχείς στο ξ . Αν το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A , τότε όλα τα αποτελέσματα είναι απλά πορίσματα των κανόνων αθροίσματος, διαφοράς, γινομένου, λόγου και απόλυτης τιμής. Για παράδειγμα, από τη συνέχεια των f, g στο ξ συνεπάγεται $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\xi)$ και $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = g(\xi)$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow \xi} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) + \lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = f(\xi) + g(\xi),$$

οπότε η $f + g$ είναι συνεχής στο ξ . □

Παράδειγμα 5.14. Η $\frac{\sqrt{x}+e^x}{(x-2x^2)\log x}$ είναι συνεχής σε κάθε ξ στο πεδίο ορισμού της, διότι καθεμία από τις συναρτήσεις $\sqrt{x}$, e^x , $\log x$ και $x - 2x^2$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της. Η τομή όλων των πεδίων ορισμού είναι το $(0, +\infty)$ και από αυτό πρέπει να εξαιρέσουμε τα σημεία στα οποία μηδενίζεται ο παρονομαστής. Άρα η συνάρτηση είναι συνεχής σε κάθε ξ του πεδίου ορισμού της, δηλαδή το $(0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1) \cup (1, +\infty)$.

Παράδειγμα 5.15. Η $\frac{x^2 + \sqrt{x}}{\sin x + \cos x}$ είναι συνεχής σε κάθε $\xi \geq 0$ στο οποίο δεν μηδενίζεται ο παρονομαστής, δηλαδή σε κάθε $\xi \geq 0$ το οποίο είναι $\neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Πρόταση 5.3. Έστω $f : A \rightarrow B$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω $\xi \in A$ και $\eta = f(\xi) \in B$. Αν η f είναι συνεχής στο ξ και η g είναι συνεχής στο η , τότε η $g \circ f$ είναι συνεχής στο ξ .

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Όταν το $y \in B$ είναι αρκετά κοντά στο η , τότε ισχύει $|g(y) - g(\eta)| < \epsilon$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ ώστε, αν ισχύει $|y - \eta| < \delta$, τότε ισχύει $|g(y) - g(\eta)| < \epsilon$. Τώρα, όταν το $x \in A$ είναι αρκετά κοντά στο ξ , τότε ισχύει $|f(x) - \eta| = |f(x) - f(\xi)| < \delta$, οπότε ισχύει $|g(f(x)) - g(f(\xi))| = |g(f(x)) - g(\eta)| < \epsilon$. Άρα η $g \circ f$ είναι συνεχής στο ξ . □

Η απόδειξη της Πρότασης 5.3 θυμίζει τον κανόνα αλλαγής μεταβλητής ή αντικατάστασης στο πλαίσιο της θεωρίας των ορίων.

Παράδειγμα 5.16. Η $\sin \sqrt{x}$ είναι συνεχής σε κάθε $\xi \geq 0$. Πράγματι, η $\sqrt{x}$ είναι συνεχής σε κάθε $\xi \geq 0$ και η $\sin y$ είναι συνεχής στο $\eta = \sqrt{\xi}$.

Παράδειγμα 5.17. Το πεδίο ορισμού της $\sqrt{\sin x}$ είναι η ένωση των διαστημάτων $[k2\pi, \pi + k2\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$, διότι σε αυτά ακριβώς τα διαστήματα ισχύει $\sin x \geq 0$. Η $\sin x$ είναι συνεχής σε κάθε ξ το οποίο ανήκει σε αυτά τα διαστήματα και η $\sqrt{y}$ είναι συνεχής στο αντίστοιχο $\eta = \sin \xi$, αφού αυτό είναι ≥ 0 . Άρα η $\sqrt{\sin x}$ είναι συνεχής σε κάθε ξ στο πεδίο ορισμού της.

Ένα θέμα παρεμφερές με την Πρόταση 5.3, αλλά και, ίσως πιο πολύ, με τον κανόνα αλλαγής μεταβλητής ή αντικατάστασης στο πλαίσιο της θεωρίας των ορίων, είναι ο υπολογισμός του ορίου συνάρτησης $g(f(x))$, η οποία είναι σύνθεση δύο συναρτήσεων, της $f(x)$ και της $g(y)$, στην περίπτωση κατά την οποία γνωρίζουμε ότι το $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ είναι κάποιος συγκεκριμένος αριθμός η και η $g(y)$ είναι συνεχής στο η .

Κανόνας αλλαγής μεταβλητής ή κανόνας αντικατάστασης, II. Έστω $f : A \rightarrow B$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ και $\xi \in \bar{A}$ και έστω $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta \in B$. Έστω ότι: (i) η g είναι συνεχής στο η ή (ii) ισχύει $f(x) \geq \eta$ κοντά στο ξ και η g είναι συνεχής στο η από δεξιά του ή (iii) ισχύει $f(x) \leq \eta$ κοντά στο ξ και η g είναι συνεχής στο η από αριστερά του. Τότε $\lim_{x \rightarrow \xi} g(f(x)) = g(\eta)$.

Απόδειξη. (i) Έστω $\epsilon > 0$. Όταν το $y \in B$ είναι αρκετά κοντά στο η , τότε ισχύει $|g(y) - g(\eta)| < \epsilon$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ ώστε, αν ισχύει $|y - \eta| < \delta$, τότε ισχύει $|g(y) - g(\eta)| < \epsilon$. Τώρα, όταν το $x \in A$ είναι αρκετά κοντά στο ξ και είναι $\neq \xi$, τότε ισχύει $|f(x) - \eta| < \delta$, οπότε ισχύει $|g(f(x)) - g(\eta)| < \epsilon$. Άρα $\lim_{x \rightarrow \xi} g(f(x)) = g(\eta)$.

Στις περιπτώσεις (ii) και (iii) η απόδειξη είναι παρόμοια. $\square$

Οι δύο σχέσεις $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta$ και $\lim_{x \rightarrow \xi} g(f(x)) = g(\eta)$ συνδυάζονται σε μία:

$$\lim_{x \rightarrow \xi} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)).$$

Φυσικά, δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι αυτή η εναλλαγή ανάμεσα στο σύμβολο $\lim_{x \rightarrow \xi}$ και στο σύμβολο g ισχύει με την προϋπόθεση ότι η g είναι συνεχής στο η , δηλαδή στο όριο της f .

Παράδειγμα 5.18. Θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x}+1)^4}{(\sqrt{x}+1)^8 + (\sqrt{x}+1)^{13} + 5}$. Με την αλλαγή μεταβλητής $y = \sqrt{x} + 1$ το $\frac{(\sqrt{x}+1)^4}{(\sqrt{x}+1)^8 + (\sqrt{x}+1)^{13} + 5}$ γράφεται $\frac{y^4}{y^8 + y^{13} + 5}$. Έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x} + 1) = 1$ και ότι η συνάρτηση $\frac{y^4}{y^8 + y^{13} + 5}$ είναι συνεχής στο 1. Άρα

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x}+1)^4}{(\sqrt{x}+1)^8 + (\sqrt{x}+1)^{13} + 5} = \frac{1^4}{1^8 + 1^{13} + 5} = \frac{1}{7}.$$

Παράδειγμα 5.19. Για το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{x-1}{x^2+x+1}} + \frac{(x-1)^2}{(x^2+x+1)^2} + \frac{x-1}{x^2+x+1} + 1}{3 \frac{(x-1)^4}{(x^2+x+1)^4} + 2 \sqrt{\frac{x-1}{x^2+x+1}} + 1}$ η αλλαγή μεταβλητής $y = \frac{x-1}{x^2+x+1}$ μετατρέπει την παράσταση της οποίας το όριο θέλουμε να βρούμε σε $\frac{\sqrt{y+y^2+y+1}}{3y^4+2\sqrt{y}+1}$. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^2+x+1} = 0$ και η συνάρτηση $\frac{\sqrt{y+y^2+y+1}}{3y^4+2\sqrt{y}+1}$ είναι συνεχής στο 0. Άρα

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{x-1}{x^2+x+1}} + \frac{(x-1)^2}{(x^2+x+1)^2} + \frac{x-1}{x^2+x+1} + 1}{3 \frac{(x-1)^4}{(x^2+x+1)^4} + 2 \sqrt{\frac{x-1}{x^2+x+1}} + 1} = \frac{\sqrt{0+0^2+0+1}}{3 \cdot 0^4 + 2 \sqrt{0} + 1} = 1.$$

Παράδειγμα 5.20. Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((\frac{\sin x}{x})^3 + (\frac{\sin x}{x})^2 + 3)$. Με την αλλαγή μεταβλητής $y = \frac{\sin x}{x}$ το $(\frac{\sin x}{x})^3 + (\frac{\sin x}{x})^2 + 3$ γίνεται $y^3 + y^2 + 3$. Έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ και ότι η συνάρτηση $y^3 + y^2 + 3$ είναι συνεχής στο 0. Άρα

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} ((\frac{\sin x}{x})^3 + (\frac{\sin x}{x})^2 + 3) = 0^3 + 0^2 + 3 = 3.$$

Υπάρχουν διαφορές ανάμεσα στους δύο κανόνες αλλαγής μεταβλητής. Στον πρώτο κανόνα το όριο της f δεν χρειάζεται να είναι αριθμός, αλλά μπορεί να είναι και $\pm\infty$, ενώ στον δεύτερο κανόνα το όριο της f πρέπει να είναι αριθμός. Άρα ο δεύτερος κανόνας δεν μπορεί να εφαρμοστεί στο παράδειγμα 4.73. Κατόπιν, αν $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta$, τότε στον πρώτο κανόνα μία από τις υποθέσεις είναι ότι ισχύει $f(x) \neq \eta$ κοντά στο ξ . Αυτή η υπόθεση δεν υπάρχει στον δεύτερο κανόνα, αλλά υπάρχει η υπόθεση ότι η g είναι συνεχής στο η . Αυτά συνεπάγονται ότι ο δεύτερος κανόνας δεν μπορεί να εφαρμοστεί στο παράδειγμα 4.74 και ο πρώτος κανόνας δεν μπορεί να εφαρμοστεί στο παράδειγμα 5.20, διότι δεν υπάρχει κανένα a ώστε να ισχύει $\frac{\sin x}{x} \neq 0$ για κάθε $x > a$.

Ακολουθούν μερικές πολύ απλές ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων οι οποίες είναι άμεσες συνέπειες αντίστοιχων απλών ιδιοτήτων του ορίου.

Πρόταση 5.4. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $\xi \in A$. Αν ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο ξ και αν οι f, g είναι συνεχείς στο ξ , τότε $f(\xi) \leq g(\xi)$.

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια της Πρότασης 4.7 και των $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\xi)$ και $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = g(\xi)$. $\square$

Παράδειγμα 5.21. Αν γνωρίζουμε ότι ισχύει $f(x) \leq \sin x$ για κάθε x στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{4})$ και ότι η f είναι συνεχής στο 0 από δεξιά του, τότε, επειδή και η $\sin x$ είναι συνεχής στο 0 από δεξιά του, συμπεραίνουμε ότι $f(0) \leq \sin 0 = 0$.

Παράδειγμα 5.22. Αν ισχύει $l \leq f(x) \leq u$ κοντά στο ξ και η f είναι συνεχής στο ξ , τότε συνεπάγεται $l \leq f(\xi) \leq u$.

Πρόταση 5.5. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, έστω ότι το $\xi \in A$ είναι σημείο συσσώρευσης του A και έστω ότι η f είναι συνεχής στο ξ .

(i) Αν $f(\xi) < u$, τότε ισχύει $f(x) < u$ κοντά στο ξ .

(ii) Αν $f(\xi) > l$, τότε ισχύει $f(x) > l$ κοντά στο ξ .

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια της Πρότασης 4.8 σε συνδυασμό με το $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\xi)$. $\square$

Παράδειγμα 5.23. Η $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ είναι συνεχής στο $\frac{\pi}{3}$ και $f(\frac{\pi}{3}) = 2 + \sqrt{3}$. Επειδή $3 < 2 + \sqrt{3} < 4$, συνεπάγεται ότι υπάρχει διάστημα (a, b) με $a < \frac{\pi}{3} < b$ ώστε να ισχύει $3 < f(x) < 4$ για κάθε $x \in (a, b)$. Αυτό είναι συνέπεια της Πρότασης 5.5 με $l = 3$ και $u = 4$.

Πρόταση 5.6. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, έστω ότι το $\xi \in A$ είναι σημείο συσσώρευσης του A και έστω ότι η f είναι συνεχής στο ξ . Τότε η f είναι φραγμένη κοντά στο ξ .

Απόδειξη. Άμεση εφαρμογή της Πρότασης 4.9 ή της Πρότασης 5.5. $\square$

Ασκήσεις

5.9. Βρείτε τα πεδία ορισμού και τα σημεία συνέχειας των συναρτήσεων $\sin(x^2)$, $\log(x^2+2)$, e^{x^3-2x} , 2^{2^x} , $\frac{1}{\sqrt{e^x-1}}$, $\sin(\log x)$, $\sqrt{1-\cos x}$, $[x^2]$, $[\sqrt{x}]$, $(x^2-5x+6)^{\sqrt{2}}$, $\log(\log x)$, $\log(\sin x)$, $\log(1-\cos x)$, $\frac{1}{1-\cos x}$, $\tan(\sin x - \cos x)$, $\frac{x^2 \log x + xe^x}{(\sin x - \cos x)^2}$, $\frac{(\tan x - \cot x) \log^2 x}{(\sin^2 x - 2 \sin x + 1)x^{\frac{3}{4}}}$.

5.10. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ και έστω $f(x) > 0$ για κάθε $x \in A$. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο ξ , αποδείξτε ότι η $f^g : A \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $(f^g)(x) = f(x)^{g(x)}$, είναι συνεχής στο ξ .

Υπόδειξη: Θυμηθείτε το $a^b = e^{b \log a}$.

Αποδείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς στα αντίστοιχα σύνολα.

(i) x^x στο $(0, +\infty)$.

(ii) $(x^2 - 3)^{\frac{x-2}{x+2}}$ στο $(-\infty, -2) \cup (-2, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

(iii) $(2 - x^2)^{\log x}$ στο $(0, \sqrt{2})$.

(iv) $(\log x)^{\log x}$ στο $(1, +\infty)$.

5.11. Βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{[x]}{x}}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{x}}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos \frac{\sin x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 1} e^{(x-1) \sin \frac{1}{x-1}}$ με κατάλληλες αλλαγές μεταβλητής. Σε ποια από αυτά μπορεί να εφαρμοστεί ο πρώτος κανόνας αλλαγής μεταβλητής;

5.12. Υπολογίζοντας κατάλληλες τιμές συναρτήσεων σε συγκεκριμένα σημεία,

(i) αποδείξτε ότι υπάρχει $b > 0$ ώστε για κάθε $x \in [0, b)$ να ισχύει $\frac{7}{8} < \frac{\log(1+x) + \cos \sqrt{x}}{e^x + \sin \sqrt{x}} < \frac{12}{11}$.

(ii) αποδείξτε ότι υπάρχουν a, b ώστε $a < 1 < b$ και ώστε για κάθε $x \in (a, b)$ να ισχύουν, συγχρόνως, $\eta \frac{1}{2} < \frac{x^8 - x^5 + 3}{4x^4 - 1} < \frac{3}{2}$ και $\eta \frac{1}{16} < \frac{e^x - 2^x}{7x - 3} < \frac{1}{2}$.

5.13. Έστω $f : (\xi - \delta, \xi + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi+h) + f(\xi-h) - 2f(\xi)}{|h|} = m$, όπου $m \in \mathbb{R}$, και αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$, αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο ξ .

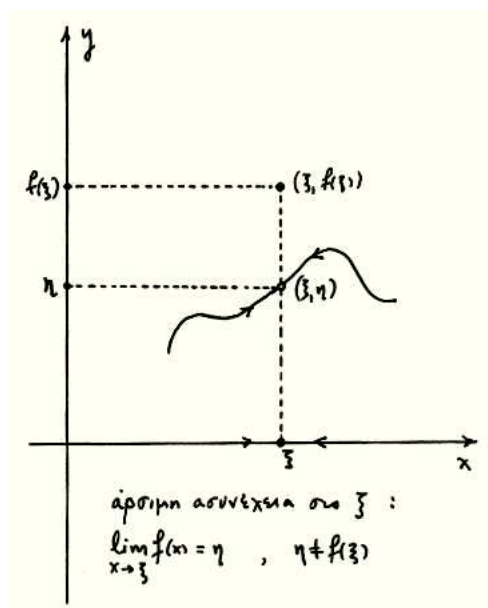
5.4 Είδη ασυνεχειών

Αν η f είναι συνεχής στο ξ , τότε λέμε ότι το ξ είναι **σημείο συνέχειας** της f . Υπενθυμίζουμε ότι, αν το ξ είναι σημείο συνέχειας της f , τότε το ξ ανήκει στο πεδίο ορισμού της f .

Αν το ξ ανήκει στο πεδίο ορισμού της f και η f δεν είναι συνεχής στο ξ , τότε λέμε ότι το ξ είναι **σημείο ασυνέχειας** της f ή ότι η f **έχει** ή **παρουσιάζει ασυνέχεια** στο ξ . Θα κατατάξουμε τα σημεία ασυνέχειας μίας συνάρτησης σε τρεις κατηγορίες.

Ορισμός 5.3. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $\xi \in A$. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ και είναι αριθμός $\neq f(\xi)$, τότε λέμε ότι το ξ είναι **σημείο άρσιμης ασυνέχειας** της f ή ότι η f **έχει** ή **παρουσιάζει άρσιμη ασυνέχεια** στο ξ .

Παρατηρήστε το σχήμα 5.2.



Σχήμα 5.2

Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να αλλάξουμε την τιμή της f στο ξ , και μόνο στο ξ , έτσι ώστε να δημιουργηθεί μία νέα συνάρτηση η οποία είναι συνεχής στο ξ . Πιο συγκεκριμένα, ας ορίσουμε τη συνάρτηση $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } x \in A, x \neq \xi, \\ \lim_{x \rightarrow \xi} f(x), & \text{αν } x = \xi. \end{cases}$$

Τότε η g έχει το ίδιο πεδίο ορισμού με την f και διαφέρει από την f μόνο στο ξ . Αν τώρα υπολογίσουμε το όριο της g στο ξ , βρίσκουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = g(\xi).$$

Η πρώτη ισότητα ισχύει, διότι ισχύει $g(x) = f(x)$ για κάθε $x \in A, x \neq \xi$, και η δεύτερη ισότητα ισχύει από τον ορισμό του $g(\xi)$.

Άρα η g είναι συνεχής στο ξ .

Παράδειγμα 5.24. Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{αν } x \neq 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0, \end{cases}$ παρουσιάζει άρσιμη ασυνέχεια στο 0, διότι το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x+1) = 1$ είναι αριθμός διαφορετικός από την τιμή $f(0) = 0$. Αν αλλάξουμε την τιμή της f στο 0 και την ορίσουμε να είναι ίση με το όριο στο 0, δηλαδή ίση με

1, αντί 0, τότε η συνάρτηση μετατρέπεται στην $g(x) = \begin{cases} x+1, & \text{αν } x \neq 0, \\ 1, & \text{αν } x = 0, \end{cases}$ δηλαδή στην $x+1$, η οποία είναι συνεχής στο 0.

Ορισμός 5.4. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $\xi \in A$. Αν (i) υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$, αλλά δεν είναι αριθμός, δηλαδή είναι $\pm\infty$, ή αν (ii) υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x)$, αλλά είναι διαφορετικά, τότε λέμε ότι το ξ είναι **σημείο ασυνέχειας πρώτου είδους** της f ή ότι η f έχει ή παρουσιάζει **ασυνέχεια πρώτου είδους** στο ξ . Στην περίπτωση (ii), η διαφορά $\lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x)$, η οποία είναι $\neq 0$, ονομάζεται **άλμα** της f στο ξ .

Παράδειγμα 5.25. Η $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{αν } x \neq 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0, \end{cases}$ παρουσιάζει ασυνέχεια πρώτου είδους στο 0, διότι

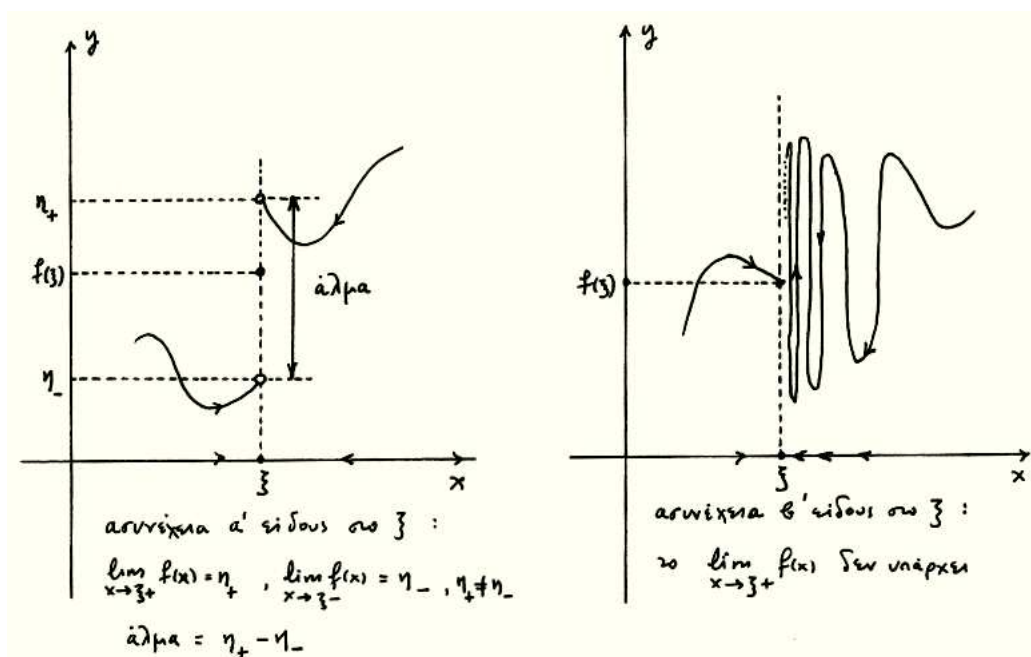
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty. \text{ Ομοίως για την } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-x}}, & \text{αν } x < 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0, \end{cases} \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty.$$

Παράδειγμα 5.26. Η $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & \text{αν } x \neq 1, \\ 1, & \text{αν } x = 1, \end{cases}$ παρουσιάζει ασυνέχεια πρώτου είδους στο 1, διότι $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$. Το άλμα στο 1 είναι ίσο με $+\infty - (-\infty) = +\infty$.

Παράδειγμα 5.27. Η $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{αν } x \geq 0, \\ x, & \text{αν } x < 0, \end{cases}$ παρουσιάζει ασυνέχεια πρώτου είδους στο 0, διότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$. Το άλμα στο 0 είναι ίσο με $1 - 0 = 1$.

Ορισμός 5.5. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $\xi \in A$. Αν ένα τουλάχιστον από τα $\lim_{x \rightarrow \xi^\pm} f(x)$ δεν υπάρχει, τότε λέμε ότι το ξ είναι **σημείο ασυνέχειας δεύτερου είδους** ή **σημείο ουσιώδους ασυνέχειας** της f ή ότι η f έχει ή παρουσιάζει **ασυνέχεια δεύτερου είδους** ή **ουσιώδη ασυνέχεια** στο ξ .

Παρατηρήστε το σχήμα 5.3.



Σχήμα 5.3

Παράδειγμα 5.28. Η $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{αν } x > 0, \\ x, & \text{αν } x \leq 0, \end{cases}$ παρουσιάζει ασυνέχεια δεύτερου είδους στο 0, διότι δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sin t$.

Παράδειγμα 5.29. Η $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0, \\ 1, & \text{αν } x = 0, \end{cases}$ παρουσιάζει ασυνέχεια δεύτερου είδους στο 0, διότι δεν υπάρχει κανένα από τα $\lim_{x \rightarrow 0\pm} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0\pm} \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \sin t$.

Αρα τα σημεία ασυνέχειας μιας συνάρτησης κατατάσσονται σε σημεία άρσιμης ασυνέχειας, σε σημεία ασυνέχειας πρώτου είδους και σε σημεία ασυνέχειας δεύτερου είδους.

Είναι φανερό ότι, αν το ξ είναι σημείο ασυνέχειας πρώτου ή δεύτερου είδους της f , τότε το σημείο αυτό δεν μπορεί να μετατραπεί σε σημείο συνέχειας με απλή αλλαγή της τιμής $f(\xi)$ της συνάρτησης στο ξ . Αυτό γίνεται μόνο στην περίπτωση κατά την οποία το ξ είναι σημείο άρσιμης ασυνέχειας.

Αξίζει να δούμε πιο προσεκτικά την περίπτωση κατά την οποία η $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι *αύξουσα* και το ξ είναι σημείο συσσώρευσης από αριστερά του και από δεξιά του του A , π.χ. όταν το A περιέχει ένα διάστημα (a, b) με $a < \xi < b$.

Τότε η f είναι αύξουσα και άνω φραγμένη στο μέρος του A το οποίο είναι αριστερά του ξ , αφού ισχύει $f(x) \leq f(\xi)$ για κάθε $x \in A$, $x < \xi$. Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1, υπάρχει το πλευρικό όριο $\lim_{x \rightarrow \xi-} f(x)$ και είναι αριθμός και, μάλιστα, $\lim_{x \rightarrow \xi-} f(x) \leq f(\xi)$. Επίσης, το $\lim_{x \rightarrow \xi-} f(x)$ είναι (το ελάχιστο) άνω φράγμα της f στο μέρος του A το οποίο είναι αριστερά του ξ : ισχύει $f(x') \leq \lim_{x \rightarrow \xi-} f(x)$ για κάθε $x' \in A$, $x' < \xi$. Ομοίως, η f είναι αύξουσα και κάτω φραγμένη στο μέρος του A το οποίο είναι δεξιά του ξ , αφού ισχύει $f(\xi) \leq f(x)$ για κάθε $x \in A$, $\xi < x$. Άρα υπάρχει το πλευρικό όριο $\lim_{x \rightarrow \xi+} f(x)$ και είναι αριθμός και, μάλιστα, $f(\xi) \leq \lim_{x \rightarrow \xi+} f(x)$. Επίσης, το $\lim_{x \rightarrow \xi+} f(x)$ είναι (το μέγιστο) κάτω φράγμα της f στο μέρος του A το οποίο είναι δεξιά του ξ : ισχύει $\lim_{x \rightarrow \xi+} f(x) \leq f(x'')$ για κάθε $x'' \in A$, $\xi < x''$. Συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow \xi-} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow \xi+} f(x)$, ότι αυτά είναι αριθμοί και ότι ισχύει

$$f(x') \leq \lim_{x \rightarrow \xi-} f(x) \leq f(\xi) \leq \lim_{x \rightarrow \xi+} f(x) \leq f(x'') \quad \text{για κάθε } x' \in A, x'' \in A, x' < \xi < x''.$$

Τώρα διακρίνουμε ακριβώς δύο περιπτώσεις.

Η πρώτη περίπτωση είναι όταν $\lim_{x \rightarrow \xi-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \xi+} f(x)$, οπότε, αυτομάτως, συνεπάγεται

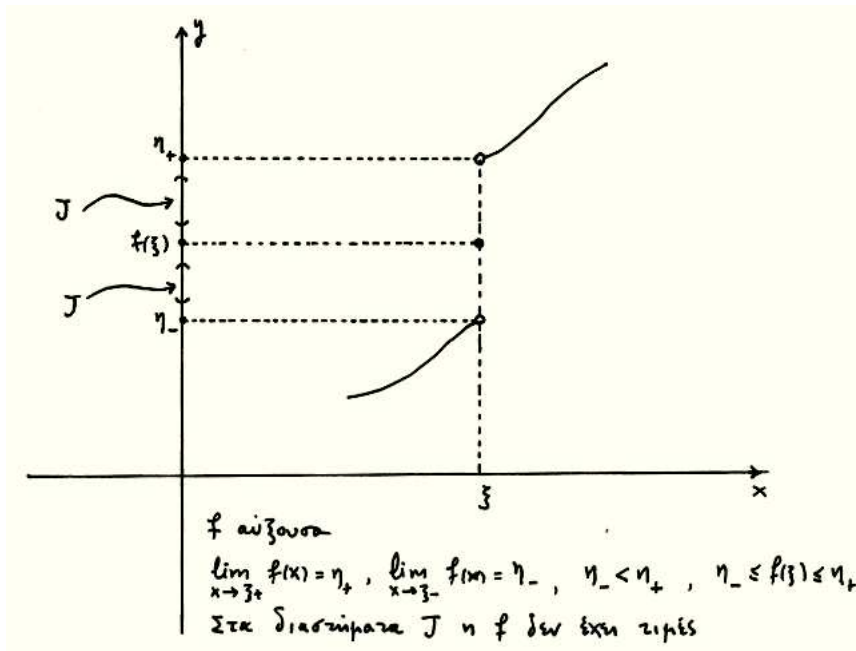
$$\lim_{x \rightarrow \xi-} f(x) = f(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi+} f(x),$$

οπότε η f είναι συνεχής στο ξ .

Η δεύτερη περίπτωση είναι όταν

$$\lim_{x \rightarrow \xi-} f(x) < \lim_{x \rightarrow \xi+} f(x),$$

οπότε η f έχει ασυνέχεια πρώτου είδους στο ξ με *θετικό άλμα* $\lim_{x \rightarrow \xi+} f(x) - \lim_{x \rightarrow \xi-} f(x) > 0$. Σε αυτήν την περίπτωση βλέπουμε, επίσης, ότι το ανοικτό διάστημα $(\lim_{x \rightarrow \xi-} f(x), \lim_{x \rightarrow \xi+} f(x))$ στον y -άξονα, το οποίο έχει *θετικό* μήκος, δεν περιέχει *καμία τιμή της f εκτός, ίσως, από την $f(\xi)$* . Οι τιμές $f(x')$ για $x' \in A$, $x' < \xi$, βρίσκονται όλες κάτω από αυτό το διάστημα και οι τιμές $f(x'')$ για $x'' \in A$, $x'' > \xi$, βρίσκονται όλες πάνω από αυτό το διάστημα. Μάλιστα, ακόμη και αν η τιμή $f(\xi)$ περιέχεται σε αυτό το διάστημα, τότε μπορούμε να βρούμε ένα μικρότερο ανοικτό διάστημα J , υποσύνολο του προηγούμενου, το οποίο δεν περιέχει *καμία τιμή της f* , δηλαδή ούτε την $f(\xi)$, και οι τιμές $f(x')$ για $x' \in A$, $x' < \xi$, βρίσκονται όλες κάτω από το J και οι τιμές $f(x'')$ για $x'' \in A$, $x'' > \xi$, βρίσκονται όλες πάνω από το J . Παρατηρήστε το σχήμα 5.4.



Σχήμα 5.4

Ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει, αν η f είναι φθίνουσα στο A και το ξ είναι σημείο συσσώρευσης από αριστερά του και από δεξιά του του A . Απλώς, τότε όλες οι προηγούμενες ανισότητες αλλάζουν φορά και βρίσκουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow \xi-} f(x) \geq f(\xi) \geq \lim_{x \rightarrow \xi+} f(x).$$

Η f είτε είναι συνεχής στο ξ είτε παρουσιάζει ασυνέχεια πρώτου είδους στο ξ με αρνητικό άλμα. Στη δεύτερη περίπτωση, το διάστημα $(\lim_{x \rightarrow \xi+} f(x), \lim_{x \rightarrow \xi-} f(x))$ στον y -άξονα, το οποίο έχει θετικό μήκος, δεν περιέχει καμία τιμή της f εκτός, ίσως, από την $f(\xi)$. Επίσης, υπάρχει ανοικτό διάστημα J , υποσύνολο του προηγούμενου, το οποίο δεν περιέχει καμία τιμή της f , δηλαδή ούτε την $f(\xi)$, και οι τιμές $f(x')$ για $x' \in A$, $x' < \xi$, βρίσκονται όλες πάνω από το J και οι τιμές $f(x'')$ για $x'' \in A$, $x'' > \xi$, βρίσκονται όλες κάτω από το J .

Συνοψίζουμε:

Αν η $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μονότονη στο A και το ξ είναι σημείο συσσώρευσης από αριστερά του και από δεξιά του του A , τότε η f είτε (i) είναι συνεχής στο ξ είτε (ii) παρουσιάζει ασυνέχεια πρώτου είδους στο ξ , με θετικό άλμα, αν είναι αύξουσα, και αρνητικό άλμα, αν είναι φθίνουσα. Στην περίπτωση (ii) υπάρχει ανοικτό διάστημα στον y -άξονα θετικού μήκους, το οποίο δεν περιέχει καμία τιμή της f , αλλά υπάρχουν τιμές της f από πάνω του και από κάτω του.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι μία συνάρτηση, η οποία είναι μονότονη σε κάποιο διάστημα, δεν παρουσιάζει άρσιμες ασυνέχειες ούτε ασυνέχειες δεύτερου είδους στα εσωτερικά σημεία του διαστήματος.

Ασκήσεις

5.14. Χαρακτηρίστε το είδος ασυνέχειας στο 0 των συναρτήσεων $\begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{αν } x \neq 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0, \end{cases} \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \neq 0, \\ 1, & \text{αν } x = 0, \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{1}{|x|}, & \text{αν } x \neq 0, \\ -1, & \text{αν } x = 0, \end{cases} \begin{cases} x, & \text{αν } x \leq 0, \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } x > 0, \end{cases} \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{αν } x > 0, \\ 1, & \text{αν } x \leq 0, \end{cases} \begin{cases} \frac{\tan x}{x}, & \text{αν } x \neq 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0. \end{cases}$

5.15. Χαρακτηρίστε τα σημεία ασυνέχειας των συναρτήσεων των ασκήσεων 5.3 και 5.4.

5.16. Αποδείξτε ότι η $\log[x]$ είναι αύξουσα στο πεδίο ορισμού της $[1, +\infty)$ και υπολογίστε τα αλμάτά της σε όλα τα σημεία ασυνέχειάς της.

5.17. Έστω μονότονη $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης από αριστερά του, αλλά όχι από δεξιά του του A . Αποδείξτε ότι στο ξ η f είτε είναι συνεχής είτε παρουσιάζει άρσιμη ασυνέχεια, και ότι στη δεύτερη περίπτωση υπάρχει ανοικτό διάστημα J στον y -άξονα, θετικού μήκους, το οποίο δεν περιέχει καμία τιμή της f , αλλά υπάρχουν τιμές της f από πάνω του και από κάτω του. Αποδείξτε το ανάλογο αποτέλεσμα όταν το $\xi \in A$ είναι σημείο συσσώρευσης από δεξιά του αλλά όχι από αριστερά του του A .

Υπόδειξη: Μιμηθείτε ό,τι κάναμε στην περίπτωση που το ξ είναι σημείο συσσώρευσης από αριστερά του και από δεξιά του του A .

5.5 Συνέχεια συνάρτησης και ακολουθίες

Πρόταση 5.7. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω $\xi \in A$ και $x_n \in A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν η f είναι συνεχής στο ξ και $x_n \rightarrow \xi$, τότε $f(x_n) \rightarrow f(\xi)$.

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Όταν το $x \in A$ είναι αρκετά κοντά στο ξ , τότε ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ ώστε, αν ισχύει $|x - \xi| < \delta$, τότε ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$. Τώρα, αν το n είναι αρκετά μεγάλο, τότε ισχύει $|x_n - \xi| < \delta$, οπότε ισχύει $|f(x_n) - f(\xi)| < \epsilon$. Άρα $f(x_n) \rightarrow f(\xi)$. $\square$

Παράδειγμα 5.30. Αν η p είναι πολωνυμική συνάρτηση και $x_n \rightarrow \xi$, τότε $p(x_n) \rightarrow p(\xi)$.

Παράδειγμα 5.31. Αν η r είναι ρητή συνάρτηση, αν κανένας όρος της (x_n) ούτε το ξ δεν είναι ρίζα του παρονομαστή της συνάρτησης και αν $x_n \rightarrow \xi$, τότε $r(x_n) \rightarrow r(\xi)$.

Παράδειγμα 5.32. Αν $x_n \rightarrow \xi$, τότε $\cos x_n \rightarrow \cos \xi$ και $\sin x_n \rightarrow \sin \xi$.

Παράδειγμα 5.33. Αν $x_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αν $\xi > 0$ και αν $x_n \rightarrow \xi$, τότε $x_n^a \rightarrow \xi^a$.

Παράδειγμα 5.34. Αν $a > 0$ και $x_n \rightarrow \xi$, τότε $a^{x_n} \rightarrow a^\xi$.

Ως ειδική περίπτωση, με $x_n = \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ξαναβρίσκουμε το γνωστό όριο $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$.

Παράδειγμα 5.35. Αν $x_n > 0$ για κάθε n , αν $\xi > 0$ και αν $x_n \rightarrow \xi$, τότε $\log_a x_n \rightarrow \log_a \xi$.

Όπως στην περίπτωση του κανόνα αλλαγής μεταβλητής, II, οι δύο σχέσεις $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \xi$ και $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(\xi)$ συνδυάζονται σε μία:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n\right).$$

Και πάλι, δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι αυτή η εναλλαγή ανάμεσα στο σύμβολο $\lim_{n \rightarrow +\infty}$ του ορίου ακολουθίας και στο σύμβολο f της συνάρτησης ισχύει με την προϋπόθεση ότι η f είναι συνεχής στο ξ , δηλαδή στο όριο της ακολουθίας.

Η Πρόταση 5.7 για ακολουθίες και συνεχείς συναρτήσεις σχετίζεται με την Πρόταση 4.10 για ακολουθίες και όρια συναρτήσεων. Παρατηρήστε ότι, ενώ στην Πρόταση 5.7 δεν χρειάζεται να υποθέσουμε τίποτα για τους όρους της ακολουθίας πέρα από το ότι ανήκουν στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, στην Πρόταση 4.10 πρέπει να υποθέσουμε, επιπλέον, ότι όλοι οι όροι είναι $\neq \xi$.

Παράδειγμα 5.36. Επειδή η $\sin x$ είναι συνεχής στο 0 και επειδή $\frac{1+(-1)^{n-1}}{n} \rightarrow 0$, συνεπάγεται ότι $\sin\left(\frac{1+(-1)^{n-1}}{n}\right) \rightarrow \sin 0 = 0$. Με άλλη διατύπωση:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1+(-1)^{n-1}}{n}\right) = \sin\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+(-1)^{n-1}}{n}\right) = \sin 0 = 0.$$

Παρατηρήστε ότι δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την Πρόταση 4.10, διότι ισχύει $\frac{1+(-1)^{n-1}}{n} = 0$ για άπειρα n .

Ασκήσεις

5.18. Υπολογίστε τα όρια των ακολουθιών με τους εξής n -οστούς όρους $\tan \frac{1}{2n}$, $2^{\frac{3n^4+n-4}{n^4+n^3+4}} \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n^2})$, $n \log(1 + \frac{1}{n})$, $(\frac{n^2+3}{4n^2-3})^{\frac{3}{2}} \log(\cos \frac{1}{n})$.

5.19. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{r}{n})^n = e^r \quad \text{για κάθε } r \in \mathbb{Q}.$$

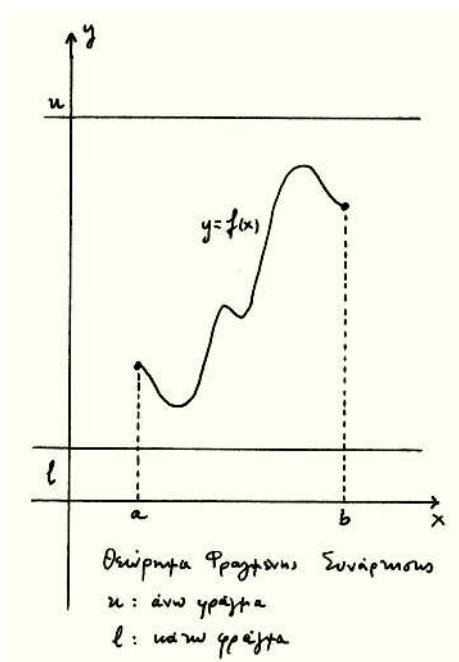
Υπόδειξη: Αν $r = \frac{m}{l}$ με $m \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{N}$, τότε θεωρήστε την υπακολουθία με δείκτες $n_k = lk$ της ακολουθίας $((1 + \frac{m}{n})^n)$ στην άσκηση 3.67 για να αποδείξετε ότι $\lim_{k \rightarrow +\infty} (1 + \frac{r}{k})^k = e^r$.

5.6 Θεωρήματα Φραγμένης Συνάρτησης, Μέγιστης / Ελάχιστης Τιμής, Ενδιάμεσης Τιμής και Bolzano

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τις τρεις πιο σημαντικές ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων: το Θεώρημα Φραγμένης Συνάρτησης, το Θεώρημα Μέγιστης / Ελάχιστης Τιμής και το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής. Οι αυστηρά αναλυτικές αποδείξεις τους υπάρχουν στην ενότητα 11.12 του κεφαλαίου 11. Εδώ θα περιοριστούμε σε απλή γεωμετρική αιτιολόγησή τους.¹

Θεώρημα Φραγμένης Συνάρτησης. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε η f είναι φραγμένη στο $[a, b]$.

Γεωμετρική αιτιολόγηση. Το γράφημα της f είναι καμπύλη η οποία ενώνει τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ του επιπέδου και, όταν το x αυξάνεται στο διάστημα $[a, b]$, τότε το αντίστοιχο σημείο $(x, f(x))$ κινείται από τα αριστερά προς τα δεξιά με αυξομειώσεις του ύψους του. Είναι φανερό, από το σχήμα του γραφήματος ότι το ύψος του σημείου $(x, f(x))$, δηλαδή το $f(x)$, δεν μπορεί να γίνει ούτε απεριόριστα μεγάλο θετικό ούτε απεριόριστα μεγάλο αρνητικό. Ενδεικτικά, παρατηρήστε το σχήμα 5.5.



Σχήμα 5.5

¹Για περισσότερα σχετικά με τις αναλυτικές αποδείξεις δείτε τις σημειώσεις «Ανάλυση» [1].

Το συμπέρασμα του Θεωρήματος Φραγμένης Συνάρτησης ισχύει γενικά, αν ισχύουν οι υποθέσεις, δηλαδή ότι η συνάρτηση είναι συνεχής σε κλειστό και φραγμένο διάστημα. Αυτό σημαίνει ότι, αν η συνάρτηση δεν είναι συνεχής ή αν το διάστημα δεν είναι κλειστό ή δεν είναι φραγμένο, τότε το συμπέρασμα, ανάλογα με τη συγκεκριμένη περίπτωση συνάρτησης, μπορεί να ισχύει αλλά μπορεί και να μην ισχύει.

Παράδειγμα 5.37. Η $\begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{αν } -1 \leq x < 0 \text{ ή } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{αν } x = 0, \end{cases}$ είναι ορισμένη στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[-1, 1]$, δεν είναι συνεχής στο 0 και δεν είναι φραγμένη στο $[-1, 1]$.

Παράδειγμα 5.38. Η $\begin{cases} x, & \text{αν } -1 \leq x < 0 \text{ ή } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{αν } x = 0, \end{cases}$ είναι ορισμένη στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[-1, 1]$, δεν είναι συνεχής στο 0 και είναι φραγμένη στο $[-1, 1]$.

Παράδειγμα 5.39. Η $\frac{1}{x(x-1)}$ είναι συνεχής στο διάστημα $(0, 1)$ και δεν είναι φραγμένη στο $(0, 1)$.

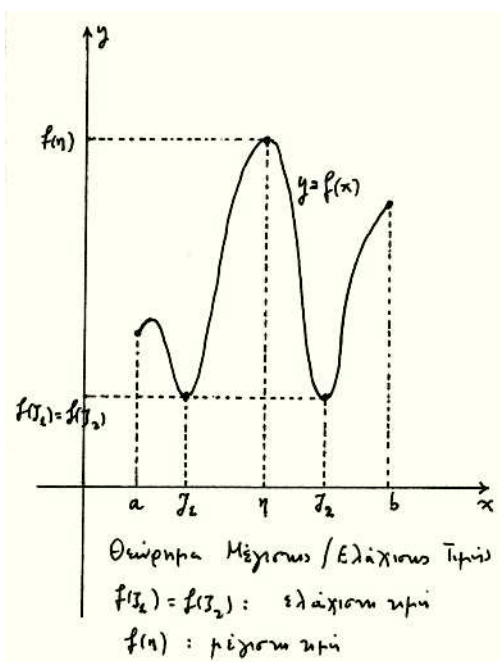
Παράδειγμα 5.40. Η x είναι συνεχής στο διάστημα $(-1, 1)$ και είναι φραγμένη στο $(-1, 1)$.

Παράδειγμα 5.41. Η x είναι συνεχής στο κλειστό, αλλά όχι φραγμένο διάστημα $(-\infty, +\infty)$ και δεν είναι φραγμένη στο $(-\infty, +\infty)$.

Παράδειγμα 5.42. Η $\frac{1}{x^2+1}$ είναι συνεχής στο κλειστό, αλλά όχι φραγμένο διάστημα $(-\infty, +\infty)$ και είναι φραγμένη στο $(-\infty, +\infty)$.

Θεώρημα Μέγιστης / Ελάχιστης Τιμής. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε υπάρχουν $\zeta \in [a, b]$ και $\eta \in [a, b]$ ώστε να ισχύει $f(\zeta) \leq f(x) \leq f(\eta)$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Γεωμετρική αιτιολόγηση. Το γράφημα της f είναι καμπύλη η οποία ενώνει τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ του επιπέδου. Είναι φανερό από το σχήμα του γραφήματος ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του, $(\zeta, f(\zeta))$, με ελάχιστο ύψος, δηλαδή «πυθμένας», και τουλάχιστον ένα σημείο του, $(\eta, f(\eta))$, με μέγιστο ύψος, δηλαδή «κορυφή». Ενδεικτικά, παρατηρήστε το σχήμα 5.6. Αυτό, φυσικά, σημαίνει ότι υπάρχει κάποιο $\zeta \in [a, b]$ στο οποίο η f έχει ελάχιστη τιμή και κάποιο $\eta \in [a, b]$ στο οποίο η f έχει μέγιστη τιμή. $\square$



Σχήμα 5.6

Οι αριθμοί ζ, η μπορεί να μην είναι μοναδικοί. Δηλαδή, μπορεί να υπάρχουν περισσότερα από ένα ζ στα οποία η f πιάνει την ελάχιστη τιμή της και περισσότερα από ένα η στα οποία η f πιάνει τη μέγιστη τιμή της. Στο σχήμα 5.6 εμφανίζονται δύο ζ και ένα η .

Το Θεώρημα Μέγιστης / Ελάχιστης Τιμής δεν αναφέρει τρόπο εύρεσης των ζ, η στα οποία η συνάρτηση πιάνει την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της ούτε τρόπο εύρεσης της ελάχιστης και της μέγιστης τιμής της. Για τέτοιους υπολογισμούς θα γνωρίσουμε διάφορες μεθόδους αργότερα, στο πλαίσιο της έννοιας της παραγώγου.

Το συμπέρασμα του Θεωρήματος Μέγιστης / Ελάχιστης Τιμής ισχύει γενικά, αν ισχύουν οι υποθέσεις, δηλαδή ότι η συνάρτηση είναι συνεχής σε κλειστό και φραγμένο διάστημα. Αυτό σημαίνει ότι, αν η συνάρτηση δεν είναι συνεχής ή αν το διάστημα δεν είναι κλειστό ή δεν είναι φραγμένο, τότε το συμπέρασμα, ανάλογα με τη συγκεκριμένη περίπτωση συνάρτησης, μπορεί να ισχύει αλλά μπορεί και να μην ισχύει.

Παράδειγμα 5.43. Η
$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{αν } -1 \leq x < 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0, \\ x-1, & \text{αν } 0 < x \leq 1, \end{cases}$$
 είναι ορισμένη στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[-1, 1]$, δεν είναι συνεχής στο 0 και δεν έχει ούτε μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή.

Παράδειγμα 5.44. Η
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } -1 \leq x < 0, \\ 1, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$
 είναι ορισμένη στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[-1, 1]$, δεν είναι συνεχής στο 0 και έχει και μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Παράδειγμα 5.45. Η x είναι συνεχής στο διάστημα $(-1, 1)$ και δεν έχει ούτε μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή.

Παράδειγμα 5.46. Η
$$f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{αν } -2 < x < -1, \\ -x, & \text{αν } -1 \leq x \leq 1, \\ x-2, & \text{αν } 1 < x < 2, \end{cases}$$
 είναι συνεχής στο διάστημα $(-2, 2)$ και έχει και μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

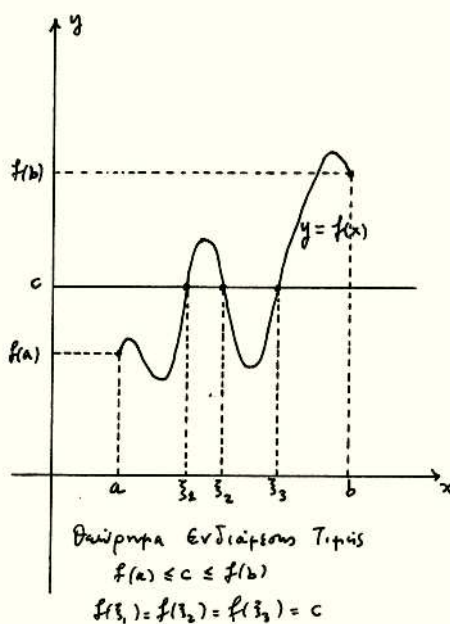
Παράδειγμα 5.47. Η x είναι συνεχής στο κλειστό, αλλά όχι φραγμένο διάστημα $(-\infty, +\infty)$ και δεν έχει ούτε μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή.

Παράδειγμα 5.48. Η
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{αν } |x| > 1, \\ x, & \text{αν } |x| \leq 1, \end{cases}$$
 είναι συνεχής στο κλειστό, αλλά όχι φραγμένο διάστημα $(-\infty, +\infty)$ και έχει και μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε για κάθε c με την ιδιότητα $f(a) \leq c \leq f(b)$ ή $f(b) \leq c \leq f(a)$ υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $f(\xi) = c$ ή, με άλλα λόγια, η εξίσωση $f(x) = c$ έχει τουλάχιστον μία λύση $\xi \in [a, b]$.

Γεωμετρική αιτιολόγηση. Αν $f(a) = f(b)$, τότε, αναγκαστικά, είναι $c = f(a) = f(b)$, οπότε η εξίσωση $f(x) = c$ έχει δύο προφανείς λύσεις: τις $\xi = a$ και $\xi = b$. Επίσης, αν $f(a) \neq f(b)$ και $c = f(a)$ ή $c = f(b)$, τότε η εξίσωση $f(x) = c$ έχει μία προφανή λύση: την $\xi = a$ ή την $\xi = b$, αντιστοίχως.

Τώρα, έστω $f(a) < c < f(b)$ ή $f(b) < c < f(a)$. Αν y είναι η εξαρτημένη μεταβλητή, τότε η ευθεία l με εξίσωση $y = c$ είναι παράλληλη στον οριζόντιο άξονα σε ύψος c από αυτόν. Τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ έχουν ύψη $f(a)$ και $f(b)$, αντιστοίχως, οπότε βρίσκονται το ένα πάνω από την ευθεία l και το άλλο κάτω από αυτήν. Άρα το γράφημα της f , το οποίο είναι καμπύλη η οποία ενώνει τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$, αναγκαστικά θα έχει τουλάχιστον ένα σημείο κοινό με την ευθεία l . Ενδεικτικά, παρατηρήστε το σχήμα 5.7. Έστω ότι το κοινό αυτό σημείο είναι το (ξ, η) . Τότε $\eta = f(\xi)$, διότι το σημείο ανήκει στο γράφημα της f . Επίσης, $\eta = c$, διότι το σημείο ανήκει στην ευθεία l . Άρα $f(\xi) = c$. Επίσης, βλέπουμε ότι το ξ , η λύση της εξίσωσης $f(x) = c$, ανήκει στο ανοικτό διάστημα (a, b) . $\square$



Σχήμα 5.7

Το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής δεν υποδεικνύει πώς λύνουμε την εξίσωση $f(x) = c$, δηλαδή πώς υπολογίζουμε το ξ . Πρέπει, επίσης, να τονίσουμε ότι το ξ μπορεί να μην είναι μοναδικό. Δηλαδή, μπορεί να υπάρχουν περισσότερα από ένα ξ στα οποία η f έχει την ίδια τιμή c .

Το συμπέρασμα του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής ισχύει γενικά, αν ισχύουν οι υποθέσεις, δηλαδή ότι η συνάρτηση είναι συνεχής σε κλειστό και φραγμένο διάστημα. Αν η συνάρτηση δεν είναι συνεχής ή αν το διάστημα δεν είναι κλειστό ή δεν είναι φραγμένο, τότε το συμπέρασμα, ανάλογα με τη συγκεκριμένη περίπτωση συνάρτησης, μπορεί να ισχύει, αλλά μπορεί και να μην ισχύει.

Παράδειγμα 5.49. Η $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{αν } x = 0, \end{cases}$ είναι ορισμένη στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[0, 1]$, δεν είναι συνεχής στο 0 και ο αριθμός $\frac{1}{2}$, όπως και κάθε αριθμός c γνησίως ανάμεσα στα $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$, δεν είναι τιμή της συνάρτησης.

Παράδειγμα 5.50. Η $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ x - \frac{1}{2}, & \text{αν } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$ είναι ορισμένη στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[0, 1]$, δεν είναι συνεχής στο $\frac{1}{2}$ και κάθε αριθμός c ανάμεσα στα $f(0) = 0$ και $f(1) = \frac{1}{2}$ είναι τιμή της συνάρτησης.

Θα δούμε τώρα μερικά παραδείγματα εφαρμογής του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής.

Παράδειγμα 5.51. Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $\cos x = x$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \cos x - x$ στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$. Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής και το διάστημα είναι κλειστό και φραγμένο. Οι τιμές στα άκρα είναι $f(0) = 1$ και $f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}$ και ο αριθμός 0 είναι ανάμεσα στις δύο αυτές τιμές. Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ώστε να ισχύει $f(\xi) = 0$ ή, ισοδύναμα, $\cos \xi = \xi$. Είναι, μάλιστα, φανερό ότι $\xi \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Παράδειγμα 5.52. Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $x^3 - 5x^2 - 18x + 7 = 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση.

Τώρα δεν χρειάζεται να αποδείξουμε ότι υπάρχει λύση σε συγκεκριμένο διάστημα. Στην περίπτωση αυτή βρίσκουμε μόνοι μας δύο αριθμούς a και b με $a < b$ ώστε το 0 να είναι ανάμεσα στις τιμές της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 5x^2 - 18x + 7$ στους αριθμούς a και b ή, με άλλα λόγια, οι αριθμοί

$f(a)$ και $f(b)$ να είναι ετερόσημοι. Δοκιμάζουμε, λίγο-πολύ, στην τύχη: $f(0) = 7$ και $f(1) = -15$. Άρα υπάρχει αριθμός $\xi \in (0, 1)$ ώστε $f(\xi) = 0$.

Στο παράδειγμα αυτό έχουμε, όπως είδαμε, ελευθερία επιλογής του διαστήματος στο οποίο εφαρμόζουμε το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής. Θα δούμε, μάλιστα, ότι δεν είναι ανάγκη ούτε καν να θεωρήσουμε συγκεκριμένο διάστημα. Αυτό γίνεται ως εξής. Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, υπάρχει κάποιο αρκετά μεγάλο $a < 0$ ώστε να ισχύει $f(a) < 0$. Επίσης, επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, υπάρχει κάποιο αρκετά μεγάλο $b > 0$ ώστε να ισχύει $f(b) > 0$. Επομένως, υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $f(\xi) = 0$. Το παράδειγμα αυτό θα γενικευτεί στην επόμενη ενότητα.

Θα δούμε τώρα δύο τυπικές εφαρμογές του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής.

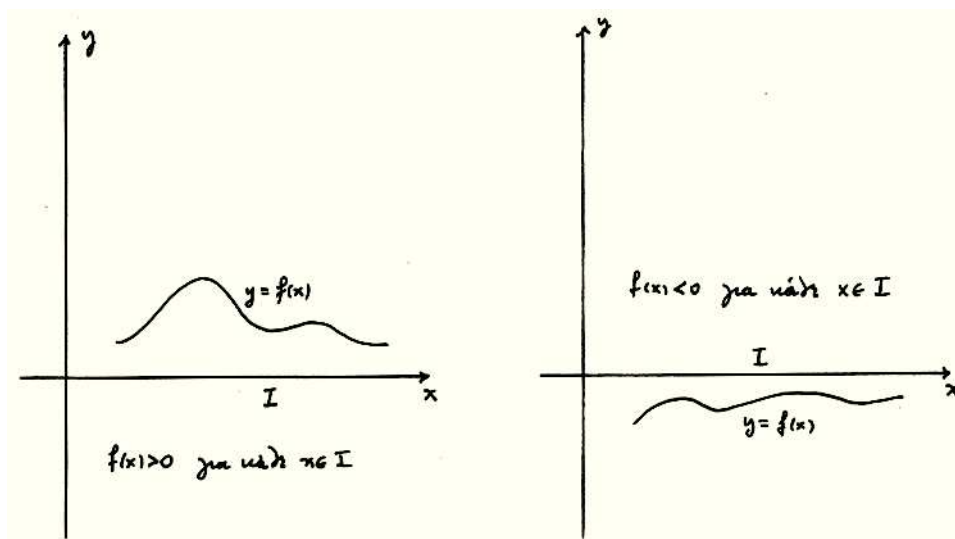
Θεώρημα Bolzano. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και αν $f(a)f(b) < 0$, τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f(\xi) = 0$.

Απόδειξη. Από την $f(a)f(b) < 0$ συνεπάγεται $f(a) < 0 < f(b)$ ή $f(b) < 0 < f(a)$ και το συμπέρασμα είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής. $\square$

Ιδιότητα σταθερού προσήμου. Έστω διάστημα I οποιουδήποτε τύπου και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο I και αν ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$, τότε είτε ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in I$.

Απόδειξη. Αν υποθέσουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι το συμπέρασμα δεν είναι σωστό, τότε πρέπει να υπάρχει $a \in I$ με $f(a) < 0$ και να υπάρχει $b \in I$ με $f(b) > 0$. Επειδή το I είναι διάστημα, συνεπάγεται ότι το διάστημα $[a, b]$ ή $[b, a]$ με άκρα a και b είναι υποσύνολο του I , οπότε η f είναι συνεχής στο διάστημα αυτό. Από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής συνεπάγεται ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ή $\xi \in [b, a]$, οπότε $\xi \in I$, ώστε $f(\xi) = 0$ και έτσι καταλήγουμε σε άτοπο. $\square$

Το γεωμετρικό περιεχόμενο της ιδιότητας σταθερού προσήμου είναι ότι, αν μία καμπύλη δεν τέμνει τον x -άξονα, τότε είτε θα είναι ολόκληρη πάνω από τον x -άξονα είτε θα είναι ολόκληρη κάτω από τον x -άξονα. Παρατηρήστε τις δύο περιπτώσεις στα σχήματα 5.8.



Σχήμα 5.8

Ασκήσεις

5.20. Έχουν οι συναρτήσεις x^2 , $x^2 - x + 1$, $\sin(\pi x)$, $\cot(\pi x)$, $\sin(2\pi x)$ μέγιστη ή ελάχιστη τιμή στο διάστημα $(0, 1)$;

5.21. (i) Αποδείξτε ότι η $\sin \frac{1}{x}$ έχει και μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $(0, +\infty)$ και ότι πιάνει και τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της σε άπειρα σημεία του διαστήματος αυτού. Ποια είναι αυτά τα σημεία;

(ii) Αποδείξτε ότι οι $x \sin x$ και $\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ δεν είναι ούτε άνω φραγμένες ούτε κάτω φραγμένες στο διάστημα $(0, +\infty)$.

(iii) Αποδείξτε ότι η $\frac{1}{1+x} \sin \frac{1}{x}$ είναι άνω φραγμένη και κάτω φραγμένη, αλλά δεν έχει ούτε μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή στο διάστημα $(0, +\infty)$.

5.22. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^7 - 3x^6 + 5x^5 + 13x^4 - x^3 - 12x^2 - 5x + 1 = 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $[0, 1]$.

5.23. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $e^x = x + 2$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις.

5.24. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $\frac{3}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{5}{x-3} = 0$ έχει ακριβώς μία λύση σε καθένα από τα διαστήματα $(0, 1)$, $(1, 2)$ και $(2, 3)$.

Υπόδειξη: Θα χρειαστεί η μονοτονία της συνάρτησης $\frac{3}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{5}{x-3}$ σε καθένα από τα παραπάνω διαστήματα. Αποδείξτε τη με στοιχειώδη τρόπο.

5.25. Έστω $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_n < b_n$. Αποδείξτε ότι η πολυωνυμική συνάρτηση $p(x) = 2(x - a_1) \cdots (x - a_n) + 3(x - b_1) \cdots (x - b_n)$ έχει ακριβώς n πραγματικές ρίζες.

Υπόδειξη: Βρείτε τα πρόσημα των $p(b_n), p(a_n), p(b_{n-1}), p(a_{n-1}), \dots$. Σκεφτείτε, επίσης, ότι μία πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού n έχει το πολύ n διαφορετικές ρίζες.

5.26. Έστω $k \in \mathbb{Z}$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $\tan x = x$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$.

5.27. Έστω συνεχής $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $0 \leq f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [0, 1]$ ώστε $f(\xi) = \xi^2$.

5.28. Έστω συνεχείς $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f(a) < g(a)$ και $f(b) > g(b)$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

5.29. Έστω συνεχής $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $f(\xi) = \xi$.

5.30. Έστω συνεχής $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν δεν ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ούτε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, αποδείξτε ότι υπάρχει ξ ώστε $f(\xi) = \xi$.

Υπόδειξη: Υποθέστε ότι ισχύει $f(x) \neq x$ για κάθε x .

5.31. Έστω διάστημα I και συνεχείς $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $f(x) \neq g(x)$ για κάθε $x \in I$. Αποδείξτε ότι είτε ισχύει $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in I$.

Έστω, επιπλέον, και συνεχής $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $h(x) = f(x)$ ή $h(x) = g(x)$ για κάθε $x \in I$. Αποδείξτε ότι είτε ισχύει $h(x) = f(x)$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $h(x) = g(x)$ για κάθε $x \in I$.

Υπόδειξη: Συσχετίστε την h με την $\frac{1}{2}(f + g)$.

5.32. (i) Έστω διάστημα I και συνεχείς $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $g(x)^2 = f(x)^2$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$. Αποδείξτε ότι είτε ισχύει $g(x) = f(x)$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $g(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in I$.

(ii) Έστω $I = (-\infty, 0]$ ή $I = [0, +\infty)$ και συνεχής $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $f(x)^2 = |x|$ για κάθε $x \in I$. Αποδείξτε ότι είτε ισχύει $f(x) = \sqrt{|x|}$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $f(x) = -\sqrt{|x|}$ για κάθε $x \in I$.

(iii) Πόσες συνεχείς συναρτήσεις $f : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ υπάρχουν οι οποίες ικανοποιούν την ισότητα $f(x)^2 = x^2$ για κάθε x ;

(iv) Έστω συνεχής $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $x^2 + f(x)^2 = 1$ για κάθε $x \in [-1, 1]$. Αποδείξτε ότι είτε ισχύει $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ για κάθε $x \in [-1, 1]$ είτε ισχύει $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ για κάθε $x \in [-1, 1]$.

5.33. Έστω διάστημα I και συνεχής $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f είναι ένα-προς-ένα στο I , αποδείξτε ότι είναι γνησίως μονότονη στο I .

Υπόδειξη: Αν η f δεν είναι γνησίως μονότονη, τότε υπάρχουν x_1, x_2, x_3 στο I ώστε $x_1 < x_2 < x_3$ και ώστε είτε $f(x_1) < f(x_2), f(x_3) < f(x_2)$ είτε $f(x_2) < f(x_1), f(x_2) < f(x_3)$. Στην πρώτη περίπτωση θεωρήστε c ώστε $\max\{f(x_1), f(x_3)\} < c < f(x_2)$.

5.34. (i) Έστω συνεχής $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $f(x) > l$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\rho > l$ ώστε να ισχύει $f(x) \geq \rho$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το Θεώρημα Μέγιστης / Ελάχιστης Τιμής.

(ii) Έστω συνεχείς $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\rho > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) \geq g(x) + \rho$ για κάθε $x \in [a, b]$.

5.35. Δύο σημειακά οχήματα κινούνται πάνω σε ένα επίπεδο από τη χρονική στιγμή $t = a$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t = b$. Αποδείξτε ότι υπάρχει κάποια χρονική στιγμή ανάμεσα στις $t = a$ και $t = b$ κατά την οποία η απόσταση ανάμεσα στα δύο οχήματα γίνεται μέγιστη και κάποια χρονική στιγμή κατά την οποία η απόσταση ανάμεσά τους γίνεται ελάχιστη.

5.36. Δύο σημειακά οχήματα M και N κινούνται πάνω σε μία οριζόντια ευθεία. Τη χρονική στιγμή $t = a$ το M είναι δεξιότερα του N , ενώ τη χρονική στιγμή $t = b$ το N είναι δεξιότερα του M . Αποδείξτε ότι σε κάποια ενδιάμεση χρονική στιγμή τα δύο οχήματα θα βρεθούν το ένα δίπλα στο άλλο.

5.7 Σύνολο τιμών και αντίστροφη συνεχούς συνάρτησης

Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε το σύνολο τιμών μίας συνάρτησης f , αφού αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να απαντήσουμε σε ερωτήματα όπως, για παράδειγμα, αν για κάποιο συγκεκριμένο c η εξίσωση $f(x) = c$ έχει λύση ή όχι: αν το c ανήκει στο σύνολο τιμών, τότε η εξίσωση έχει λύση, ενώ, αν το c δεν ανήκει στο σύνολο τιμών, τότε η εξίσωση δεν έχει λύση.

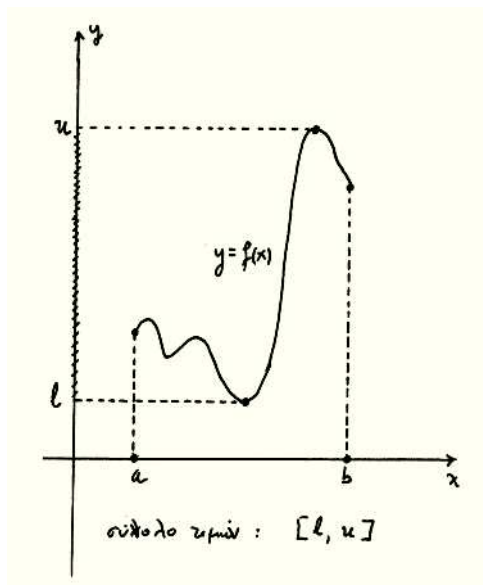
Στην ενότητα αυτή θα δούμε μερικές χαρακτηριστικές περιπτώσεις στις οποίες το πρόβλημα του προσδιορισμού του συνόλου τιμών συνάρτησης έχει απλή, τουλάχιστον θεωρητικά, λύση. Ένα άλλο θέμα αυτής της ενότητας είναι η συνέχεια της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} μίας συνεχούς συνάρτησης f στην περίπτωση κατά την οποία η f είναι γνησίως μονότονη, κάτι που εξασφαλίζει την αντιστρεψιμότητά της.

Πρόταση 5.8. Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής σε κλειστό και φραγμένο διάστημα I , τότε το σύνολο τιμών της το οποίο αντιστοιχεί στο I είναι το κλειστό και φραγμένο διάστημα με άκρα την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης στο I .

Απόδειξη. Έστω συνεχής $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Από το Θεώρημα Μέγιστης / Ελάχιστης Τιμής συνεπάγεται ότι υπάρχουν $\zeta \in [a, b]$ και $\eta \in [a, b]$ ώστε να ισχύει $f(\zeta) \leq f(x) \leq f(\eta)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Συμβολίζουμε $l = f(\zeta)$, $u = f(\eta)$ την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της f στο $[a, b]$. Τότε, προφανώς, κάθε τιμή της f ανήκει στο διάστημα $[l, u]$, οπότε το σύνολο τιμών της f είναι υποσύνολο του $[l, u]$.

Αντιστρόφως, έστω $c \in [l, u]$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής στο διάστημα $[\zeta, \eta]$ ή $[\eta, \zeta]$, το οποίο είναι υποσύνολο του $[a, b]$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\zeta, \eta]$ ή $[\eta, \zeta]$ και το c είναι ανάμεσα στις τιμές $l = f(\zeta)$ και $u = f(\eta)$, υπάρχει $\xi \in [\zeta, \eta]$ ή $[\eta, \zeta]$, οπότε $\xi \in [a, b]$, ώστε $c = f(\xi)$. Άρα κάθε $c \in [l, u]$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f , οπότε το διάστημα $[l, u]$ είναι υποσύνολο του συνόλου τιμών της f .

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι ακριβώς το $[l, u]$. Ενδεικτικά, παρατηρήστε το σχήμα 5.9. □



Σχήμα 5.9

Άρα για να βρούμε το σύνολο τιμών συνάρτησης συνεχούς σε κλειστό και φραγμένο διάστημα είναι αρκετό να υπολογίσουμε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της στο διάστημα αυτό. Αυτό δεν είναι πάντοτε εφικτό. Στο κεφάλαιο 6 θα γνωρίσουμε με τη βοήθεια των παραγώγων μερικές μεθόδους υπολογισμού αυτών των τιμών της συνάρτησης. Πάντως, σε μερικές απλές περιπτώσεις οι υπολογισμοί αυτοί είναι και τώρα εφικτοί.

Παράδειγμα 5.53. Η $f(x) = x^2$ είναι αύξουσα στο $[1, 4]$, οπότε η ελάχιστη τιμή της στο διάστημα αυτό είναι το $f(1) = 1$ και η μέγιστη τιμή της είναι το $f(4) = 16$. Άρα το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο $[1, 4]$ είναι το διάστημα $[f(1), f(4)] = [1, 16]$.

Παράδειγμα 5.54. Η $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι φθίνουσα στο $[\frac{1}{2}, 3]$, οπότε η ελάχιστη τιμή της στο διάστημα αυτό είναι το $f(3) = \frac{1}{3}$ και η μέγιστη τιμή της είναι το $f(\frac{1}{2}) = 2$. Επομένως, το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο $[\frac{1}{2}, 3]$ είναι το διάστημα $[f(3), f(\frac{1}{2})] = [\frac{1}{3}, 2]$.

Παράδειγμα 5.55. Θεωρούμε την $f(x) = x^2 - 6x + 5$ στο διάστημα $[-1, 6]$. Η συνάρτηση γράφεται και $f(x) = (x - 3)^2 - 4$, οπότε είναι φθίνουσα στο $[-1, 3]$ και αύξουσα στο $[3, 6]$. Άρα η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης στο $[-1, 6]$ είναι το $f(3) = -4$ και η μέγιστη τιμή της είναι το μεγαλύτερο από τα $f(-1) = 12$ και $f(6) = 5$, δηλαδή το 12. Άρα το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο $[-1, 6]$ είναι το $[f(3), f(-1)] = [-4, 12]$. Ειδικότερα, το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο $[-1, 3]$ είναι το $[f(3), f(-1)] = [-4, 12]$ και το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο $[3, 6]$ είναι το $[f(3), f(6)] = [-4, 5]$.

Τώρα θα δούμε τη σημαντική περίπτωση υπολογισμού του συνόλου τιμών *πολυνωνμικής συνάρτησης* η οποία δεν εμπίπτει στην Πρόταση 5.8, αλλά ούτε και στη μετέπειτα Πρόταση 5.10.

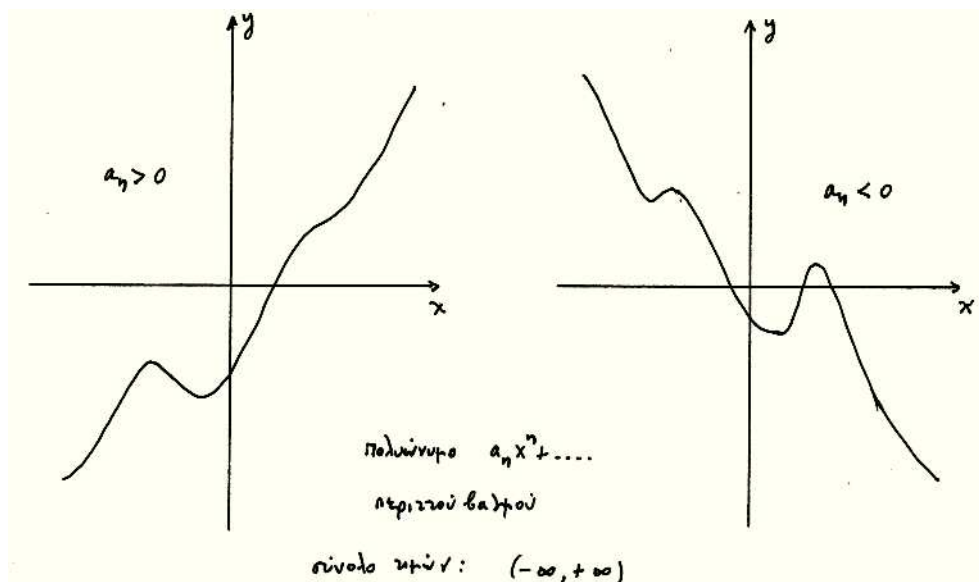
Πρόταση 5.9. (i) Έστω πολωνυμική συνάρτηση $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ περιττού βαθμού, δηλαδή $a_n \neq 0$ και ο n είναι περιττός. Τότε το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, +\infty)$.
(ii) Έστω πολωνυμική συνάρτηση $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ άρτιου βαθμού, δηλαδή $a_n \neq 0$ και ο n είναι άρτιος. Αν $a_n > 0$, τότε η συνάρτηση έχει ελάχιστη τιμή, έστω l , και το σύνολο τιμών της είναι το $[l, +\infty)$. Αν $a_n < 0$, τότε η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή, έστω u , και το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, u]$.

Απόδειξη. (i) Έστω περιττός n και $a_n > 0$, οπότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty$. Παρατηρήστε το αριστερό από τα σχήματα 5.10.

Θεωρούμε οποιοδήποτε c , οπότε από την Πρόταση 4.8 συνεπάγεται ότι ισχύει $p(x) < c$ κοντά στο

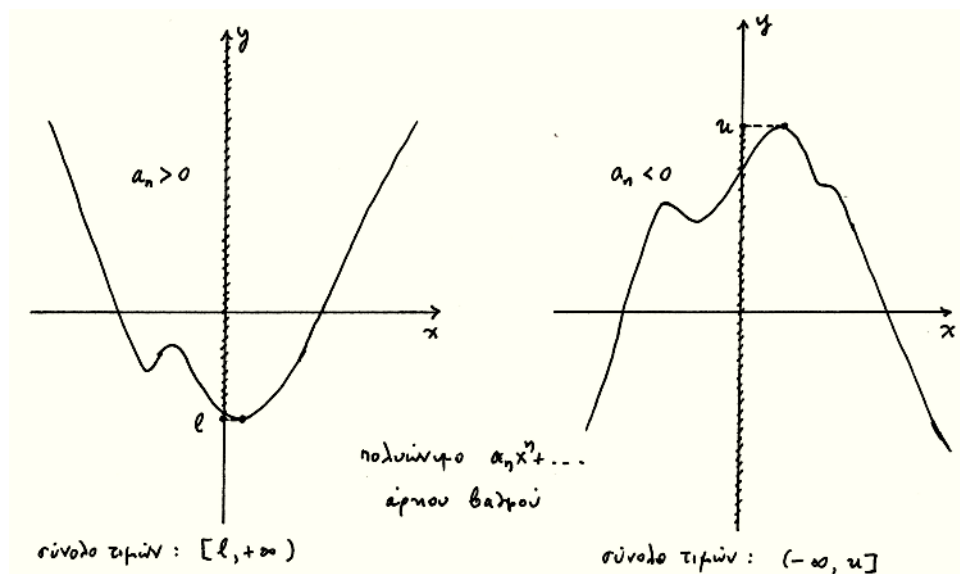
$-\infty$, και $c < p(x)$ κοντά στο $+\infty$. Άρα υπάρχει κάποιο μεγάλο $a < 0$ και κάποιο μεγάλο $b > 0$ ώστε $p(a) < c < p(b)$. Από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής συνεπάγεται ότι το c είναι τιμή της συνάρτησης. Άρα το $(-\infty, +\infty)$ είναι υποσύνολο του συνόλου τιμών της p και, επειδή το αντίστροφο είναι προφανές, συνεπάγεται ότι το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, +\infty)$.

Αν $a_n < 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = -\infty$ και η απόδειξη μένει, ουσιαστικά, ίδια. Παρατηρήστε το δεξιό από τα σχήματα 5.10.



Σχήμα 5.10

(ii) Έστω άρτιος n και $a_n > 0$. Παρατηρήστε το αριστερό από τα σχήματα 5.11.



Σχήμα 5.11

Θεωρούμε οποιαδήποτε τιμή της p , για παράδειγμα την $p(0) = a_0$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty$, από την Πρόταση 4.8 συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποιο μεγάλο $a < 0$ ώστε να ισχύει $p(x) > a_0$ για κάθε $x \in (-\infty, a)$ και κάποιο μεγάλο $b > 0$ ώστε να ισχύει $p(x) > a_0$ για κάθε $x \in (b, +\infty)$. Η p είναι συνεχής στο $[a, b]$, οπότε έχει ελάχιστη τιμή, έστω l , στο διάστημα αυτό. Μάλιστα, επειδή $0 \in [a, b]$, είναι $l \leq p(0) = a_0$, οπότε ισχύει $l \leq p(x)$ για κάθε $x \in (-\infty, a)$ και για κάθε $x \in (b, +\infty)$. Συμπεραίνουμε ότι το l είναι η ελάχιστη τιμή της p σε ολόκληρο το $(-\infty, +\infty)$ και όχι μόνο στο $[a, b]$.

Άρα το σύνολο τιμών της p είναι υποσύνολο του $[l, +\infty)$. Αντιστρόφως, έστω $c \in [l, +\infty)$, δηλαδή

$l \leq c < +\infty$. Το l είναι τιμή της p , δηλαδή υπάρχει κάποιο x_0 ώστε $p(x_0) = l$. Από την Πρόταση 4.8, επειδή $c < \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x)$, συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποιο μεγάλο $b' > 0$ ώστε $c < p(b')$. Άρα το c είναι ανάμεσα στις τιμές $p(x_0)$ και $p(b')$ της συνάρτησης, οπότε, από το Θεώρημα Ενδιάμεσας Τιμής, το c ανήκει στο σύνολο τιμών της. Άρα το $[l, +\infty)$ είναι υποσύνολο του συνόλου τιμών και συμπεραίνουμε ότι το σύνολο τιμών είναι το $[l, +\infty)$.

Αν $a_n < 0$, τότε η απόδειξη είναι παρόμοια. Παρατηρήστε το δεξιό από τα σχήματα 5.11. $\square$

Παράδειγμα 5.56. Το σύνολο τιμών της $p(x) = -2x^5 + 4x^4 - 3x^3 - x^2 + 7x - 1$ είναι το $(-\infty, +\infty)$, διότι είναι πολυωνυμική συνάρτηση περιττού βαθμού.

Παράδειγμα 5.57. Η $p(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 7$ γράφεται και $p(x) = x^2(x-2)^2 - 7$. Άρα ισχύει $p(x) \geq -7$ για κάθε x και, επίσης, $p(0) = p(2) = -7$. Άρα το -7 είναι η ελάχιστη τιμή της p και, επειδή αυτή είναι πολυωνυμική συνάρτηση άρτιου βαθμού, το σύνολο τιμών της είναι το $[-7, +\infty)$.

Τώρα θα δούμε την περιγραφή του συνόλου τιμών συνάρτησης η οποία είναι *συνεχής και γνησίως μονότονη σε διάστημα* οποιουδήποτε τύπου.

Γνωρίζουμε ότι, αν η f είναι γνησίως μονότονη σε κάποιο διάστημα I , τότε αυτή είναι, προφανώς, ένα-προς-ένα στο I και ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} . Επίσης, γνωρίζουμε ότι, αν J είναι το σύνολο τιμών της f το οποίο αντιστοιχεί στο διάστημα I , τότε η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το J και σύνολο τιμών το διάστημα I . Η Πρόταση 5.10 παρακάτω δίνει πλήρη και λεπτομερή περιγραφή του συνόλου τιμών της f στην περίπτωση κατά την οποία η f , εκτός από γνησίως μονότονη, είναι και *συνεχής* στο διάστημα I . Συγκεκριμένα: τότε το σύνολο τιμών J είναι και αυτό *διάστημα* και, μάλιστα, ίδιου τύπου με το I . Η Πρόταση 5.10 αναφέρει, επίσης, ότι η f^{-1} είναι και αυτή *συνεχής* στο J .

Πριν διατυπώσουμε την Πρόταση 5.10, ας θυμηθούμε ότι σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1 αν μία συνάρτηση είναι μονότονη σε διάστημα, τότε υπάρχουν τα πλευρικά όριά της και στα δύο άκρα του διαστήματος: το αριστερό πλευρικό όριο στο δεξιό άκρο και το δεξιό πλευρικό όριο στο αριστερό άκρο.

Στην Πρόταση 5.10, αν έχουμε διάστημα (a, b) ή $[a, b)$, τότε το b μπορεί να είναι αριθμός ή $+\infty$ και, στην περίπτωση $b = +\infty$, όταν γράφουμε $\lim_{x \rightarrow b-} f(x)$, τότε εννοούμε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Ομοίως, αν έχουμε διάστημα (a, b) ή $(a, b]$, τότε το a μπορεί να είναι αριθμός ή $-\infty$ και, στην περίπτωση $a = -\infty$, όταν γράφουμε $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$, τότε εννοούμε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Πρόταση 5.10. (i) Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $I = [a, b]$. Τότε το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $J = [A, B]$, όπου $A = f(a)$, $B = f(b)$. Επίσης, η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[A, B]$ με σύνολο τιμών το $[a, b]$.

(ii) Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $I = (a, b)$. Τότε το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $J = (A, B)$, όπου $A = \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$, $B = \lim_{x \rightarrow b-} f(x)$. Επίσης, η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο (A, B) με σύνολο τιμών το (a, b) .

(iii) Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $I = [a, b)$. Τότε το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $J = [A, B)$, όπου $A = f(a)$, $B = \lim_{x \rightarrow b-} f(x)$. Επίσης, η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[A, B)$ με σύνολο τιμών το $[a, b)$.

(iv) Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $I = (a, b]$. Τότε το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $J = (A, B]$, όπου $A = \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$, $B = f(b)$. Επίσης, η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(A, B]$ με σύνολο τιμών το $(a, b]$.

Τα συμπεράσματα των (i), (ii), (iii), (iv) ισχύουν και στην περίπτωση κατά την οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο διάστημα I . Η μόνη διαφορά είναι ότι τα άκρα του διαστήματος J αλλάζουν διάταξη. Για παράδειγμα, στην περίπτωση (i) πρέπει να είναι $J = [B, A]$, αντί $J = [A, B]$.

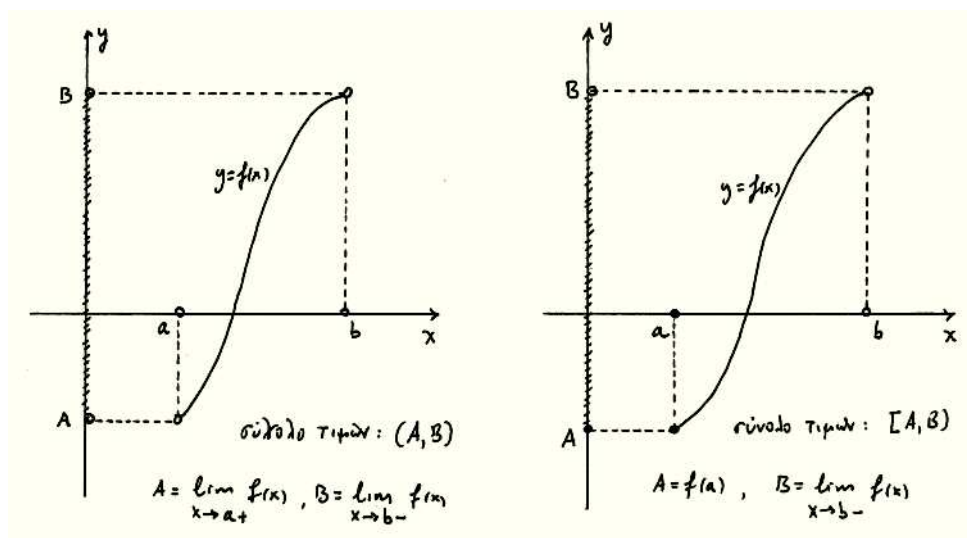
Απόδειξη. (i) Το ότι το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $J = [A, B]$, όπου $A = f(a)$, $B = f(b)$, είναι απλή εφαρμογή της Πρότασης 5.8, διότι η μέγιστη τιμή της f στο $[a, b]$ είναι το $B = f(b)$

και η ελάχιστη τιμή της είναι το $A = f(a)$.

Επίσης, είναι σαφές ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $[A, B]$ με σύνολο τιμών το $[a, b]$ και απομένει να αποδείξουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής στο $[A, B]$.

Ας υποθέσουμε ότι η f^{-1} δεν είναι συνεχής σε κάποιο σημείο του διαστήματος $[A, B]$. Τότε από το συμπέρασμα στο τέλος της ενότητας 5.4 αν το σημείο ασυνέχειας είναι εσωτερικό του $[A, B]$, καθώς και από το συμπέρασμα της άσκησης 5.17 αν το σημείο ασυνέχειας είναι άκρο του $[A, B]$, συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποιο διάστημα θετικού μήκους το οποίο δεν περιέχει καμία τιμή της f^{-1} , αλλά υπάρχουν τιμές της f^{-1} αριστερά του και δεξιά του. Τότε, όμως, το σύνολο τιμών της f^{-1} δεν θα μπορούσε να είναι ολόκληρο το διάστημα $[a, b]$. Άρα η f^{-1} είναι συνεχής στο $[A, B]$.

(ii) Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο (a, b) . Παρατηρήστε το αριστερό από τα σχήματα 5.12.



Σχήμα 5.12

Από το Θεώρημα 4.1 προκύπτει ότι υπάρχουν τα όρια $A = \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow b-} f(x)$ και, μάλιστα, ότι είναι, αντιστοίχως, (το μέγιστο) κάτω φράγμα και (το ελάχιστο) άνω φράγμα της f στο (a, b) . Δηλαδή, ισχύει $A \leq f(x) \leq B$ για κάθε $x \in (a, b)$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, συνεπάγεται ότι ισχύει $A < f(x) < B$ για κάθε $x \in (a, b)$, δηλαδή το σύνολο τιμών της f είναι υποσύνολο του (A, B) .

Αντιστρόφως, έστω $c \in (A, B)$, δηλαδή $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) < c < \lim_{x \rightarrow b-} f(x)$. Από την Πρόταση 4.8 συνεπάγεται ότι ισχύει $f(x) < c$ κοντά στο a και $c < f(x)$ κοντά στο b . Άρα υπάρχει κάποιο $a' \in (a, b)$ ώστε $f(a') < c$ και κάποιο $b' \in (a, b)$ ώστε $c < f(b')$. Τώρα, η f είναι συνεχής στο $[a', b']$, οπότε, ως άμεση συνέπεια του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής, το c είναι τιμή της f στο $[a', b']$, οπότε και στο (a, b) . Άρα το διάστημα (A, B) είναι υποσύνολο του συνόλου τιμών της f .

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι ίσο με το (A, B) .

Άρα η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο (A, B) με σύνολο τιμών το (a, b) και η συνέχειά της αποδεικνύεται όπως στο (i).

(iii) Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[a, b)$ και $f(a) = A$. Τώρα παρατηρήστε το δεξιό από τα σχήματα 5.12.

Από το Θεώρημα 4.1 συνεπάγεται ότι υπάρχει το όριο $B = \lim_{x \rightarrow b-} f(x)$ και ότι είναι (το ελάχιστο) άνω φράγμα της f στο $[a, b)$. Δηλαδή, ισχύει $A \leq f(x) \leq B$ για κάθε $x \in [a, b)$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, συνεπάγεται ότι ισχύει $A \leq f(x) < B$ για κάθε $x \in [a, b)$, δηλαδή το σύνολο τιμών της f είναι υποσύνολο του $[A, B)$.

Αντιστρόφως, έστω $c \in [A, B)$, δηλαδή $f(a) \leq c < \lim_{x \rightarrow b-} f(x)$. Από την Πρόταση 4.8 συνεπάγεται ότι ισχύει $c < f(x)$ κοντά στο b . Άρα υπάρχει κάποιο $b' \in (a, b)$ ώστε $c < f(b')$. Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b']$, οπότε από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής συνεπάγεται ότι το c είναι τιμή

της f στο $[a, b']$, οπότε και στο $[a, b)$. Άρα το διάστημα $[A, B)$ είναι υποσύνολο του συνόλου τιμών της f .

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι ίσο με το $[A, B)$.

Άρα η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $[A, B)$ με σύνολο τιμών το $[a, b)$ και η συνέχειά της αποδεικνύεται όπως στο (i).

(iv) Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του (iii).

Οι αλλαγές οι οποίες πρέπει να γίνουν στην περίπτωση κατά την οποία η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα είναι προφανείς. $\square$

Μία απλή γεωμετρική αιτιολόγηση της συνέχειας της αντίστροφης συνάρτησης είναι η εξής. Λόγω συνέχειας της f , το γράφημά της είναι μία καμπύλη. Επειδή το γράφημα της f^{-1} είναι το συμμετρικό του γραφήματος της f ως προς την κύρια διαγώνιο των καρτεσιανών αξόνων, είναι και αυτό μία καμπύλη. Άρα η f^{-1} είναι συνεχής.

Παράδειγμα 5.58. Έστω η $y = f(x) = 2x^2 + 1$ στο διάστημα $(1, 3)$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(1, 3)$ και $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = 19$. Επομένως, το σύνολο τιμών της f το οποίο αντιστοιχεί στο διάστημα $(1, 3)$ είναι το διάστημα $(3, 19)$. Επίσης, η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $(3, 19)$ και έχει σύνολο τιμών το $(1, 3)$. Αυτά και, κυρίως, το ότι η f^{-1} είναι συνεχής, μπορούμε να τα επιβεβαιώσουμε αφού βρούμε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης: $x = f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{y-1}{2}}$.

Παράδειγμα 5.59. Έστω η $y = f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ στο $(1, +\infty)$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(1, +\infty)$ και είναι $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. Άρα το σύνολο τιμών της f το οποίο αντιστοιχεί στο $(1, +\infty)$ είναι το $(1, +\infty)$. Ακόμη, η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο διάστημα $(1, +\infty)$ και έχει σύνολο τιμών το $(1, +\infty)$. Ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης είναι $x = f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-1}$.

Παράδειγμα 5.60. Έστω η $y = f(x) = \log \frac{1}{x}$ στο $[1, +\infty)$.

Είναι $f(1) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. Επειδή η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[1, +\infty)$, το σύνολο τιμών της το οποίο αντιστοιχεί στο $[1, +\infty)$ είναι το $(-\infty, 0]$. Η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και έχει σύνολο τιμών το $[1, +\infty)$. Ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης είναι $x = f^{-1}(y) = e^{-y}$.

Παράδειγμα 5.61. Η $y = p(x) = x^3 + x$ είναι συνεχής και, με στοιχειώδη τρόπο, αποδεικνύεται ότι είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty$, συνεπάγεται ότι το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty, +\infty)$. Αυτό το γνωρίζαμε και από την Πρόταση 5.9, διότι η p είναι πολυωνυμική συνάρτηση περιττού βαθμού. Άρα η αντίστροφη συνάρτηση p^{-1} είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής με πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$.

Παρατηρήστε ότι, όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα, δεν είναι ανάγκη να βρούμε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης p^{-1} για να δούμε αν είναι συνεχής: αρκεί η αναφορά στην Πρόταση 5.10. Μάλιστα, είναι σχετικά δύσκολο να βρούμε τον τύπο της αντίστροφης της συγκεκριμένης συνάρτησης.

Παράδειγμα 5.62. Η $y = f(x) = -xe^x + 1$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[0, +\infty)$. Επειδή $f(0) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, το αντίστοιχο σύνολο τιμών είναι το $(-\infty, 1]$ και η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής με πεδίο ορισμού το $(-\infty, 1]$ και σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$.

Όπως στο παράδειγμα 5.61, δεν είναι ανάγκη να βρούμε τον τύπο της f^{-1} για να δούμε αν είναι συνεχής. Μάλιστα, τώρα είναι αδύνατον να βρεθεί ο τύπος της f^{-1} , αφού δεν λύνεται η εξίσωση $-xe^x + 1 = y$ με άγνωστο το x .

Ακολουθούν μερικά πιο σημαντικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 5.63. Τα περισσότερα από όσα θα γράψουμε παρακάτω τα έχουμε δει στον Ορισμό 2.16 των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων: τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών τους, καθώς και τη μονοτονία τους. Το ουσιαστικά νέο, το οποίο προκύπτει ως συνέπεια της Πρότασης 5.10, είναι η *συνέχεια* αυτών των συναρτήσεων.

(i) Η $y = \cos x$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[0, \pi]$. Επειδή $\cos 0 = 1$ και $\cos \pi = -1$, το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο $[0, \pi]$ είναι το $[-1, 1]$. Ορίζεται, λοιπόν, η αντίστροφη συνάρτηση τόξο συνημιτόνου, την οποία έχουμε συμβολίσει $x = \arccos y$, και είναι *συνεχής* και γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της $[-1, 1]$ με σύνολο τιμών το $[0, \pi]$.

(ii) Η $y = \sin x$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Επειδή $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ και $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ είναι το $[-1, 1]$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση τόξο ημιτόνου, την οποία έχουμε συμβολίσει $x = \arcsin y$, και είναι *συνεχής* και γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της $[-1, 1]$ με σύνολο τιμών το $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(iii) Η $y = \tan x$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}+} \tan x = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \tan x = +\infty$, το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ είναι το $(-\infty, +\infty)$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση τόξο εφαπτομένης, την οποία έχουμε συμβολίσει $x = \arctan y$, και είναι *συνεχής* και γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της $(-\infty, +\infty)$ και έχει σύνολο τιμών το $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Επίσης, βάσει της Πρότασης 5.10, το σύνολο τιμών της $x = \arctan y$ είναι το διάστημα $(\lim_{y \rightarrow -\infty} \arctan y, \lim_{y \rightarrow +\infty} \arctan y)$. Συγκρίνοντας αυτό το διάστημα με το διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, βρίσκουμε τα όρια:

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \arctan y = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \arctan y = \frac{\pi}{2}.$$

(iv) Η $y = \cot x$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(0, \pi)$ με $\lim_{x \rightarrow 0+} \cot x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pi-} \cot x = -\infty$. Άρα το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί στο $(0, \pi)$ είναι το $(-\infty, +\infty)$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση τόξο συνεφαπτομένης, την οποία έχουμε συμβολίσει $x = \operatorname{arccot} y$, και είναι *συνεχής* και γνησίως φθίνουσα με πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $(0, \pi)$. Βάσει της Πρότασης 5.10, το σύνολο τιμών της $x = \operatorname{arccot} y$ είναι το διάστημα $(\lim_{y \rightarrow +\infty} \operatorname{arccot} y, \lim_{y \rightarrow -\infty} \operatorname{arccot} y)$. Συγκρίνοντας αυτό το διάστημα με το διάστημα $(0, \pi)$, βρίσκουμε τα όρια:

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \operatorname{arccot} y = \pi, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \operatorname{arccot} y = 0.$$

Ασκήσεις

5.37. Ποια είναι τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων $-2x^3 + x^2 - 5x + 6$, $x^4 - 2x^2 + 7$, $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$;

5.38. Έστω πολωνυμική συνάρτηση $p(x) = a_N x^N + \dots + a_1 x + a_0$. Αν $a_0 a_N < 0$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi > 0$ ώστε $p(\xi) = 0$.

5.39. Αποδείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως μονότονες, βρείτε τα αντίστοιχα σύνολα τιμών και βγάλτε συμπεράσματα για τις αντίστοιχες αντίστροφες συναρτήσεις: πεδίο ορισμού, σύνολο τιμών, μονοτονία, συνέχεια. Τέλος, αν είναι δυνατόν, βρείτε τους τύπους των αντίστροφων συναρτήσεων και ελέγξτε τα προηγούμενα συμπεράσματά σας.

(i) $x^2 + 2x$, στο $[0, 1]$.

(ii) $\frac{1}{x}$, στο $(0, 1]$.

(iii) $\frac{1}{x^2+1}$, στο $[0, +\infty)$.

(iv) $x + \frac{1}{x}$, στο $(-\infty, -1]$, στο $[-1, 0)$, στο $(0, 1]$, και στο $[1, +\infty)$.

(v) $e^x + x$ και $\frac{1}{1+e^{2x}}$, στο $(-\infty, +\infty)$.

5.40. Αποδείξτε ότι η $f(x) = \frac{3}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{5}{x-3}$ είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$ και $(3, +\infty)$. Υπολογίστε το αντίστοιχο σύνολο τιμών της f για καθένα από τα διαστήματα αυτά. Πόσες ακριβώς λύσεις έχει η εξίσωση $f(x) = c$, όπου c είναι οποιοσδήποτε αριθμός; Να αντιπαραβάλετε με την άσκηση 5.24.

5.41. Έστω η $f(x) = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})$ με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$.

(i) Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα, ότι το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, +\infty)$ και βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} . Αποδείξτε ότι ισχύει $f^{-1}(y) - \frac{1}{f^{-1}(y)} = 2y$ για κάθε $y \in (-\infty, +\infty)$.

(ii) Αν για κάποια h συνεχή στο $(-\infty, +\infty)$, με μία τουλάχιστον θετική τιμή, ισχύει $h(y) - \frac{1}{h(y)} = 2y$ για κάθε $y \in (-\infty, +\infty)$, αποδείξτε ότι $h(y) = f^{-1}(y)$ για κάθε $y \in (-\infty, +\infty)$.

Να επαναλάβετε τα προηγούμενα για την $f(x) = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty, 0)$.

Σχεδιάστε τα γραφήματα όλων των συναρτήσεων της άσκησης.

5.42. Έστω η $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})$ με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$.

(i) Αποδείξτε ότι ισχύει $f(\frac{1}{x}) = f(x)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, οπότε η συνάρτηση δεν είναι ένα-προς-ένα.

(ii) Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$, ότι το αντίστοιχο σύνολο τιμών είναι το $[1, +\infty)$ και βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση g_1 με πεδίο ορισμού το $[1, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $[1, +\infty)$.

(iii) Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$, ότι το αντίστοιχο σύνολο τιμών είναι το $[1, +\infty)$ και βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση g_2 με πεδίο ορισμού το $[1, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $(0, 1]$.

(iv) Αποδείξτε ότι ισχύει $g_1(y) + \frac{1}{g_1(y)} = 2y = g_2(y) + \frac{1}{g_2(y)}$ για κάθε $y \in [1, +\infty)$.

(v) Αν για κάποια h συνεχή στο $[1, +\infty)$ ισχύει $h(y) + \frac{1}{h(y)} = 2y$ για κάθε $y \in [1, +\infty)$, αποδείξτε ότι είτε ισχύει $h(y) = g_1(y)$ για κάθε $y \in [1, +\infty)$ είτε ισχύει $h(y) = g_2(y)$ για κάθε $y \in [1, +\infty)$.

Να επαναλάβετε τα προηγούμενα για την $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty, 0)$.

Σχεδιάστε τα γραφήματα όλων των συναρτήσεων της άσκησης.

5.43. Έστω η $f(x) = x^3 - 3x$.

(i) Αποδείξτε, με στοιχειώδη τρόπο, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

(ii) Θεωρήστε τους περιορισμούς f_1, f_2, f_3 της f σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1]$, $[-1, 1]$, $[1, +\infty)$, αντιστοίχως. Τι γνωρίζουμε για τις f_1, f_2, f_3 σε σχέση με τα: πεδίο ορισμού, σύνολο τιμών, μονοτονία και συνέχεια;

(iii) Αν g_1, g_2, g_3 είναι οι αντίστροφες των f_1, f_2, f_3 , αντιστοίχως, τι γνωρίζουμε γι' αυτές σε σχέση με τα: πεδίο ορισμού, σύνολο τιμών, μονοτονία, και συνέχεια;

(iv) Αποδείξτε ότι, αν g είναι οποιαδήποτε από τις g_1, g_2, g_3 , τότε ισχύει $g(y)^3 - 3g(y) = y$ για κάθε y στο πεδίο ορισμού της.

(v) Έστω διάστημα I και g συνεχής στο I με την ιδιότητα ότι ισχύει $g(y)^3 - 3g(y) = y$ για κάθε $y \in I$. Αν $I = [-2, +\infty)$, αποδείξτε ότι η g ταυτίζεται με την g_3 . Αν $I = (-\infty, 2]$, αποδείξτε ότι η g ταυτίζεται με την g_1 . Αν, όμως, $I = [-2, 2]$, αποδείξτε ότι η g ταυτίζεται στο I είτε με την g_1 , είτε με την g_2 , είτε με την g_3 .

Σχεδιάστε τα γραφήματα όλων των συναρτήσεων της άσκησης.

5.44. Οι συναρτήσεις $\cosh : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\sinh : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\tanh : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και $\coth : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους

$$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad y = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad y = \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

ονομάζονται **υπερβολικό συνημίτονο**, **υπερβολικό ημίτονο**, **υπερβολική εφαπτόμενη** και **υπερβολική συνεφαπτόμενη**, αντιστοίχως. Οι τέσσερις αυτές συναρτήσεις ονομάζονται **υπερβολικές συναρτήσεις** και είναι, προφανώς, συνεχείς.

(i) Αποδείξτε ότι η $\cosh$ είναι άρτια και ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Αποδείξτε ότι το $[1, +\infty)$ είναι το σύνολο τιμών της $\cosh$ το οποίο αντιστοιχεί

και στα δύο διαστήματα, $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$.

Η $\cosh : [0, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$ έχει αντίστροφη συνάρτηση η οποία ονομάζεται **τόξο υπερβολικού συνημιτόνου** και συμβολίζεται $\operatorname{arccosh} : [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$. Αποδείξτε ότι ο τύπος της είναι

$$x = \operatorname{arccosh} y = \log(y + \sqrt{y^2 - 1}).$$

Σχεδιάστε το γράφημα της $\cosh$ και της $\operatorname{arccosh}$.

(ii) Αποδείξτε ότι η $\sinh x$ είναι περιττή και γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$. Αποδείξτε ότι το $(-\infty, +\infty)$ είναι το σύνολο τιμών της $\sinh x$ το οποίο αντιστοιχεί στο $(-\infty, +\infty)$.

Η $\sinh : (-\infty, +\infty) \rightarrow (-\infty, +\infty)$ έχει αντίστροφη συνάρτηση η οποία ονομάζεται **τόξο υπερβολικού ημιτόνου** και συμβολίζεται $\operatorname{arcsinh} : (-\infty, +\infty) \rightarrow (-\infty, +\infty)$. Αποδείξτε ότι ο τύπος της είναι

$$x = \operatorname{arcsinh} y = \log(y + \sqrt{y^2 + 1}).$$

Σχεδιάστε το γράφημα της $\sinh$ και της $\operatorname{arcsinh}$.

(iii) Αποδείξτε ότι η $\tanh$ είναι περιττή και γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$. Αποδείξτε ότι το $(-1, 1)$ είναι το σύνολο τιμών της $\tanh$ το οποίο αντιστοιχεί στο $(-\infty, +\infty)$.

Η $\tanh : (-\infty, +\infty) \rightarrow (-1, 1)$ έχει αντίστροφη συνάρτηση η οποία ονομάζεται **τόξο υπερβολικής εφαπτομένης** και συμβολίζεται $\operatorname{arctanh} : (-1, 1) \rightarrow (-\infty, +\infty)$. Αποδείξτε ότι ο τύπος της είναι

$$x = \operatorname{arctanh} y = \frac{1}{2} \log \frac{1+y}{1-y}.$$

Σχεδιάστε το γράφημα της $\tanh$ και της $\operatorname{arctanh}$.

(iv) Αποδείξτε ότι η $\coth$ είναι περιττή και ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $(-\infty, -1)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $(1, +\infty)$. Αποδείξτε ότι η $\coth$ είναι ένα-προς-ένα στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Η $\coth : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \rightarrow (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ έχει αντίστροφη συνάρτηση η οποία ονομάζεται **τόξο υπερβολικής συνεφαπτομένης** και συμβολίζεται $\operatorname{arccoth} : (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Αποδείξτε ότι ο τύπος της είναι

$$x = \operatorname{arccoth} y = \frac{1}{2} \log \frac{y+1}{y-1}.$$

Σχεδιάστε το γράφημα της $\coth$ και της $\operatorname{arccoth}$.

(v) Παρατηρήστε ότι οι δύο συναρτήσεις $\operatorname{arctanh}$ και $\operatorname{arccoth}$ σχηματίζουν *μία* συνάρτηση με τύπο

$$x = \frac{1}{2} \log \left| \frac{y+1}{y-1} \right|,$$

με πεδίο ορισμού το $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$. Σχεδιάστε το γράφημά της.

(vi) Αποδείξτε τις παρακάτω σχέσεις. Προσέξτε την ομοιότητα με ανάλογες σχέσεις ανάμεσα στις αντίστοιχες τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}.$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y, \quad \sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y.$$

$$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2 \cosh^2 x - 1 = 1 + 2 \sinh^2 x, \quad \sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x.$$

$$\cosh(2x) = \frac{1+\tanh^2 x}{1-\tanh^2 x}, \quad \sinh(2x) = \frac{2 \tanh x}{1-\tanh^2 x}, \quad \tanh(2x) = \frac{2 \tanh x}{1+\tanh^2 x}, \quad \coth(2x) = \frac{1+\tanh^2 x}{2 \tanh x}.$$

Η ομοιότητα ανάμεσα σε κάποιες ιδιότητες, κυρίως αλγεβρικού τύπου, των τριγωνομετρικών και των υπερβολικών συναρτήσεων εξηγείται αν θυμηθούμε την ταυτότητα $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ από τη στοιχειώδη μιγαδική ανάλυση. Από αυτήν παίρνουμε την $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$ και, αν προσθέσουμε και αφαιρέσουμε τις δύο ταυτότητες, βρίσκουμε

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \tan x = \frac{1}{i} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}}, \quad \cot x = i \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}}.$$

Η ομοιότητα αυτών των τύπων με τους τύπους ορισμού των υπερβολικών συναρτήσεων είναι εύγλωττη².

5.45. Θεωρούμε οποιαδήποτε εξίσωση της μορφής

$$p_N(x)y^N + \cdots + p_2(x)y^2 + p_1(x)y + p_0(x) = 0,$$

με άγνωστο το y , όπου $N \geq 1$, όπου καθένα από τα $p_N(x), \dots, p_2(x), p_1(x), p_0(x)$ είναι πολυώνυμο και όπου το $p_N(x)$ δεν είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

Έστω συνάρτηση $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ορισμένη και συνεχής σε ένα διάστημα I . Αν η g επαληθεύει την παραπάνω εξίσωση, δηλαδή αν ισχύει

$$p_N(x)g(x)^N + \cdots + p_2(x)g(x)^2 + p_1(x)g(x) + p_0(x) = 0$$

για κάθε $x \in I$, τότε η g χαρακτηρίζεται **αλγεβρική συνάρτηση** στο διάστημα I .

(i) Έστω περιττό $n \in \mathbb{N}$. Η $g(x) = \begin{cases} \sqrt[n]{x}, & \text{αν } x \geq 0, \\ -\sqrt[n]{-x}, & \text{αν } x < 0, \end{cases}$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και σύνολο

τιμών το $(-\infty, +\infty)$ είναι η αντίστροφη της x^n με πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$. Αποδείξτε ότι η $g(x)$ επαληθεύει την εξίσωση $y^n - x = 0$ στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$, οπότε είναι αλγεβρική στο διάστημα αυτό.

(ii) Έστω άρτιο $n \in \mathbb{N}$. Όπως στο (i), αποδείξτε ότι η $g(x) = \sqrt[n]{x}$ με πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$ είναι αλγεβρική στο διάστημα $[0, +\infty)$. Ποια απλή εξίσωση, με συντελεστές πολυώνυμα του x , επαληθεύει η $g(x)$;

(iii) Αποδείξτε ότι κάθε ρητή συνάρτηση $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ είναι αλγεβρική σε οποιοδήποτε διάστημα ορίζεται. Ποια απλή εξίσωση, με συντελεστές πολυώνυμα του x , επαληθεύει η $r(x)$;

(iv) Έστω $n \in \mathbb{N}$ και ρητή συνάρτηση $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$. Αποδείξτε ότι η $g(x) = (r(x))^{\frac{1}{n}}$ είναι αλγεβρική σε οποιοδήποτε διάστημα ορίζεται. Ποια απλή εξίσωση, με συντελεστές πολυώνυμα του x , επαληθεύει η $g(x)$;

(v) Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$, $\sqrt{\frac{x}{x-1}} + \sqrt{x+1}$, $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{3x+1}-4}}$ είναι αλγεβρικές, βρίσκοντας συγκεκριμένες εξισώσεις, με συντελεστές πολυώνυμα του x , οι οποίες επαληθεύονται από αυτές τις συναρτήσεις. Ποια είναι τα πεδία ορισμού τους;

Οι συναρτήσεις οι οποίες δεν είναι αλγεβρικές χαρακτηρίζονται **υπερβατικές** συναρτήσεις. Παραδείγματα υπερβατικών συναρτήσεων είναι: οι δυνάμεις με άρρητο εκθέτη, οι εκθετικές, οι λογαριθμικές, οι τριγωνομετρικές και οι αντίστροφες τριγωνομετρικές.

5.8 Βιβλιογραφία

Βασική βιβλιογραφία

- Anton, H. (1984). *Calculus with Analytic Geometry*. Wiley.
- Apostol, T. (1967). *Calculus, Vol I*. Wiley.
- Courant, R. (1988). *Differential and Integral Calculus, Vol I*. Wiley.
- Courant, R., John, F. (1989). *Introduction to Calculus and Analysis, Vol I*. Springer.
- Hardy, G. (2008). *A Course of Pure Mathematics*. Cambridge Univ. Press.
- Landau, E. (2001). *Differential and Integral Calculus*. American Math. Society & Chelsea.
- Nikolsky, S. (1977). *A Course of Mathematical Analysis, Vol I*. Mir Publishers.
- Smirnov, V. I. (1964). *A Course of Higher Mathematics, Vol I*. Pergamon Press.
- Spiegel, M. (1963). *Schaum's Outline of Advanced Calculus*. McGraw Hill.
- Spivak, M. (1994). *Calculus*. Cambridge Univ. Press.
- Thomas, G. (2018). *Calculus*. Pearson.

²Θα δούμε και άλλες ομοιότητες στην άσκηση 6.30 του κεφαλαίου 6.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

6.1 Σύνοψη

Σε αυτό το κεφάλαιο ορίζουμε και μελετάμε την έννοια της παραγώγου συνάρτησης, γνωστή και αυτή εν μέρει από το Λύκειο, αφού πρώτα δούμε τη σύνδεση με τρία απλά γεωμετρικά/φυσικά προβλήματα: το πρόβλημα της εφαπτόμενης ευθείας σε καμπύλη, τη στιγμιαία ταχύτητα ευθύγραμμης κίνησης και τη σημειακή πυκνότητα μάζας ευθύγραμμης ράβδου. Μελετάμε τις παραγώγους μερικών απλών συναρτήσεων: δυνάμεις με ρητό εκθέτη, ημίτονο και συνημίτονο. Μελετάμε τη σχέση ανάμεσα στις (πλευρικές) παραγώγους και στις εφαπτόμενες ημιευθείες στο γράφημα συνάρτησης και δίνουμε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στο γράφημα (όταν αυτή υπάρχει). Αποδεικνύουμε τις βασικές ιδιότητες των παραγώγων: αλγεβρικές, κανόνας αλυσίδας, κανόνας αντίστροφης συνάρτησης, και βάσει αυτών βρίσκουμε τις παραγώγους των τριγωνομετρικών και αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Κατόπιν βρίσκουμε τις παραγώγους των υπόλοιπων βασικών συναρτήσεων: λογαριθμική, εκθετική, δυνάμεις με άρρητο εκθέτη. Μελετάμε γενικότερες καμπύλες στο επίπεδο και στον χώρο και τις διανυσματικές παραγώγους τους. Αποδεικνύουμε τα βασικά θεωρήματα για παραγώγους: Fermat, Rolle, Μέσης Τιμής (Lagrange και Cauchy). Μελετάμε τον ρόλο της παραγώγου στη μελέτη συνάρτησης: εύρεση ακροτάτων και διαστημάτων μονοτονίας. Μελετάμε τον ρόλο της παραγώγου στην απόδειξη ισοτήτων και ανισοτήτων και τον ρόλο της δεύτερης παραγώγου στη μελέτη συνάρτησης: εύρεση διαστημάτων κυρτότητας και κοιλότητας και σημείων καμπής. Αποδεικνύουμε τους δύο κανόνες l' Hopital για τον υπολογισμό απροσδιόριστων μορφών ορίων. Ορίζουμε την έννοια της τάξης μεγέθους συνάρτησης σε σημείο, και την έννοια της ασυμπτωτικής ισότητας συναρτήσεων σε σημείο. Αποδεικνύουμε το πρώτο Θεώρημα Taylor. Τέλος, μελετάμε την επαναληπτική διαδικασία του Newton για την επίλυση εξισώσεων.

Προαπαιτούμενη γνώση: Μαθηματικά του Λυκείου, καθώς και τα προηγούμενα κεφάλαια.

6.2 Ένα γεωμετρικό και δύο φυσικά προβλήματα

A. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία συνεχή συνάρτηση f ορισμένη σε κάποιο διάστημα (a, b) και ας θεωρήσουμε το γράφημά της το οποίο παρουσιάζεται ως μία καμπύλη στο επίπεδο. Θεωρούμε και ένα σημείο αυτής της καμπύλης, το $(\xi, f(\xi))$ για κάποιο $\xi \in (a, b)$, και σκοπεύουμε να βρούμε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο αυτό και εφάπτεται, στο ίδιο σημείο, στην καμπύλη. Παρατηρήστε το σχήμα 6.1. Γνωρίζουμε ότι η εφαπτόμενη ευθεία, ας την ονομάσουμε l , περιέχει το σημείο $(\xi, f(\xi))$ και για να την προσδιορίσουμε πρέπει να βρούμε είτε ένα ακόμη σημείο της είτε την κλίση της. Θεωρούμε τώρα ένα δεύτερο *μεταβλητό* σημείο $(x, f(x))$ της καμπύλης, όπου $x \neq \xi$. Όταν το x μεταβάλλεται προσεγγίζοντας το ξ , τότε η αντίστοιχη *μεταβλητή* ευθεία, ας την ονομάσουμε l_x , η οποία διέρχεται από τα σημεία $(\xi, f(\xi))$ και $(x, f(x))$, περιστρέφεται γύρω από το σταθερό της σημείο $(\xi, f(\xi))$, ακολουθώντας την κίνηση του μεταβλητού σημείου $(x, f(x))$,

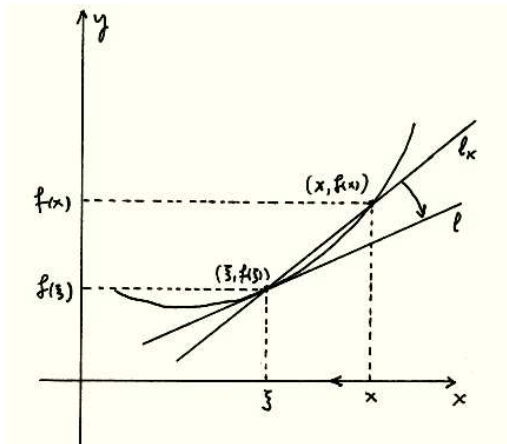
Παπαδημητράκης, Μ. (2024) «Απειροστικός Λογισμός».

Αθήνα: Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. <http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-1011>

 Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Μη Εμπορική Χρήση - Παρόμοια Διανομή 4.0

και προσεγγίζει την εφαπτόμενη ευθεία l . Επομένως, η κλίση της μεταβλητής ευθείας l_x προσεγγίζει την κλίση της σταθερής ευθείας l . Όμως, η κλίση της l_x είναι ίση με τον λόγο $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$. Άρα

$$\text{κλίση της } l = \lim_{x \rightarrow \xi} \text{κλίση της } l_x = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}.$$



Σχήμα 6.1

Β. Έστω ότι ένα όχημα κινείται πάνω σε έναν ευθύ δρόμο. Αν μετρήσουμε τις αποστάσεις $s(t_1)$ και $s(t_2)$ του οχήματος από κάποιο σταθερό σημείο της ευθείας σε δύο χρονικές στιγμές t_1 και t_2 , τότε η μέση ταχύτητα ανάμεσα στις δύο αυτές χρονικές στιγμές είναι ίση με $\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$. Ποια είναι, όμως, η *στιγμιαία* ταχύτητα σε μία χρονική στιγμή τ ; Υποθέτουμε ότι η στιγμιαία ταχύτητα του οχήματος δεν παρουσιάζει απότομες αλλαγές σε πολύ μικρά χρονικά διαστήματα, οπότε η στιγμιαία ταχύτητα τη στιγμή τ μπορεί να προσεγγιστεί από τη μέση ταχύτητα ανάμεσα στη στιγμή τ και σε μία πολύ κοντινή χρονική στιγμή t . Δηλαδή η μέση ταχύτητα ανάμεσα στις χρονικές στιγμές τ και t προσεγγίζει τη στιγμιαία ταχύτητα τη χρονική στιγμή τ , όταν το t προσεγγίζει το τ :

$$\text{στιγμιαία ταχύτητα τη χρονική στιγμή } \tau = \lim_{t \rightarrow \tau} \frac{s(t)-s(\tau)}{t-\tau}.$$

Γ. Η *γραμμική πυκνότητα* μίας ευθύγραμμης ράβδου, φτιαγμένης από ομοιογενές υλικό και υποθέτοντας ότι σε κάθε σημείο της το πάχος της είναι αμελητέο, ορίζεται ως ο λόγος $d = \frac{m}{l}$, όπου m είναι η μάζα της ράβδου και l το μήκος της. Αν η ράβδος είναι φτιαγμένη από ανομοιογενές υλικό, τότε το $d = \frac{m}{l}$ είναι η μέση γραμμική πυκνότητα της ράβδου. Αν πάρουμε οποιοδήποτε σημείο A της ράβδου και κάποιο πολύ κοντινό του σημείο B και μετρήσουμε τη μέση γραμμική πυκνότητα του τμήματος της ράβδου ανάμεσα στα A και B , τότε η *σημειακή γραμμική πυκνότητα* στο σημείο A είναι το όριο αυτής της μέσης γραμμικής πυκνότητας, όταν το B προσεγγίζει το A . Φυσικά, αν το υλικό της ράβδου είναι ομοιογενές, τότε η σημειακή γραμμική πυκνότητα είναι ίδια σε κάθε σημείο της και ίση με τη μέση γραμμική πυκνότητά της.

Για να εκφράσουμε με μαθηματικούς όρους την έννοια της σημειακής γραμμικής πυκνότητας, θεωρούμε την ευθεία της ράβδου ως x -άξονα και ταυτίζουμε τη ράβδο με κάποιο διάστημα $[a, b]$. Κατόπιν συμβολίζουμε $m(x)$ τη μάζα του τμήματος $[a, x]$ της ράβδου για $a \leq x \leq b$. Τότε η μέση γραμμική πυκνότητα του τμήματος $[\xi, x]$ της ράβδου είναι ίση με $\frac{m(x)-m(\xi)}{x-\xi}$, οπότε η σημειακή γραμμική πυκνότητα στο σημείο ξ είναι:

$$\text{σημειακή γραμμική πυκνότητα στο σημείο } \xi = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{m(x)-m(\xi)}{x-\xi}.$$

Ασκήσεις

6.1. Γράψτε σε μορφή ορίου

- τη στιγμιαία επιτάχυνση ενός οχήματος το οποίο κινείται σε ευθύ δρόμο.
- τη στιγμιαία ταχύτητα και τη στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα ενός οχήματος το οποίο κινείται σε κυκλικό δρόμο και βρείτε τη σχέση ανάμεσα στις δύο αυτές ταχύτητες.

6.3 Παράγωγος συνάρτησης

Δεν είναι σύμπτωση η ομοιότητα ανάμεσα στον τύπο της κλίσης της εφαπτόμενης ευθείας, στον τύπο της στιγμιαίας ταχύτητας και στον τύπο της σημειακής γραμμικής πυκνότητας. Τα προβλήματα είναι διαφορετικά αλλά η έννοια η οποία κρύβεται πίσω από αυτά είναι κοινή: **ρυθμός μεταβολής**, του ύψους $f(x)$ ως προς την οριζόντια μετατόπιση x στο πρώτο πρόβλημα, της απόστασης $s(t)$ ως προς τον χρόνο t στο δεύτερο πρόβλημα και της μάζας $m(x)$ ως προς το μήκος x στο τρίτο πρόβλημα. Το πρόβλημα του υπολογισμού του ρυθμού μεταβολής μίας εξαρτημένης μεταβλητής ποσότητας ως προς μία ανεξάρτητη μεταβλητή ποσότητα καταλήγει πάντοτε σε έναν ανάλογο τύπο.

Ορισμός 6.1. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω ότι το $\xi \in A$ είναι σημείο συσσώρευσης του A . Αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi},$$

τότε λέμε ότι η f έχει παράγωγο στο ξ και το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο ξ** και το συμβολίζουμε $f'(\xi)$ ή $\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=\xi}$ ή $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=\xi}$. Δηλαδή,

$$f'(\xi) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=\xi} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=\xi} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}.$$

Το σύμβολο $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=\xi}$ προϋποθέτει ότι έχουμε συμβολίσει y την εξαρτημένη μεταβλητή: $y = f(x)$.

Αν η $f'(\xi)$ είναι αριθμός, δηλαδή όχι $\pm\infty$, τότε λέμε ότι η f είναι **παραγωγίσιμη** στο ξ .

Ορισμός 6.2. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω $A' \subseteq A$. Αν η f έχει παράγωγο ή είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $\xi \in A'$, τότε λέμε ότι **έχει παράγωγο στο A'** ή ότι **είναι παραγωγίσιμη στο A'** , αντιστοίχως.

Παράδειγμα 6.1. Η x^2 είναι παραγωγίσιμη στο 1 με παράγωγο στο 1 ίση με

$$\left. \frac{dx^2}{dx} \right|_{x=1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

Παράδειγμα 6.2. Η $\sqrt[3]{x}$ είναι ορισμένη στο $[0, +\infty)$ και έχει παράγωγο στο 0 ίση με

$$\left. \frac{d\sqrt[3]{x}}{dx} \right|_{x=0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2} = +\infty.$$

Επομένως, η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Παράδειγμα 6.3. Η $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0, \end{cases}$ είναι ορισμένη στο $(-\infty, +\infty)$ και έχει παράγωγο στο 0 ίση με

$$f'(0) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Αρα η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Από τα συμπεράσματα της ενότητας 6.2 είναι φανερό ότι η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στο γράφημα μίας συνάρτησης f στο σημείο του $(\xi, f(\xi))$ είναι ίση με την παράγωγο $f'(\xi)$ της συνάρτησης. Επίσης, η στιγμιαία ταχύτητα τη χρονική στιγμή t ενός οχήματος το οποίο κινείται ευθύγραμμα ισούται με την παράγωγο $s'(t)$ της απόστασης $s(t)$ του οχήματος από ένα σταθερό σημείο της διαδρομής. Τέλος, η σημειακή γραμμική πυκνότητα του υλικού μίας ευθύγραμμης ράβδου στο σημείο της ξ ισούται με την παράγωγο $m'(\xi)$ της μάζας $m(x)$ του τμήματος της ράβδου από το σημείο της a , το αριστερό άκρο, μέχρι το σημείο της x .

Μερικές φορές το όριο $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$, με το οποίο ορίζεται η παράγωγος, το γράφουμε με έναν λίγο διαφορετικό, αλλά ισοδύναμο, τρόπο. Κάνουμε την απλή αλλαγή μεταβλητής $h = x - \xi$, οπότε

$$f'(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}.$$

Το $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ με το οποίο ορίζεται η παράγωγος είναι πάντοτε απροσδιόριστη μορφή, διότι το όριο του παρονομαστή είναι ίσο με 0. Ειδικότερα, αν η f είναι συνεχής στο ξ , τότε και το όριο του αριθμητή είναι ίσο με 0 και προκύπτει απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

Ας κάνουμε τώρα ένα σχόλιο για το σύμβολο $\frac{dy}{dx}$. Αν συμβολίσουμε $\Delta x = x - \xi$, δηλαδή τη διαφορά δύο τιμών της ανεξάρτητης μεταβλητής, και $\Delta y = y - \eta = f(x) - f(\xi)$, δηλαδή τη διαφορά των αντίστοιχων τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής, τότε ο λόγος διαφορών $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ γράφεται $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Σε αυτήν την παράσταση ο παρονομαστής είναι μία *μη-μηδενική* αλλά αρκετά μικρή ποσότητα, διότι το x προσεγγίζει το ξ παραμένοντας $\neq \xi$. Τα παλαιότερα χρόνια οι μαθηματικοί συνήθιζαν να θεωρούν μία, ανύπαρκτη στην πραγματικότητα, ποσότητα η οποία είναι *μικρότερη σε μέγεθος από κάθε μη-μηδενικό αριθμό, αλλά όχι κατ' ανάγκη μηδέν*, την ονόμαζαν **απειροστό μέγεθος** και τη συμβόλιζαν dx . Θεωρούσαν ότι η μεταβλητή ποσότητα Δx προσεγγίζει το απειροστό μέγεθος dx και, στην περίπτωση κατά την οποία η f είναι συνεχής στο ξ , ότι και η αντίστοιχη διαφορά $\Delta y = f(x) - f(\xi)$ προσεγγίζει το απειροστό μέγεθος dy . Επομένως, θεωρούσαν ότι ο λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ προσεγγίζει τον λόγο $\frac{dy}{dx}$. Πρέπει να τονιστεί ότι, για εμάς σήμερα, ο λόγος $\frac{dy}{dx}$ είναι *συμβολικός* και ότι δεν έχει πραγματική υπόσταση *λόγου αριθμών*, διότι η μόνη τέτοια υπόσταση θα ήταν η απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Θα δούμε, όμως, στα επόμενα ότι σε πολλές περιπτώσεις μπορούμε να χειριστούμε τον συμβολικό λόγο $\frac{dy}{dx}$ σαν να ήταν λόγος αριθμών, έχοντας έτσι την ευχέρεια να χρησιμοποιήσουμε απλές αλγεβρικές ιδιότητες των λόγων.

Εκτός από τον ορισμό της παραγώγου τον οποίο είδαμε, υπάρχουν μερικοί ακόμη σχετικοί ορισμοί.

Ορισμός 6.3. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω ότι το $\xi \in A$ είναι σημείο συσσώρευσης από δεξιά του ή από αριστερά του του A . Αν υπάρχει το αντίστοιχο $\lim_{x \rightarrow \xi+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ ή $\lim_{x \rightarrow \xi-} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$, τότε λέμε ότι η f έχει δεξιά ή αριστερή πλευρική παράγωγο στο ξ , το όριο αυτό ονομάζεται *δεξιά ή αριστερή πλευρική παράγωγος της f στο ξ* και το συμβολίζουμε $f'_+(\xi)$ ή $\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=\xi+}$ ή $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=\xi+}$. Δηλαδή,

$$f'_+(\xi) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=\xi+} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=\xi+} = \lim_{x \rightarrow \xi+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}.$$

Το σύμβολο $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=\xi\pm}$ προϋποθέτει ότι έχουμε συμβολίσει y την εξαρτημένη μεταβλητή: $y = f(x)$.

Ακολουθούν κάποιες παρατηρήσεις βασισμένες στη γενική σχέση του ορίου με το δεξιά και το αριστερό πλευρικό όριο.

Έστω ότι το $\xi \in A$ είναι σημείο συσσώρευσης από δεξιά του και από αριστερά του του πεδίου ορισμού A της f , για παράδειγμα όταν το A περιέχει ένα διάστημα (a, b) με $a < \xi < b$. Αν η f έχει παράγωγο στο ξ , τότε έχει δεξιά και αριστερή πλευρική παράγωγο στο ξ και αυτές οι πλευρικές παράγωγοι στο ξ είναι ίσες με την παράγωγο στο ξ , δηλαδή $f'_+(\xi) = f'_-(\xi) = f'(\xi)$. Αντιστρόφως, αν η f έχει δεξιά και αριστερή πλευρική παράγωγο στο ξ και αν αυτές είναι ίσες, τότε η f έχει παράγωγο στο ξ ίση με την κοινή τιμή των δύο πλευρικών παραγώγων. Αν το $\xi \in A$ είναι σημείο συσσώρευσης μόνο από αριστερά του του A , για παράδειγμα όταν το A περιέχει ένα διάστημα $(a, \xi]$ και του λείπει ένα διάστημα (ξ, b) , τότε δεν έχει νόημα η δεξιά πλευρική παράγωγος της f στο ξ και η παράγωγός της στο ξ ταυτίζεται με την αριστερή πλευρική παράγωγό της στο ξ , δηλαδή $f'_-(\xi) = f'(\xi)$. Ομοίως, αν το $\xi \in A$ είναι σημείο συσσώρευσης μόνο από δεξιά του του A , για παράδειγμα όταν το A περιέχει ένα διάστημα $[\xi, b)$ και του λείπει ένα διάστημα (a, ξ) , τότε δεν έχει νόημα η αριστερή πλευρική παράγωγος της f στο ξ και η παράγωγός της στο ξ ταυτίζεται με τη δεξιά πλευρική παράγωγό της στο ξ , δηλαδή $f'_+(\xi) = f'(\xi)$.

Παράδειγμα 6.4. Η $|x|$ ορίζεται στο $(-\infty, +\infty)$. Η δεξιά πλευρική παράγωγος της συνάρτησης στο 0 είναι

$$\left. \frac{d|x|}{dx} \right|_{x=0+} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} 1 = 1$$

και η αριστερή πλευρική παράγωγος στο 0 είναι

$$\left. \frac{d|x|}{dx} \right|_{x=0-} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} (-1) = -1.$$

Άρα δεν υπάρχει η παράγωγος της συνάρτησης στο 0.

Παράδειγμα 6.5. Η $\sqrt{|x|}$ είναι ορισμένη στο $(-\infty, +\infty)$ και έχει δεξιά πλευρική παράγωγο στο 0 ίση με

$$\left. \frac{d\sqrt{|x|}}{dx} \right|_{x=0+} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{|x|}-\sqrt{|0|}}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

και αριστερή πλευρική παράγωγο στο 0 ίση με

$$\left. \frac{d\sqrt{|x|}}{dx} \right|_{x=0-} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sqrt{|x|}-\sqrt{|0|}}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{-\sqrt{-x}} = -\infty.$$

Άρα δεν υπάρχει η παράγωγος της συνάρτησης στο 0.

Παράδειγμα 6.6. Η $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{αν } x \geq 0, \\ -\sqrt{-x}, & \text{αν } x \leq 0, \end{cases}$ είναι ορισμένη στο $(-\infty, +\infty)$ και έχει δεξιά πλευρική παράγωγο στο 0 ίση με

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{x}-0}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

και αριστερή πλευρική παράγωγο στο 0 ίση με

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-\sqrt{-x}-0}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{\sqrt{-x}} = +\infty.$$

Άρα υπάρχει η παράγωγος στο 0 και είναι ίση με $f'(0) = +\infty$.

Παράδειγμα 6.7. Η $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0, \end{cases}$ είναι ορισμένη στο $(-\infty, +\infty)$. Στο 0 η δεξιά πλευρική παράγωγος

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x \sin \frac{1}{x} - 0}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \sin \frac{1}{x}$$

δεν υπάρχει και η αριστερή πλευρική παράγωγος

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x \sin \frac{1}{x} - 0}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0-} \sin \frac{1}{x},$$

επίσης, δεν υπάρχει. Άρα η συνάρτηση δεν έχει καμία πλευρική παράγωγο στο 0.

Ορισμός 6.4. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Αν θεωρήσουμε το σύνολο A' όλων των $\xi \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη, δηλαδή όλων των $\xi \in A$ για τα οποία υπάρχει το $f'(\xi)$ και είναι αριθμός, τότε, με αυτό το σύνολο A' ως πεδίο ορισμού, ορίζεται η **παράγωγος συνάρτηση** $f' : A' \rightarrow \mathbb{R}$ της f , η οποία συμβολίζεται

$$f'(x) \quad \text{ή} \quad \frac{df(x)}{dx} \quad \text{ή} \quad \frac{dy}{dx}.$$

Το σύμβολο $\frac{dy}{dx}$ προϋποθέτει ότι έχουμε συμβολίσει y την εξαρτημένη μεταβλητή: $y = f(x)$.

Ασκήσεις

6.2. Υπολογίστε, αν υπάρχουν, τις παραγώγους, καθώς και τις πλευρικές παραγώγους στο 0 των

$$\begin{aligned} & \text{συναρτήσεων } 2, 3x+1, 3x^2-5x+3, x+\sqrt[3]{x}, \sin x, \cos x, \tan x, \begin{cases} 2x, & \text{αν } x \leq 0, \\ -3x, & \text{αν } x \geq 0, \end{cases} \begin{cases} 2x^2, & \text{αν } x \leq 0, \\ -3x^2, & \text{αν } x \geq 0, \end{cases} \\ & \begin{cases} -2\sqrt{-x}+1, & \text{αν } x \leq 0, \\ \sqrt[3]{x}+1, & \text{αν } x \geq 0, \end{cases} \begin{cases} 0, & \text{αν } x \neq 0, \\ 1, & \text{αν } x = 0, \end{cases} \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{αν } x \geq 0, \\ -1, & \text{αν } x < 0, \end{cases} \begin{cases} 1-x, & \text{αν } x > 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0, \\ -1-x, & \text{αν } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

6.3. Βρείτε τα a, b ώστε η $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x + 1, & \text{αν } x \leq 0, \\ ax + b, & \text{αν } x > 0, \end{cases}$ να έχει παράγωγο στο 0.

Υπόδειξη: Πρέπει να είναι $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x}$.

Κάντε το ίδιο για την $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x + 1, & \text{αν } x < 0, \\ ax + b, & \text{αν } x \geq 0. \end{cases}$

6.4. Ξαναδείξτε την άσκηση 6.1 και γράψτε σε μορφή παραγώγου

(i) τη στιγμιαία επιτάχυνση οχήματος το οποίο κινείται σε ευθύ δρόμο.

(ii) τη στιγμιαία ταχύτητα και τη στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα οχήματος το οποίο κινείται σε κυκλικό δρόμο.

6.4 Παραδείγματα παραγώγων, I

Η παράγωγος σταθερής συνάρτησης c είναι μηδέν σε κάθε σημείο. Πράγματι, για κάθε ξ είναι

$$\left. \frac{dc}{dx} \right|_{x=\xi} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{c-c}{x-\xi} = \lim_{x \rightarrow \xi} 0 = 0.$$

Επομένως,

$$\frac{dc}{dx} = 0.$$

Η x έχει παράγωγο

$$\left. \frac{dx}{dx} \right|_{x=\xi} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{x-\xi}{x-\xi} = \lim_{x \rightarrow \xi} 1 = 1.$$

Άρα η παράγωγος συνάρτησης της x είναι η σταθερή συνάρτηση

$$\frac{dx}{dx} = 1.$$

Αυτό γενικεύεται ως εξής. Αν $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, τότε η x^n έχει παράγωγο συνάρτηση

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \quad \text{αν } n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Πράγματι, για κάθε ξ είναι

$$\left. \frac{dx^n}{dx} \right|_{x=\xi} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{x^n - \xi^n}{x - \xi} = \lim_{x \rightarrow \xi} (x^{n-1} + x^{n-2}\xi + \dots + x\xi^{n-2} + \xi^{n-1}) = n\xi^{n-1},$$

διότι κάθε όρος της παρένθεσης έχει το ίδιο όριο $\lim_{x \rightarrow \xi} x^{n-k}\xi^{k-1} = \xi^{n-k}\xi^{k-1} = \xi^{n-1}$ και το πλήθος των όρων στην παρένθεση είναι n .

Παρατηρούμε ότι ο τύπος $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$, ο οποίος είπαμε ότι ισχύει για $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, ισχύει και για $n = 1$: $\frac{dx^1}{dx} = 1x^0$. Πράγματι, ισχύει και ταυτίζεται με τον προηγούμενο τύπο $\frac{dx}{dx} = 1$, αλλά με τον περιορισμό $x \neq 0$, διότι δεν ορίζεται το σύμβολο 0^0 .

Ο προηγούμενος τύπος για την παράγωγο συνάρτησης της x^n είναι ο ίδιος και αν $n \in \mathbb{Z}$, $n \leq 0$. Εννοείται ότι η παράγωγος δεν ορίζεται στο $\xi = 0$, διότι το 0 δεν περιέχεται στο πεδίο ορισμού της x^n , αν $n \leq 0$. Πράγματι, αν $n = 0$, τότε η συνάρτηση x^0 είναι η σταθερή συνάρτηση 1 στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, οπότε έχει παράγωγο μηδέν, το οποίο συμπίπτει με την παράσταση $0x^{0-1}$ στο ίδιο σύνολο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Αν $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$, τότε ορίζουμε $m = -n$, οπότε $m \in \mathbb{N}$, και για κάθε $\xi \neq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} \left. \frac{dx^n}{dx} \right|_{x=\xi} &= \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{x^n - \xi^n}{x - \xi} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{x^{-m} - \xi^{-m}}{x - \xi} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{\xi^m - x^m}{\xi^m x^m (x - \xi)} = - \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{x^{m-1} + x^{m-2}\xi + \dots + x\xi^{m-2} + \xi^{m-1}}{\xi^m x^m} \\ &= - \frac{m\xi^{m-1}}{\xi^{2m}} = -m\xi^{-m-1} = n\xi^{n-1}. \end{aligned}$$

Άρα

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \quad \text{αν } n \in \mathbb{Z}, \quad n \leq 0, \quad x \neq 0.$$

Θα βρούμε την παράγωγο συνάρτηση της x^a , αν $a \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. Το πεδίο ορισμού της x^a είναι: το $[0, +\infty)$, αν $a > 0$, και το $(0, +\infty)$, αν $a < 0$.

Κατ' αρχάς, θα υποθέσουμε ότι $\xi > 0$ και έστω $a = \frac{m}{n}$, όπου $m \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$. Στους παρακάτω υπολογισμούς θα χρησιμοποιήσουμε την αλλαγή μεταβλητής $t = \sqrt[n]{x}$. Τότε $x^a = t^m$ και ορίζουμε, επίσης, $\tau = \sqrt[n]{\xi}$, οπότε $\xi^a = \tau^m$. Υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dx^a}{dx} \right|_{x=\xi} &= \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{x^a - \xi^a}{x - \xi} = \lim_{t \rightarrow \tau} \frac{t^m - \tau^m}{t^n - \tau^n} = \lim_{t \rightarrow \tau} \frac{t^{m-1} + t^{m-2}\tau + \dots + t\tau^{m-2} + \tau^{m-1}}{t^{n-1} + t^{n-2}\tau + \dots + t\tau^{n-2} + \tau^{n-1}} \\ &= \frac{m\tau^{m-1}}{n\tau^{n-1}} = \frac{m}{n} \tau^{m-n} = \frac{m}{n} (\sqrt[n]{\xi})^{m-n} = a\xi^{a-1}. \end{aligned}$$

Κατόπιν, έστω $\xi = 0$. Για να έχει νόημα η παράγωγος στο 0 πρέπει το 0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της x^a , οπότε πρέπει να είναι $a > 0$. Τώρα υπολογίζουμε:

$$\left. \frac{dx^a}{dx} \right|_{x=0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^a - 0^a}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{a-1} = \begin{cases} 0, & \text{αν } a > 1, \\ +\infty, & \text{αν } 0 < a < 1. \end{cases}$$

Άρα η παράγωγος συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού: το $[0, +\infty)$, αν $a > 1$, και το $(0, +\infty)$, αν $a < 1$. Συνοψίζουμε:

$$\frac{dx^a}{dx} = ax^{a-1} \quad \text{αν } a \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \text{ και αν } a > 1, x \geq 0 \text{ ή } a < 1, x > 0.$$

Την παράγωγο συνάρτηση της x^a αν το a είναι άρρητο θα τη δούμε αργότερα. Τέλος,

$$\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x, \quad \frac{d \sin x}{dx} = \cos x.$$

Για τον πρώτο τύπο υπολογίζουμε

$$\left. \frac{d \cos x}{dx} \right|_{x=\xi} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{\cos x - \cos \xi}{x - \xi} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{-2 \sin \frac{x-\xi}{2} \sin \frac{x+\xi}{2}}{x - \xi} = - \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{\sin \frac{x-\xi}{2}}{\frac{x-\xi}{2}} \sin \frac{x+\xi}{2} = -1 \sin \frac{\xi+\xi}{2} = -\sin \xi$$

και, ομοίως, για τον δεύτερο τύπο

$$\left. \frac{d \sin x}{dx} \right|_{x=\xi} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{\sin x - \sin \xi}{x - \xi} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{2 \sin \frac{x-\xi}{2} \cos \frac{x+\xi}{2}}{x - \xi} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{\sin \frac{x-\xi}{2}}{\frac{x-\xi}{2}} \cos \frac{x+\xi}{2} = 1 \cos \frac{\xi+\xi}{2} = \cos \xi.$$

Ασκήσεις

6.5. Βρείτε, βάσει του ορισμού, τις παραγώγους συναρτήσεων των $x^2 - 2x$, $x^3 + x$, $\frac{1}{x+1}$, $|x|$, $\frac{|x|}{x}$, $[x]$, $x - [x]$, $\sin^3 x$, $\cos(7x)$.

6.6. (i) Αποδείξτε ότι ο ρυθμός μεταβολής του όγκου ενός κύβου ως προς το μήκος της ακμής του είναι ίσος με το μισό του εμβαδού της αντίστοιχης εξωτερικής επιφάνειάς του.

(ii) Αποδείξτε ότι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού ενός κυκλικού δίσκου ως προς το μήκος της διαμέτρου του είναι ίσος με το μισό του μήκους της αντίστοιχης περιφέρειάς του.

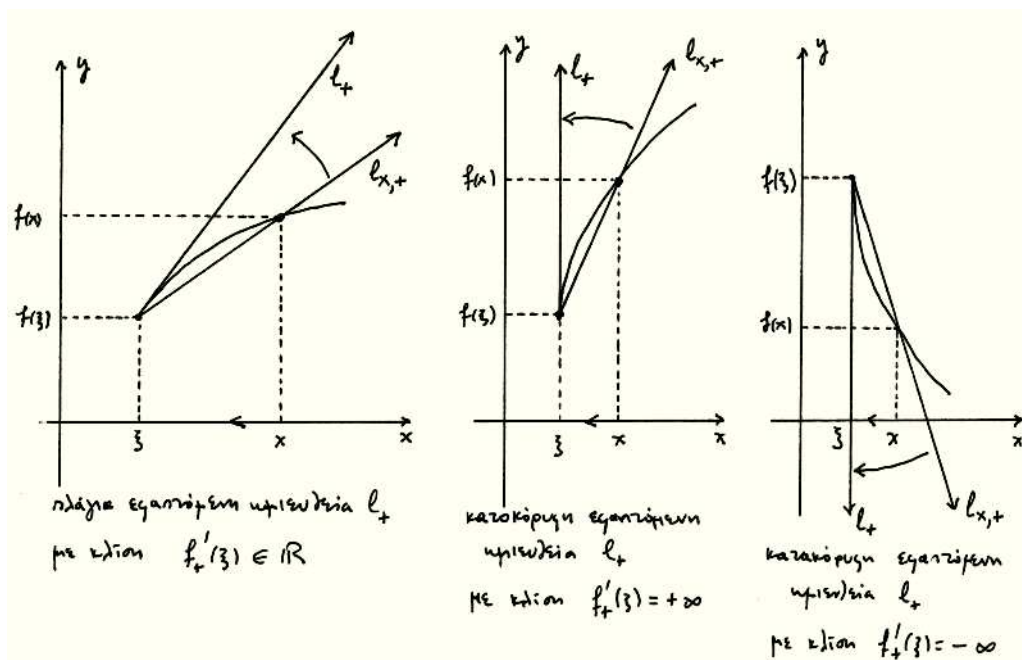
(iii) Αποδείξτε ότι ο ρυθμός μεταβολής του όγκου μίας σφαίρας ως προς το μήκος της διαμέτρου της είναι ίσος με το μισό του εμβαδού της αντίστοιχης εξωτερικής επιφάνειάς της.

Διακρίνετε κάτι κοινό στα προηγούμενα;

6.5 Παράγωγος συνάρτησης και γράφημα

Στην ενότητα αυτή θα δούμε, λίγο πιο προσεκτικά, το γεωμετρικό περιεχόμενο της έννοιας της παραγώγου.

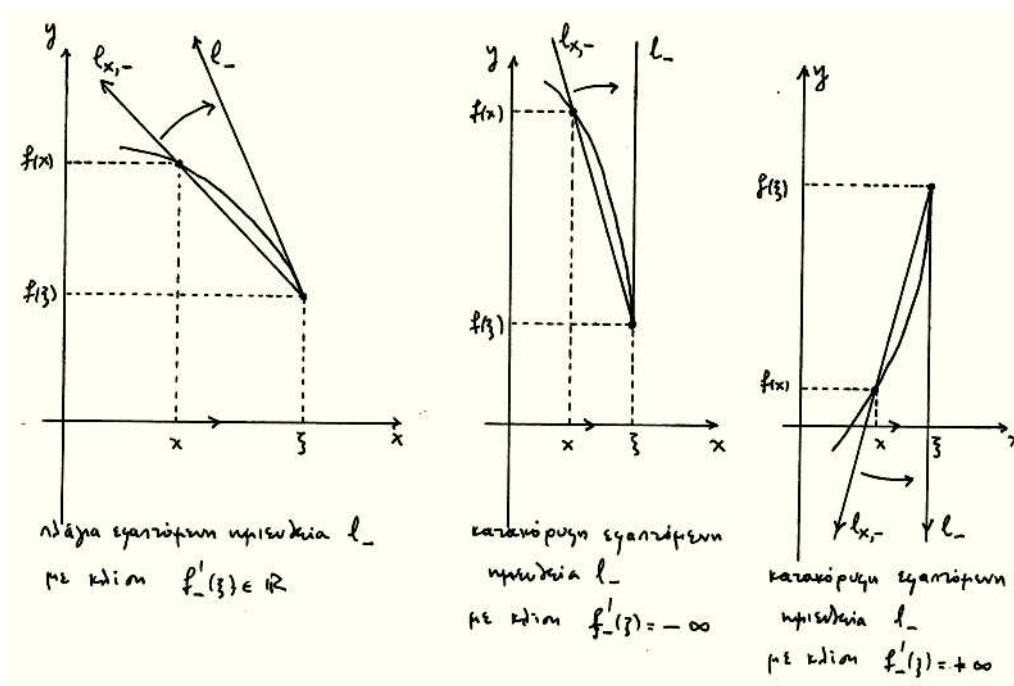
Παρατηρήστε το σχήμα 6.2. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα $[\xi, b)$. Αν το x μεταβάλλεται στο (ξ, b) , τότε η μεταβλητή ημιευθεία $l_{x,+}$, η οποία έχει κορυφή το σταθερό σημείο $(\xi, f(\xi))$ και διέρχεται από το μεταβλητό σημείο $(x, f(x))$, είναι πλάγια και έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά. Έστω τώρα ότι το x προσεγγίζει το ξ . Όταν το σημείο $(x, f(x))$ προσεγγίζει το σημείο $(\xi, f(\xi))$, δηλαδή αν η f είναι συνεχής στο ξ από δεξιά του, τότε η $l_{x,+}$ προσεγγίζει την ημιευθεία l_+ , η οποία έχει κορυφή το $(\xi, f(\xi))$ και εφάπτεται στο μέρος του γραφήματος της f , το οποίο έχει άκρο το σημείο $(\xi, f(\xi))$ και έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά. Η κλίση της μεταβλητής ημιευθείας είναι ίση με $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ και διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις. (i) Αν το $f'_+(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ είναι αριθμός, τότε το όριο αυτό είναι ίσο με την κλίση της l_+ , οπότε η l_+ έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά και είτε (α) προς τα πάνω, αν το όριο είναι θετικό, είτε (β) προς τα κάτω, αν το όριο είναι αρνητικό, είτε (γ) η l_+ είναι οριζόντια, αν το όριο είναι 0. (ii) Αν το όριο είναι $f'_+(\xi) = +\infty$, τότε η κλίση της $l_{x,+}$ γίνεται απεριόριστα μεγάλη θετική, οπότε η l_+ είναι κατακόρυφη με κατεύθυνση προς τα πάνω. (iii) Αν το όριο είναι $f'_+(\xi) = -\infty$, τότε η κλίση της $l_{x,+}$ γίνεται απεριόριστα μεγάλη αρνητική, οπότε η l_+ είναι κατακόρυφη με κατεύθυνση προς τα κάτω. Αν δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow \xi+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$, τότε δεν υπάρχει ούτε και εφαπτόμενη ημιευθεία προς τα δεξιά.



Σχήμα 6.2

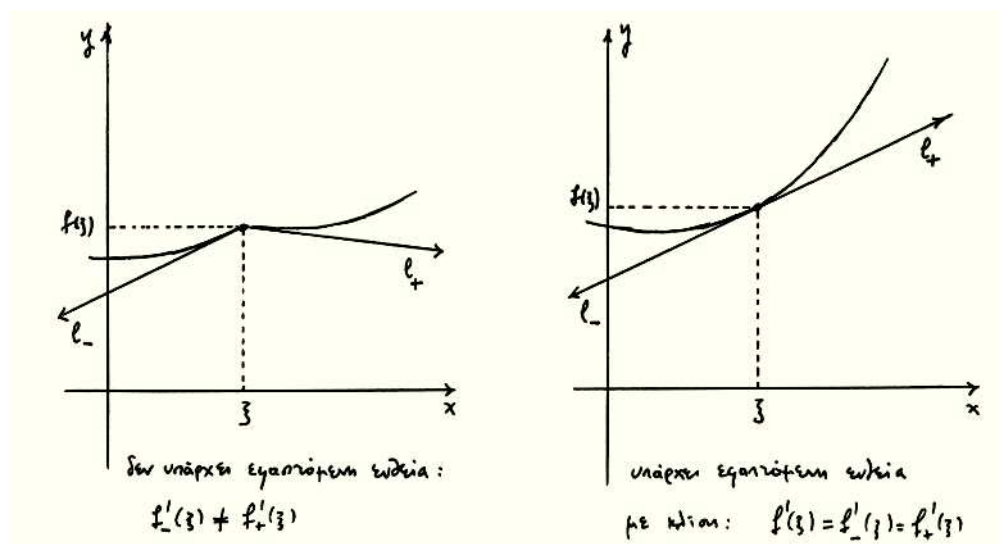
Ας εξετάσουμε τώρα τη «συμμετρική» κατάσταση. Παρατηρήστε το σχήμα 6.3. Έστω ότι η f είναι ορισμένη στο διάστημα $(a, \xi]$. Αν το x μεταβάλλεται στο (a, ξ) , τότε η μεταβλητή ημιευθεία $l_{x,-}$, η οποία έχει κορυφή το σταθερό σημείο $(\xi, f(\xi))$ και διέρχεται από το μεταβλητό σημείο $(x, f(x))$, είναι πλάγια και έχει κατεύθυνση προς τα αριστερά. Έστω ότι το x προσεγγίζει το ξ . Όταν το σημείο $(x, f(x))$ προσεγγίζει το σημείο $(\xi, f(\xi))$, δηλαδή αν η f είναι συνεχής στο ξ από αριστερά του, τότε η $l_{x,-}$ προσεγγίζει την ημιευθεία l_- η οποία έχει κορυφή το $(\xi, f(\xi))$ και εφάπτεται στο μέρος του γραφήματος της f , το οποίο έχει άκρο το σημείο $(\xi, f(\xi))$ και έχει κατεύθυνση προς τα αριστερά. Η κλίση της $l_{x,-}$ είναι ίση με $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ και διακρίνουμε πάλι τις εξής περιπτώσεις. (i) Αν το $f'_-(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi-} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ είναι αριθμός, τότε το όριο αυτό είναι ίσο με την κλίση της l_- , οπότε η l_- έχει κατεύθυνση προς τα αριστερά και είτε (α) προς τα κάτω, αν το όριο είναι θετικό, είτε (β) προς τα πάνω, αν το όριο είναι αρνητικό, είτε (γ) η l_- είναι οριζόντια, αν το όριο είναι 0. (ii) Αν το

όριο είναι $f'_-(\xi) = +\infty$, τότε η κλίση της $l_{x,-}$ γίνεται απεριόριστα μεγάλη θετική, οπότε η l_- είναι κατακόρυφη με κατεύθυνση προς τα κάτω. (iii) Αν το όριο είναι $f'_-(\xi) = -\infty$, τότε η κλίση της $l_{x,-}$ γίνεται απεριόριστα μεγάλη αρνητική, οπότε η l_- είναι κατακόρυφη με κατεύθυνση προς τα πάνω. Αν δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow \xi^-} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$, τότε δεν υπάρχει ούτε και εφαπτόμενη ημιευθεία προς τα αριστερά.



Σχήμα 6.3

Έστω, τώρα, ότι η f είναι ορισμένη σε διάστημα (a, b) με $a < \xi < b$. Παρατηρήστε το σχήμα 6.4. Συνδυάζοντας τα προηγούμενα, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι, αν η f είναι συνεχής στο ξ και αν οι δύο πλευρικές παράγωγοι είναι ίσες, τότε οι δύο εφαπτόμενες ημιευθείες στα δύο μέρη του γραφήματος με αρχή το $(\xi, f(\xi))$ είναι αντίθετες, οπότε σχηματίζουν μία ευθεία, την ευθεία l η οποία εφάπτεται στο γράφημα της συνάρτησης στο $(\xi, f(\xi))$. Αν οι δύο πλευρικές παράγωγοι δεν είναι ίσες, τότε οι δύο εφαπτόμενες ημιευθείες δεν είναι αντίθετες, οπότε δεν υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία. Φυσικά, αν μία από τις δύο πλευρικές παραγώγους δεν υπάρχει, τότε ούτε η αντίστοιχη εφαπτόμενη ημιευθεία υπάρχει.



Σχήμα 6.4

Παράδειγμα 6.8. Το γράφημα της $|x|$ έχει δύο εφαπτόμενες ημιευθείες στο σημείο $(0, 0)$. Η μία έχει κορυφή $(0, 0)$, κλίση $\left.\frac{d|x|}{dx}\right|_{x=0+} = 1$ και κατεύθυνση προς τα δεξιά και πάνω. Η άλλη έχει κορυφή $(0, 0)$, κλίση $\left.\frac{d|x|}{dx}\right|_{x=0-} = -1$ και κατεύθυνση προς τα αριστερά και πάνω. Οι δύο αυτές ημιευθείες δεν είναι αντίθετες, οπότε δεν υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο $(0, 0)$.

Παράδειγμα 6.9. Το γράφημα της $\sqrt{|x|}$ έχει δύο εφαπτόμενες ημιευθείες στο σημείο $(0, 0)$. Είναι $\left.\frac{d\sqrt{|x|}}{dx}\right|_{x=0+} = +\infty$, οπότε η μία έχει κορυφή το $(0, 0)$ και είναι κατακόρυφη με κατεύθυνση προς τα πάνω. Ομοίως, είναι $\left.\frac{d\sqrt{|x|}}{dx}\right|_{x=0-} = -\infty$, οπότε η άλλη ημιευθεία έχει κορυφή το $(0, 0)$ και είναι κατακόρυφη με κατεύθυνση προς τα πάνω. Άρα δεν υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο $(0, 0)$. Μάλιστα, οι δύο ημιευθείες ταυτίζονται, οπότε το γράφημα της συνάρτησης έχει μόνο μία εφαπτόμενη ημιευθεία στο $(0, 0)$.

Παράδειγμα 6.10. Το γράφημα της $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{αν } 0 \leq x, \\ -\sqrt{-x}, & \text{αν } x \leq 0, \end{cases}$ έχει δύο εφαπτόμενες ημιευθείες στο σημείο $(0, 0)$. Επειδή $f'_+(0) = +\infty$, η μία έχει κορυφή το $(0, 0)$ και είναι κατακόρυφη με κατεύθυνση προς τα πάνω. Ομοίως, επειδή $f'_-(0) = +\infty$, η άλλη ημιευθεία έχει κορυφή το $(0, 0)$ και είναι κατακόρυφη με κατεύθυνση προς τα κάτω. Οι δύο ημιευθείες είναι αντίθετες, οπότε σχηματίζουν την εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο $(0, 0)$, η οποία είναι προφανώς κατακόρυφη: είναι η ευθεία με εξίσωση $x = 0$.

Στην περίπτωση κατά την οποία η f είναι ορισμένη μόνο στη μία πλευρά του ξ και είναι συνεχής στο ξ από την πλευρά αυτή, μπορούμε να μιλάμε μόνο για μία εφαπτόμενη ημιευθεία στο γράφημά της στο σημείο $(\xi, f(\xi))$.

Παράδειγμα 6.11. Το γράφημα της $\sqrt{x}$ έχει μόνο μία εφαπτόμενη ημιευθεία στο σημείο $(0, 0)$. Επειδή $\left.\frac{d\sqrt{x}}{dx}\right|_{x=0+} = +\infty$, η ημιευθεία αυτή έχει κορυφή το $(0, 0)$ και είναι κατακόρυφη με κατεύθυνση προς τα πάνω.

Έστω ότι η f είναι ορισμένη στο διάστημα (a, b) , ότι $a < \xi < b$ και ότι η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο ξ . Όπως είδαμε, η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας l στο γράφημα της συνάρτησης στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ είναι ίση με $f'(\xi)$, οπότε:

$$\text{εξίσωση εφαπτόμενης ευθείας: } y = f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi) \quad \text{αν } f'(\xi) \neq \pm\infty.$$

Τέλος, αν η f είναι συνεχής στο ξ και $f'(\xi) = +\infty$ ή $f'(\xi) = -\infty$, τότε η εφαπτόμενη ευθεία στο $(\xi, f(\xi))$ είναι κατακόρυφη και

$$\text{εξίσωση εφαπτόμενης ευθείας: } x = \xi \quad \text{αν } f'(\xi) = \pm\infty.$$

Παράδειγμα 6.12. Η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στο γράφημα της x^2 στο σημείο (ξ, ξ^2) είναι η $y = 2\xi(x - \xi) + \xi^2$.

Για να βρούμε σε ποιο σημείο (ξ, ξ^2) η εφαπτόμενη ευθεία είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y = x$, εξισώνουμε τις κλίσεις των δύο αυτών ευθειών, δηλαδή $2\xi = 1$, και προκύπτει $\xi = \frac{1}{2}$.

Ασκήσεις

6.7. Βρείτε, αν υπάρχουν, τις εξισώσεις των εφαπτόμενων ημιευθειών και της εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο του γραφήματος το οποίο αντιστοιχεί στο 0 για καθεμία από τις συναρτήσεις της άσκησης 6.2.

6.8. Γνωρίζουμε από τη στοιχειώδη γεωμετρία ότι κάθε ευθεία η οποία εφάπτεται σε έναν κύκλο δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο εκτός από το σημείο επαφής.

Θεωρήστε το γράφημα της x^2 . Σε κάθε σημείο της καμπύλης αυτής υπολογίστε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στην καμπύλη στο σημείο αυτό και βρείτε πόσα κοινά σημεία έχει η εφαπτόμενη ευθεία με την καμπύλη. Κάντε το ίδιο για το γράφημα της x^3 .

6.9. Βρείτε b, c , ώστε η εφαπτόμενη ευθεία του γραφήματος της $x^2 + bx + c$ στο σημείο $(1, 1)$ να είναι η ευθεία με εξίσωση $y = x$.

6.10. Σε ποια σημεία του το γράφημα της $\sqrt[3]{x}$ έχει εφαπτόμενη ευθεία (ή ημιευθεία) κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $y = -\frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$; Με εξίσωση $y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$; Με εξίσωση $x = 4$; Με εξίσωση $y = 1$;

6.11. (i) Θεωρήστε την $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0. \end{cases}$ Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο 0. Στο

παράδειγμα 6.7 είδαμε ότι η f δεν έχει πλευρικές παραγώγους στο 0. Σχεδιάστε το γράφημα της f και μελετήστε τη συμπεριφορά όταν $x \rightarrow 0+$ της μεταβλητής ημιευθείας $l_{x,+}$, η οποία έχει κορυφή το σταθερό σημείο $(0, 0)$ και διέρχεται από το μεταβλητό σημείο $(x, f(x))$. Προσεγγίζει η $l_{x,+}$ κάποια ημιευθεία με κορυφή το σημείο $(0, 0)$; Κάντε το ίδιο όταν $x \rightarrow 0-$ για την ημιευθεία $l_{x,-}$, η οποία έχει κορυφή το σημείο $(0, 0)$ και διέρχεται από το μεταβλητό σημείο $(x, f(x))$.

(ii) Θεωρήστε την $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0. \end{cases}$ Στο παράδειγμα 6.3 είδαμε ότι η f έχει παράγωγο

στο 0 ίση με 0. Όπως στο (i), μελετήστε όταν $x \rightarrow 0+$ και $x \rightarrow 0-$ τη συμπεριφορά των ημιευθειών $l_{x,+}$ και $l_{x,-}$, οι οποίες έχουν κορυφή το σημείο $(0, 0)$ και διέρχονται από το μεταβλητό σημείο $(x, f(x))$.

6.6 Ιδιότητες παραγώγων

Όλα τα αποτελέσματα παρακάτω θα διατυπώνονται για την περίπτωση της παραγώγου σε κάποιο σημείο. Τα ίδια αποτελέσματα ισχύουν και στις περιπτώσεις της πλευρικής παραγώγου. Επίσης, επισημαίνουμε ότι η ύπαρξη παραγώγου συνάρτησης $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ σε σημείο $\xi \in A$ προϋποθέτει ότι το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A .

Πρόταση 6.1. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $\xi \in A$, έστω $f(\xi) = g(\xi)$ και έστω ότι οι f, g ταυτίζονται κοντά στο ξ . Αν η f έχει παράγωγο στο ξ , τότε και η g έχει παράγωγο στο ξ και οι δύο παράγωγοι είναι ίσες.

Απόδειξη. Έστω ότι η f έχει παράγωγο στο ξ . Επειδή ισχύει $\frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi} = \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ κοντά στο ξ , συνεπάγεται ότι

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = f'(\xi),$$

οπότε $g'(\xi) = f'(\xi)$. □

Παράδειγμα 6.13. Η $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{αν } x \neq 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0, \end{cases}$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και η σταθερή συνάρτηση 1 με πεδίο ορισμού πάλι το $(-\infty, +\infty)$ ταυτίζονται στο $(0, +\infty)$. Άρα η παράγωγος της f σε κάθε σημείο του $(0, +\infty)$ είναι ίση με 0. Ομοίως, η f και η σταθερή συνάρτηση -1 με πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ ταυτίζονται στο $(-\infty, 0)$. Άρα η παράγωγος της f σε κάθε σημείο του $(-\infty, 0)$ είναι ίση με 0.

Παράδειγμα 6.14. Η $\sqrt{|x|}$, με πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$, ταυτίζεται στο $[0, +\infty)$ με την $\sqrt{x}$, με πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$. Άρα η παράγωγος της $\sqrt{|x|}$ σε κάθε σημείο του $(0, +\infty)$ είναι ίση με την παράγωγο της $\sqrt{x}$ στο ίδιο σημείο, οπότε

$$\frac{d\sqrt{|x|}}{dx} = \frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{για } x \in (0, +\infty).$$

Επίσης, η δεξιά πλευρική παράγωγος της $\sqrt{|x|}$ στο 0 είναι ίση με τη δεξιά πλευρική παράγωγο της $\sqrt{x}$ στο 0, οπότε

$$\left. \frac{d\sqrt{|x|}}{dx} \right|_{x=0+} = \left. \frac{d\sqrt{x}}{dx} \right|_{x=0+} = +\infty.$$

Πρόταση 6.2. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $\xi \in A$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο ξ , τότε είναι συνεχής στο ξ .

Απόδειξη. Από την προφανή ισότητα

$$f(x) = \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}(x-\xi) + f(\xi),$$

και από το ότι η παράγωγος $f'(\xi)$ είναι αριθμός έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \lim_{x \rightarrow \xi} (x-\xi) + f(\xi) = f'(\xi) 0 + f(\xi) = f(\xi).$$

Άρα η f είναι συνεχής στο ξ . □

Παράδειγμα 6.15. Το αντίστροφο της Πρότασης 6.2 δεν ισχύει εν γένει. Η $|x|$ είναι συνεχής στο 0, αλλά όχι παραγωγίσιμη στο 0.

Παράδειγμα 6.16. Στην Πρόταση 6.2 υποθέτουμε ότι η $f'(\xi)$ είναι αριθμός. Αν $f'(\xi) = \pm\infty$, τότε η f δεν είναι κατ' ανάγκη συνεχής στο ξ . Π.χ. η $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{αν } x \neq 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0, \end{cases}$ έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$. Δεν είναι συνεχής στο 0 ούτε από δεξιά του ούτε από αριστερά του, αφού και τα δύο πλευρικά όρια

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} 1 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (-1) = -1$$

είναι διαφορετικά από το $f(0) = 0$. Όμως,

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)-0}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x)-0}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-1}{x} = +\infty,$$

οπότε $f'(0) = +\infty$.

Στην ενότητα 6.5 είδαμε ότι, αν η f έχει παράγωγο στο ξ και αν είναι συνεχής στο ξ , τότε υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημά της στο σημείο $(\xi, f(\xi))$. Η Πρόταση 6.2 εξασφαλίζει ότι, αν η παράγωγος είναι αριθμός, τότε δεν χρειάζεται η υπόθεση ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο ξ . Αν, όμως, η παράγωγος είναι $\pm\infty$, τότε, για να υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία, είναι ουσιαστική η υπόθεση της συνέχειας στο ξ . Στο παράδειγμα 6.16 είναι φανερό ότι δεν υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο $(0, 0)$ του γραφήματος.

Πρόταση 6.3. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $\xi \in A$. Αν οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο ξ , τότε και οι $f \pm g, fg$ είναι παραγωγίσιμες στο ξ . Αν, επιπλέον, ισχύει $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$, τότε και η $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο ξ . Τέλος, ισχύουν οι τύποι:

$$\begin{aligned} (f+g)'(\xi) &= f'(\xi) + g'(\xi), & (f-g)'(\xi) &= f'(\xi) - g'(\xi), \\ (fg)'(\xi) &= g(\xi)f'(\xi) + f(\xi)g'(\xi), & \left(\frac{f}{g}\right)'(\xi) &= \frac{g(\xi)f'(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)}. \end{aligned}$$

Απόδειξη. Και οι τέσσερις ισότητες αποδεικνύονται βάσει αντίστοιχων ιδιοτήτων των ορίων. Για το άθροισμα έχουμε:

$$\begin{aligned} (f+g)'(\xi) &= \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{(f(x)+g(x))-(f(\xi)+g(\xi))}{x-\xi} = \lim_{x \rightarrow \xi} \left(\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} + \frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} + \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi} = f'(\xi) + g'(\xi), \end{aligned}$$

και η απόδειξη για τη διαφορά είναι ίδια. Για το γινόμενο:

$$\begin{aligned} (fg)'(\xi) &= \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)g(x)-f(\xi)g(\xi)}{x-\xi} = \lim_{x \rightarrow \xi} \left(g(x) \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} + f(\xi) \frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \xi} g(x) \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} + f(\xi) \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi} = g(\xi)f'(\xi) + f(\xi)g'(\xi). \end{aligned}$$

Τέλος, για τον λόγο:

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(\xi) &= \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(\xi)}{g(\xi)}}{x - \xi} = \lim_{x \rightarrow \xi} \left(\frac{1}{g(x)} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} - \frac{f(\xi)}{g(x)g(\xi)} \frac{g(x) - g(\xi)}{x - \xi} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{1}{g(x)} \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} - \frac{f(\xi)}{g(\xi)} \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{1}{g(x)} \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{g(x) - g(\xi)}{x - \xi} \\ &= \frac{1}{g(\xi)} f'(\xi) - \frac{f(\xi)}{g(\xi)} \frac{1}{g(\xi)} g'(\xi) = \frac{g(\xi)f'(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)}. \end{aligned}$$

Στα προηγούμενα χρησιμοποιήσαμε και τη συνέχεια της g στο ξ . $\square$

Με τους εναλλακτικούς συμβολισμούς και παραλείποντας χάριν συντομίας το ξ , οι ιδιότητες αυτές γράφονται:

$$\begin{aligned} \frac{d(f(x) \pm g(x))}{dx} &= \frac{df(x)}{dx} \pm \frac{dg(x)}{dx}, & \frac{d(f(x)g(x))}{dx} &= g(x) \frac{df(x)}{dx} + f(x) \frac{dg(x)}{dx}, \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) &= \frac{g(x) \frac{df(x)}{dx} - f(x) \frac{dg(x)}{dx}}{g(x)^2}, \end{aligned}$$

$$\frac{d(y \pm z)}{dx} = \frac{dy}{dx} \pm \frac{dz}{dx}, \quad \frac{d(yz)}{dx} = z \frac{dy}{dx} + y \frac{dz}{dx}, \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{y}{z} \right) = \frac{z \frac{dy}{dx} - y \frac{dz}{dx}}{z^2},$$

όπου στην τελευταία σειρά χρησιμοποιούμε το σύμβολο $z = g(x)$ αντί του $y = g(x)$, για να μην το μπερδέψουμε με το $y = f(x)$.

Παράδειγμα 6.17. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο ξ και c είναι οποιοσδήποτε σταθερός αριθμός, τότε η cf είναι παραγωγίσιμη στο ξ και

$$(cf)'(\xi) = cf'(\xi).$$

Πράγματι,

$$(cf)'(\xi) = 0 f(\xi) + cf'(\xi) = cf'(\xi),$$

αφού η σταθερή συνάρτηση c έχει παράγωγο μηδέν.

Παράδειγμα 6.18. Έστω πολωνυμική συνάρτηση $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$. Από το παράδειγμα 6.17, κάθε όρος του αθροίσματος έχει παράγωγο συνάρτηση την

$$\frac{d(a_k x^k)}{dx} = a_k \frac{dx^k}{dx} = k a_k x^{k-1},$$

οπότε

$$\frac{d}{dx} (a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) = n a_n x^{n-1} + \dots + 2 a_2 x + a_1.$$

Παράδειγμα 6.19. Υπολογίζουμε

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2 + x - 1}{x^3 + 2} \right) = \frac{(x^3 + 2) \frac{d(x^2 + x - 1)}{dx} - (x^2 + x - 1) \frac{d(x^3 + 2)}{dx}}{(x^3 + 2)^2} = \frac{(x^3 + 2)(2x + 1) - (x^2 + x - 1)3x^2}{(x^3 + 2)^2} = \frac{-x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2}{(x^3 + 2)^2}.$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζονται οι παράγωγοι όλων των ρητών συναρτήσεων. Μάλιστα, είναι σαφές ότι η παράγωγος ρητής συνάρτησης είναι ρητή συνάρτηση.

Παράδειγμα 6.20. Οι παράγωγοι συναρτήσεων της εφαπτομένης και της συνεφαπτομένης είναι

$$\frac{d \tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \frac{d \cot x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Για παράδειγμα:

$$\frac{d \tan x}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) = \frac{\cos x \frac{d \sin x}{dx} - \sin x \frac{d \cos x}{dx}}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Η απόδειξη της δεύτερης ισότητας είναι ίδια.

Η επόμενη ιδιότητα είναι ιδιαιτέρως σημαντική για τον υπολογισμό παραγώγων.

Κανόνας της αλυσίδας. Έστω $f : A \rightarrow B$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ και $\eta = f(\xi) \in B$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο ξ και αν η g είναι παραγωγίσιμη στο η , τότε η $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο ξ και

$$(g \circ f)'(\xi) = g'(\eta)f'(\xi) = g'(f(\xi))f'(\xi).$$

Απόδειξη. Ορίζουμε τη βοηθητική συνάρτηση $G : B \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$G(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(\eta)}{y-\eta}, & \text{αν } y \in B \text{ και } y \neq \eta, \\ g'(\eta), & \text{αν } y = \eta. \end{cases}$$

Η G είναι συνεχής στο η , διότι

$$\lim_{y \rightarrow \eta} G(y) = \lim_{y \rightarrow \eta} \frac{g(y)-g(\eta)}{y-\eta} = g'(\eta) = G(\eta).$$

Επίσης, είναι προφανές από τον τύπο της G ότι ισχύει

$$g(y) - g(\eta) = G(y)(y - \eta)$$

για κάθε $y \in B$. Προσέξτε: αν $y = \eta$, τότε η ισότητα ισχύει διότι και τα δύο μέλη της είναι 0. Έχουμε, λοιπόν,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{g(f(x)) - g(f(\xi))}{x - \xi} &= \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{G(f(x))(f(x) - f(\xi))}{x - \xi} = \lim_{x \rightarrow \xi} G(f(x)) \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \\ &= G(f(\xi))f'(\xi) = G(\eta)f'(\xi) = g'(\eta)f'(\xi), \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το $\lim_{x \rightarrow \xi} G(f(x)) = G(f(\xi))$, αφού η $G \circ f$ είναι συνεχής στο ξ . □

Με τους εναλλακτικούς συμβολισμούς ο κανόνας της αλυσίδας γράφεται:

$$\begin{aligned} \frac{dg(f(x))}{dx} \Big|_{x=\xi} &= \frac{dg(y)}{dy} \Big|_{y=\eta} \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=\xi} = \frac{dg(y)}{dy} \Big|_{y=f(\xi)} \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=\xi}, \\ \frac{dz}{dx} \Big|_{x=\xi} &= \frac{dz}{dy} \Big|_{y=\eta} \frac{dy}{dx} \Big|_{x=\xi} = \frac{dz}{dy} \Big|_{y=f(\xi)} \frac{dy}{dx} \Big|_{x=\xi}. \end{aligned}$$

Επιμένοντας λίγο ακόμη στο θέμα του συμβολισμού, αν γράψουμε τις ισότητες αυτές για το γενικό x αντί του ειδικού ξ , δηλαδή για τις παραγώγους συναρτήσεις, τότε έχουμε τις ισότητες

$$\frac{dg(f(x))}{dx} = \frac{dg(y)}{dy} \Big|_{y=f(x)} \frac{df(x)}{dx}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \Big|_{y=f(x)} \frac{dy}{dx}.$$

Στις δύο τελευταίες ισότητες δεν επιτρέπεται να αγνοηθεί το σύμβολο $\Big|_{y=f(x)}$, δηλαδή να γράψουμε $\frac{dg(f(x))}{dx} = \frac{dg(y)}{dy} \frac{df(x)}{dx}$ ή $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$. Πράγματι, τα σύμβολα $\frac{dg(y)}{dy}$ και $\frac{dz}{dy}$ υποδηλώνουν τη συνάρτηση $g'(y)$, δηλαδή συνάρτηση με ανεξάρτητη μεταβλητή y . Όμως το αποτέλεσμα πρέπει να είναι συνάρτηση με ανεξάρτητη μεταβλητή x , αφού όλα τα άλλα σύμβολα στις ισότητες αυτές έχουν ανεξάρτητη μεταβλητή x , οπότε πρέπει το y να αντικατασταθεί με το $f(x)$ ώστε να εμφανιστεί τελικά η μεταβλητή x . Μερικές φορές, βέβαια, χρησιμοποιούμε τις συντομεύσεις

$$\frac{dg(f(x))}{dx} = \frac{dg(y)}{dy} \frac{df(x)}{dx}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}.$$

έχοντας όμως κατά νου ότι στο τελικό αποτέλεσμα το y πρέπει να αντικατασταθεί με το $f(x)$. Ειδικά η τελευταία γραφή είναι πολύ εύκολο να απομνημονευτεί, αφού θυμίζει τον απλό κανόνα πολλαπλασιασμού λόγων. Θυμόμαστε, φυσικά, ότι τα $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ και $\frac{dy}{dx}$ δεν είναι λόγοι αλλά σύμβολα.

Παράδειγμα 6.21. Θα βρούμε την παράγωγο της $z = \sin(x^2 + 3)$ στο 2. Χρησιμοποιούμε την ενδιάμεση μεταβλητή $y = x^2 + 3$ και γράφουμε $z = \sin y$. Η παράγωγος της $y = x^2 + 3$ στο 2 είναι

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2} = \left. \frac{d(x^2+3)}{dx} \right|_{x=2} = 2x|_{x=2} = 4$$

και η παράγωγος της $z = \sin y$ στο $2^2 + 3 = 7$ είναι

$$\left. \frac{dz}{dy} \right|_{y=7} = \left. \frac{d \sin y}{dy} \right|_{y=7} = \cos y|_{y=7} = \cos 7.$$

Άρα

$$\left. \frac{d \sin(x^2+3)}{dx} \right|_{x=2} = \left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=2} = \left. \frac{dz}{dy} \right|_{y=7} \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2} = 4 \cos 7.$$

Παράδειγμα 6.22. Θα βρούμε την παράγωγο συνάρτηση της $z = \sin(x^2 + 3)$. Χρησιμοποιούμε την ενδιάμεση μεταβλητή $y = x^2 + 3$ και γράφουμε $z = \sin y$. Η παράγωγος συνάρτηση της $y = x^2 + 3$ είναι η

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(x^2+3)}{dx} = 2x$$

και η παράγωγος συνάρτηση της $z = \sin y$ είναι η

$$\frac{dz}{dy} = \frac{d \sin y}{dy} = \cos y.$$

Άρα

$$\frac{d \sin(x^2+3)}{dx} = \frac{dz}{dx} = \left. \frac{dz}{dy} \right|_{y=x^2+3} \frac{dy}{dx} = \cos y|_{y=x^2+3} 2x = 2x \cos(x^2 + 3).$$

Παράδειγμα 6.23. Θα βρούμε την παράγωγο συνάρτηση της $z = \sin^n x$. Χρησιμοποιούμε την ενδιάμεση μεταβλητή $y = \sin x$, οπότε $z = y^n$, και έχουμε

$$\frac{d \sin^n x}{dx} = \frac{dz}{dx} = \left. \frac{dz}{dy} \right|_{y=\sin x} \frac{dy}{dx} = ny^{n-1} \Big|_{y=\sin x} \cos x = n \sin^{n-1} x \cos x.$$

Πριν διατυπώσουμε τον επόμενο κανόνα, θα πούμε δύο λόγια για κάτι το οποίο θα αναπτύξουμε εκτενέστερα σε επόμενη ενότητα. Ας υποθέσουμε ότι η $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι αύξουσα στο A και ότι έχει παράγωγο στο $\xi \in A$. Επειδή η f είναι αύξουσα, ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0$ για κάθε $x \in A$, $x \neq \xi$. Πράγματι, αν $x > \xi$, τότε $f(x) \geq f(\xi)$ και, αν $x < \xi$, τότε $f(x) \leq f(\xi)$. Επομένως, η παράγωγος $f'(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ είναι είτε αριθμός ≥ 0 είτε $+\infty$. Ομοίως, βλέπουμε ότι, αν η f είναι φθίνουσα, τότε η παράγωγος $f'(\xi)$ είναι είτε αριθμός ≤ 0 είτε $-\infty$.

Κανόνας αντίστροφης συνάρτησης. Έστω διάστημα I και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο I και έστω $\xi \in I$. Γνωρίζουμε ότι το σύνολο τιμών της f είναι διάστημα J με $\eta = f(\xi) \in J$ και ότι η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : J \rightarrow I$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο J . Αν η f έχει παράγωγο στο ξ , τότε η f^{-1} έχει παράγωγο στο η και

$$(f^{-1})'(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{f'(\xi)}, & \text{αν } f'(\xi) \text{ είναι αριθμός } > 0, \\ 0, & \text{αν } f'(\xi) = +\infty, \\ +\infty, & \text{αν } f'(\xi) = 0. \end{cases}$$

Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα, τότε ισχύουν τα ίδια, με τις προφανείς αλλαγές: < 0 αντί > 0 και $-\infty$ αντί $+\infty$.

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε τον κανόνα της αντίστροφης συνάρτησης, γράφουμε:

$$(f^{-1})'(\eta) = \lim_{y \rightarrow \eta} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(\eta)}{y - \eta} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{x - \xi}{f(x) - f(\xi)} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{1}{\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}}.$$

Το τελευταίο όριο είναι ίσο με $\frac{1}{f'(\xi)}$, αν το $f'(\xi)$ είναι αριθμός > 0 , και με 0, αν $f'(\xi) = +\infty$. Στην περίπτωση $f'(\xi) = 0$, το $\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$ τείνει στο 0 και έχει μόνο θετικές τιμές, οπότε το $\frac{1}{\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}}$ τείνει στο $+\infty$. □

Με τους εναλλακτικούς συμβολισμούς ο κανόνας της αντίστροφης συνάρτησης γράφεται:

$$\left. \frac{df^{-1}(y)}{dy} \right|_{y=\eta} = \frac{1}{\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=\xi}}, \quad \left. \frac{dx}{dy} \right|_{y=\eta} = \frac{1}{\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=\xi}}.$$

Για τις παραγώγους συναρτήσεων γράφουμε:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}, \quad \frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=f^{-1}(y)}}, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=f^{-1}(y)}}.$$

Όπως και στον κανόνα της αλυσίδας, δεν επιτρέπεται να συντομεύσουμε τις δύο τελευταίες ισότητες σε $\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{\frac{df(x)}{dx}}$ και $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$, διότι η συνάρτηση $\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{dx}{dy}$, δηλαδή η παράγωγος της $x = f^{-1}(y)$, έχει ανεξάρτητη μεταβλητή y , ενώ η συνάρτηση $\frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}$ έχει ανεξάρτητη μεταβλητή x . Χρησιμοποιούμε, όμως, και τους συντομότερους τύπους

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{\frac{df(x)}{dx}}, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

έχοντας κατά νου ότι η μεταβλητή x η οποία προκύπτει στα δεύτερα μέλη πρέπει να αντικατασταθεί από το $f^{-1}(y)$ ώστε να προκύψει τελικά η μεταβλητή y . Ειδικά ο δεύτερος τύπος $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ είναι πολύ εύκολο να απομνημονευθεί, αφού θυμίζει τον ανάλογο τύπο απλοποίησης σύνθετου λόγου.

Ο κανόνας αντίστροφης συνάρτησης έχει το εξής γεωμετρικό περιεχόμενο. Τα γραφήματα μίας συνάρτησης και της αντίστροφής της είναι, όπως γνωρίζουμε, συμμετρικά ως προς την κύρια διαγώνιο με εξίσωση $y = x$. Αυτό συνεπάγεται ότι οι εφαπτόμενες ευθείες στο ένα γράφημα και οι αντίστοιχες εφαπτόμενες ευθείες στο άλλο γράφημα είναι συμμετρικές ως προς την κύρια διαγώνιο. Αυτό με τη σειρά του συνεπάγεται ότι οι κλίσεις των εφαπτόμενων ευθειών του ενός γραφήματος είναι αντίστροφες των κλίσεων των αντίστοιχων εφαπτόμενων ευθειών του άλλου γραφήματος. Η λόγος είναι απλός: δύο ευθείες συμμετρικές ως προς την ευθεία με εξίσωση $y = x$ έχουν αντίστροφες κλίσεις.

Παράδειγμα 6.24. Έχουμε ήδη αποδείξει στην ενότητα 6.4 τον τύπο $\frac{dy^{\frac{1}{n}}}{dy} = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}$ για την παράγωγο συνάρτηση της $y^{\frac{1}{n}}$. Θα δούμε τώρα μία δεύτερη απόδειξη, βασισμένη στον κανόνα της αντίστροφης συνάρτησης. Η $x = y^{\frac{1}{n}}$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση της $y = x^n$, οπότε

$$\frac{dy^{\frac{1}{n}}}{dy} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=y^{\frac{1}{n}}}} = \frac{1}{\left. nx^{n-1} \right|_{x=y^{\frac{1}{n}}}} = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}.$$

Παρεμπιπτόντως, ας αναφέρουμε ότι, με ένα ακόμη βήμα, χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας, μπορούμε να αποδείξουμε με δεύτερο τρόπο τον τύπο $\frac{dx^a}{dx} = ax^{a-1}$ για την παράγωγο συνάρτηση της $y = x^a$, αν $a \in \mathbb{Q}$. Πράγματι, αν $a = \frac{m}{n}$, όπου $m \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$, τότε ορίζουμε $u = x^{\frac{1}{n}}$ και $y = x^a = u^m$ και έχουμε ότι

$$\frac{dx^a}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \Big|_{u=x^{\frac{1}{n}}} \frac{du}{dx} = mu^{m-1} \Big|_{u=x^{\frac{1}{n}}} \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} = ax^{a-1}.$$

Παράδειγμα 6.25. Η $y = \sin x$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το διάστημα $[-1, 1]$. Η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $x = \arcsin y$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $[-1, 1]$ με σύνολο τιμών το $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Θα υπολογίσουμε την παράγωγο συνάρτηση της $x = \arcsin y$.

Η παράγωγος της $y = \sin x$ είναι

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x},$$

και δεν είναι ποτέ ίση με $+\infty$. Παρατηρήστε ότι από τις τιμές $\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x}$ επιλέξαμε αυτήν με το $+$, διότι ισχύει $\cos x \geq 0$ για κάθε $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Αν $\sqrt{1 - y^2} = \sqrt{1 - \sin^2 x} > 0$, τότε έχουμε

$$\frac{d \arcsin y}{dy} = \frac{1}{\frac{d \sin x}{dx} \Big|_{x=\arcsin y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x} \Big|_{x=\arcsin y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Αν $\sqrt{1 - y^2} = \sqrt{1 - \sin^2 x} = 0$, τότε $\frac{d \arcsin y}{dy} = +\infty$. Άρα

$$\frac{d \arcsin y}{dy} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, & \text{αν } -1 < y < 1, \\ +\infty, & \text{αν } y = \pm 1. \end{cases}$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε την παράγωγο συνάρτηση της $x = \arccos y$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$ και σύνολο τιμών το $[0, \pi]$.

$$\frac{d \arccos y}{dy} = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, & \text{αν } -1 < y < 1, \\ -\infty, & \text{αν } y = \pm 1. \end{cases}$$

Παράδειγμα 6.26. Η $y = \tan x$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το διάστημα $(-\infty, +\infty)$. Η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $x = \arctan y$ και είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Θα υπολογίσουμε την παράγωγο συνάρτηση της $x = \arctan y$. Η παράγωγος

$$\frac{d \tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

δεν είναι ποτέ ίση με 0 ή $+\infty$, οπότε

$$\frac{d \arctan y}{dy} = \frac{1}{\frac{d \tan x}{dx} \Big|_{x=\arctan y}} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x} \Big|_{x=\arctan y}} = \frac{1}{(1 + \tan^2 x) \Big|_{x=\arctan y}} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Άρα

$$\frac{d \arctan y}{dy} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε την παράγωγο συνάρτηση της $x = \operatorname{arccot} y$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $(0, \pi)$:

$$\frac{d \operatorname{arccot} y}{dy} = -\frac{1}{1 + y^2}.$$

Ασκήσεις

6.12. Υπολογίστε τις παραγώγους συναρτήσεων των $x^2 - 3x + 1 - \frac{x^3+2}{x^2+1}$, $\frac{x^3-x+4 \sin x}{x^2+\sin x+2}$, $\sin x + \tan x$, $\sin(x^n)$, $\tan^n x$, $\tan(x^n)$, $\sqrt[n]{1 + \cos x}$, $\frac{\sin^3 x}{\sin^2 x + 4}$, $\sin(\arccos x)$, $\arcsin(\cos x)$, $\tan(\arctan x)$, $\arctan(\tan x)$.

6.13. Θεωρήστε την $f(x) = \begin{cases} x^a \sin \frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0. \end{cases}$ Για ποιες τιμές του a είναι η f συνεχής στο $(-\infty, +\infty)$; Είναι η f παραγωγίσιμη στο $(-\infty, +\infty)$; Είναι η f' συνεχής στο $(-\infty, +\infty)$;

6.14. Από τον τύπο $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ βρείτε, με παραγωγίσεις, ανάλογους τύπους για τα αθροίσματα $x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n$ και $x + 4x^2 + 9x^3 + \dots + n^2x^n$.

6.15. Έστω ότι οι $f_1, \dots, f_n$ είναι όλες παραγωγίσιμες στο ξ και ότι καμία δεν έχει τιμή 0 στο ξ . Αποδείξτε ότι

$$\frac{(f_1 \cdots f_n)'(\xi)}{(f_1 \cdots f_n)(\xi)} = \frac{f_1'(\xi)}{f_1(\xi)} + \cdots + \frac{f_n'(\xi)}{f_n(\xi)}.$$

Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε επαγωγή.

6.16. Για ποιες ρητές συναρτήσεις $r(x)$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xr'(x)}{r(x)} = 0$;

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον γενικό τύπο ρητής συνάρτησης.

6.17. Υπάρχει διάστημα (a, b) και ρητή συνάρτηση $r(x)$ ώστε να ισχύει $r'(x) = \frac{1}{x}$ για κάθε $x \in (a, b)$;

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον γενικό τύπο ρητής συνάρτησης.

6.18. Αποδείξτε ότι η παράγωγος άρτιας συνάρτησης είναι περιττή συνάρτηση και η παράγωγος περιττής συνάρτησης είναι άρτια συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η παράγωγος περιοδικής συνάρτησης είναι περιοδική συνάρτηση.

6.19. Δείτε την ενότητα 4.8 για τον ορισμό της πολλαπλότητας ρίζας πολυωνύμου.

Έστω ότι το ξ είναι ρίζα του πολυωνύμου $p(x)$. Αποδείξτε ότι το ξ είναι ρίζα πολλαπλότητας m του $p(x)$, αν και μόνο αν είναι ρίζα πολλαπλότητας $m - 1$ του $p'(x)$.

6.20. Θεωρούμε πολυώνυμο $p(x)$ και $q(x)$, όπου το $p(x)$ έχει βαθμό $n \geq 2$ και n διαφορετικές ανά δύο ρίζες $x_1, \dots, x_n$ και το $q(x)$ έχει βαθμό $\leq n - 1$. Δηλαδή, $p(x) = a_n(x - x_1) \cdots (x - x_n)$, με $a_n \neq 0$, και $q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1x + b_0$.

(i) Αποδείξτε ότι ισχύει

$$\frac{q(x)}{p(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{q(x_k)}{p'(x_k)(x - x_k)}$$

για κάθε $x \neq x_1, \dots, x_n$.

Υπόδειξη: Βρείτε τα $p'(x_k)$ για $k = 1, \dots, n$ και παρατηρήστε ότι το $q(x) - \sum_{k=1}^n \frac{q(x_k)}{p'(x_k)} \frac{p(x)}{x - x_k}$ είναι πολυώνυμο βαθμού $\leq n - 1$ με n ρίζες, τα x_k για $k = 1, \dots, n$.

(ii) Αποδείξτε ότι $\sum_{k=1}^n \frac{q(x_k)}{p'(x_k)} = \frac{b_{n-1}}{a_n}$.

Υπόδειξη: Πολλαπλασιάστε με το x την ισότητα στο (i) και δείτε τι γίνεται όταν $x \rightarrow +\infty$.

(iii) Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+m)} = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{(-1)^k}{x+k}$ για κάθε $x \neq 0, -1, \dots, -m$.

6.21. Αν οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο ξ , βρείτε το $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)g(\xi) - f(\xi)g(x)}{x - \xi}$.

6.22. Κάποια χρονική στιγμή η ακτίνα ενός κυκλικού δίσκου έχει μήκος κ και ρυθμό μεταβολής ως προς τον χρόνο ίσο με μ . Υπολογίστε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του δίσκου ως προς τον χρόνο την ίδια χρονική στιγμή.

6.23. Κάποια χρονική στιγμή η ακτίνα ενός σφαιρικού μπαλονιού έχει μήκος κ και η παροχή αέρα στο μπαλόνι έχει ρυθμό μεταβολής ως προς τον χρόνο ίσο με μ . Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της ακτίνας ως προς τον χρόνο την ίδια χρονική στιγμή;

6.24. Μία μεταλλική ράβδος μήκους l έχει το ένα άκρο της στη μία πλευρά και το άλλο άκρο της στην άλλη πλευρά μίας ορθής γωνίας. Αν το ένα άκρο απομακρύνεται από την κορυφή της γωνίας με ταχύτητα v , παραμένοντας στην ίδια πλευρά της γωνίας, βρείτε την ταχύτητα με την οποία το άλλο άκρο προσεγγίζει την κορυφή, παραμένοντας στην ίδια πλευρά της γωνίας. Βρείτε, επίσης, τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης ενός από τα άκρα από την κορυφή ως προς την απόσταση του άλλου άκρου από την κορυφή.

6.7 Παραδείγματα παραγώγων, II

Στην ενότητα αυτή θα υπολογίσουμε τις παραγώγους τριών σημαντικών συναρτήσεων. Όμως, προηγουμένως, θα αποδείξουμε ένα σημαντικό όριο.

Πρόταση 6.4.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε ως πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$ το $(0, +\infty)$.

Γνωρίζουμε το όριο ακολουθίας: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$. Από αυτό, εύκολα, παίρνουμε τα όρια ακολουθιών

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} \rightarrow \frac{e}{1} = e, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow e \cdot 1 = e.$$

Τώρα παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$, οπότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει

$$e - \epsilon < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < e + \epsilon, \quad e - \epsilon < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < e + \epsilon$$

για κάθε $n \geq n_0$. Τότε για κάθε, όχι κατ' ανάγκη φυσικό, $t > n_0$ ισχύει $[t] \geq n_0$, οπότε

$$e - \epsilon < \left(1 + \frac{1}{[t]+1}\right)^{[t]} \leq \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \leq \left(1 + \frac{1}{[t]}\right)^{[t]+1} < e + \epsilon$$

–αιτιολογήστε τις δύο μεσαίες ανισότητες. Άρα για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 > 0$, ώστε να ισχύει $e - \epsilon < \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t < e + \epsilon$ ή, ισοδύναμα, $\left|\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t - e\right| < \epsilon$ για κάθε $t > n_0$. Άρα $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$. $\square$

Τώρα θα βρούμε την παράγωγο της λογαριθμικής συνάρτησης $\log_a x$, όπου $a > 0$, $a \neq 1$, με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$. Θα αποδείξουμε ότι

$$\frac{d \log_a x}{dx} = \frac{1}{\log a} \frac{1}{x} \quad \text{αν } x > 0.$$

Εκτός από το όριο $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$ της Πρότασης 6.4, θα μας χρειαστεί και το

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)} = \frac{1}{e} = \frac{1}{e}.$$

Από τη συνέχεια της $\log_a x$ και από τα δύο προηγούμενα όρια συνεπάγεται ότι

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \log_a \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = \log_a e = \frac{1}{\log a}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \log_a \left(1 - \frac{1}{t}\right)^t = \log_a \frac{1}{e} = -\frac{1}{\log a}.$$

Στον επόμενο υπολογισμό θα κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $t = \frac{x}{h}$.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{h} \log_a \left(\frac{x+h}{x}\right) = \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{x}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x} \lim_{t \rightarrow +\infty} t \log_a \left(1 + \frac{1}{t}\right) \\ &= \frac{1}{x} \lim_{t \rightarrow +\infty} \log_a \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = \frac{1}{\log a} \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Επίσης, στον επόμενο υπολογισμό θα κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $t = -\frac{x}{h}$.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{1}{h} \log_a \left(\frac{x+h}{x}\right) = \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{x}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right) = -\frac{1}{x} \lim_{t \rightarrow +\infty} t \log_a \left(1 - \frac{1}{t}\right) \\ &= -\frac{1}{x} \lim_{t \rightarrow +\infty} \log_a \left(1 - \frac{1}{t}\right)^t = \frac{1}{\log a} \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Άρα

$$\frac{d \log_a x}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \frac{1}{\log a} \frac{1}{x}.$$

Ειδική περίπτωση, όταν $a = e$, της παραγώγου της λογαριθμικής συνάρτησης είναι η

$$\frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x} \quad \text{αν } x > 0.$$

Παράδειγμα 6.27. Θα δούμε ότι

$$\frac{d \log |x|}{dx} = \frac{1}{x} \quad \text{αν } x \neq 0.$$

Πράγματι, στο $(0, +\infty)$ έχουμε

$$\frac{d \log |x|}{dx} = \frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x}$$

και στο $(-\infty, 0)$ έχουμε

$$\frac{d \log |x|}{dx} = \frac{d \log(-x)}{dx} = \frac{1}{-x} (-1) = \frac{1}{x}$$

από τον κανόνα της αλυσίδας.

Η επόμενη παράγωγος την οποία θα υπολογίσουμε είναι της εκθετικής συνάρτησης a^x , όπου $a > 0$, με πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$. Ο τύπος είναι:

$$\frac{da^x}{dx} = a^x \log a.$$

Αν $a > 0, a \neq 1$, τότε χρησιμοποιούμε τον κανόνα της αντίστροφης συνάρτησης. Η αντίστροφη συνάρτηση της $y = a^x$ είναι η $x = \log_a y$, οπότε

$$\frac{da^x}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{1}{\log a} \frac{1}{y}} = a^x \log a.$$

Αν $a = 1$, τότε η $1^x = 1$ είναι σταθερή και έχει παράγωγο μηδέν. Αλλά και η παράσταση $1^x \log 1$ είναι ίση με μηδέν, οπότε ισχύει ο τύπος της παραγώγου και σε αυτήν την περίπτωση.

Ως ειδική περίπτωση, έχουμε την παράγωγο της $y = e^x$:

$$\frac{de^x}{dx} = e^x.$$

Τέλος, θα υπολογίσουμε την παράγωγο της x^a , αν το a είναι *άρρητος*. Σε αυτήν την περίπτωση, η x^a έχει πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$, αν $a > 0$, και το $(0, +\infty)$, αν $a < 0$. Θα δούμε ότι

$$\frac{dx^a}{dx} = ax^{a-1} \quad \text{αν } a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ και αν } a > 1, x \geq 0 \text{ ή } a < 1, x > 0.$$

Έστω $x > 0$. Θα χρησιμοποιήσουμε την ισότητα $y = x^a = e^{\log(x^a)} = e^{a \log x}$ και τον κανόνα της αλυσίδας. Θεωρούμε την ενδιάμεση μεταβλητή $z = a \log x$, οπότε $y = e^z$ και

$$\frac{dx^a}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \Big|_{z=a \log x} \frac{dz}{dx} = e^z \Big|_{z=a \log x} \frac{a}{x} = e^{a \log x} \frac{a}{x} = x^a \frac{a}{x} = ax^{a-1}.$$

Αν $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ και $a < 0$, τότε η $y = x^a$ δεν ορίζεται καν στο 0. Αν $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ και $0 < a < 1$, τότε

$$\frac{dx^a}{dx} \Big|_{x=0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^a - 0^a}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} x^{a-1} = +\infty.$$

Τέλος, αν $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ και $a > 1$, τότε

$$\frac{dx^a}{dx} \Big|_{x=0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^a - 0^a}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} x^{a-1} = 0 = a0^{a-1}.$$

Ασκήσεις

6.25. Υπολογίστε τις παραγώγους των $\log(e^{3x^2+4} + \sin(x^{-\frac{5}{4}}))$, $\log_x 3$, $2^{x^2+1} \log_3(\sin x)$, $3^{-\sin(\log x)}$, $\sin(e^{\sqrt{\log(x^2+1)}})$, $x \log x$, $x \log(x \log(x \log x))$, $x \log(x \log(x \log(x \log x)))$.

6.26. Παρατηρήστε ότι τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x-1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^a - 1}{x-1}$$

είναι γνωστές παράγωγοι συγκεκριμένων συναρτήσεων σε συγκεκριμένα σημεία και ως τέτοιες υπολογίστε τα. Κατόπιν, χρησιμοποιώντας αυτά τα όρια, αποδείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x^a - 1} = \frac{1}{a}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^a - x^b}{x-1} = a - b, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^a - x^b}{\log x} = a - b, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \log \frac{a}{b}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} = a - b.$$

6.27. Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, έστω ότι ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και έστω $\xi > 0$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο ξ , βρείτε τα όρια $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(\xi+h)}{f(\xi)} \right)^{\frac{1}{h}}$, $\lim_{x \rightarrow \xi} \left(\frac{f(x)}{f(\xi)} \right)^{\frac{1}{\log x - \log \xi}}$.

Υπόδειξη: $a^b = e^{b \log a}$ για $a > 0$.

6.28. Έστω $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $a < \xi < b$ και έστω ότι ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Αν οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο ξ , αποδείξτε ότι και η $f^g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο ξ και υπολογίστε την παράγωγό της στο ξ .

Υπολογίστε τις παραγώγους των x^x , $(x^2 + 1)^{\sin x}$, $(x^2 - 3)^{\frac{x-2}{x+2}}$, $|x - 1|^{x-2}|x - 2|^{x-1}$, $(\log x)^{\log x}$.

Υπόδειξη: Δείτε την υπόδειξη στην άσκηση 5.10.

6.29. Με κατάλληλες αλλαγές μεταβλητής αποδείξτε ότι

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{t}\right)^t = e^x \quad \text{για κάθε } x$$

διακρίνοντας περιπτώσεις: $x > 0$, $x = 0$, $x < 0$.

6.30. Δείτε στην άσκηση 5.44 τις συναρτήσεις οι οποίες έχουν οριστεί εκεί και αποδείξτε ότι

$$\frac{d \cosh x}{dx} = \sinh x, \quad \frac{d \sinh x}{dx} = \cosh x, \quad \frac{d \tanh x}{dx} = \frac{1}{\cosh^2 x}, \quad \frac{d \coth x}{dx} = -\frac{1}{\sinh^2 x} \quad \text{αν } x \neq 0,$$

$$\frac{d \operatorname{arccosh} y}{dy} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}} \quad \text{αν } y > 1, \quad \frac{d \operatorname{arcsinh} y}{dy} = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}},$$

$$\frac{d \operatorname{arctanh} y}{dy} = \frac{1}{1 - y^2} \quad \text{αν } |y| < 1, \quad \frac{d \operatorname{arcoth} y}{dy} = \frac{1}{1 - y^2} \quad \text{αν } |y| > 1.$$

Παρατηρήστε την ομοιότητα αυτών των παραγωγίσεων με ανάλογες παραγωγίσεις των τριγωνομετρικών και των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

6.8 Καμπύλη και εφαπτόμενη ευθεία καμπύλης

Μέχρι τώρα έχουμε χρησιμοποιήσει τον όρο «καμπύλη» βασισμένοι στην απλοϊκή οπτική αντίληψη την οποία έχουμε για τα γεωμετρικά αντικείμενα στα οποία αποδίδουμε συνήθως αυτόν τον χαρακτηρισμό. Ακολουθεί ο μαθηματικός ορισμός της έννοιας της καμπύλης.

Ορισμός 6.5. Έστω διάστημα I και συνεχείς συναρτήσεις $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ και $y : I \rightarrow \mathbb{R}$. Τότε η συνάρτηση $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) \quad \text{για } t \in I$$

χαρακτηρίζεται **καμπύλη στο επίπεδο**.

Το σύνολο τιμών

$$C = \{\mathbf{r}(t) \mid t \in I\} = \{(x(t), y(t)) \mid t \in I\}$$

είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, δηλαδή του xy -επιπέδου, και χαρακτηρίζεται **τροχιά** της καμπύλης.

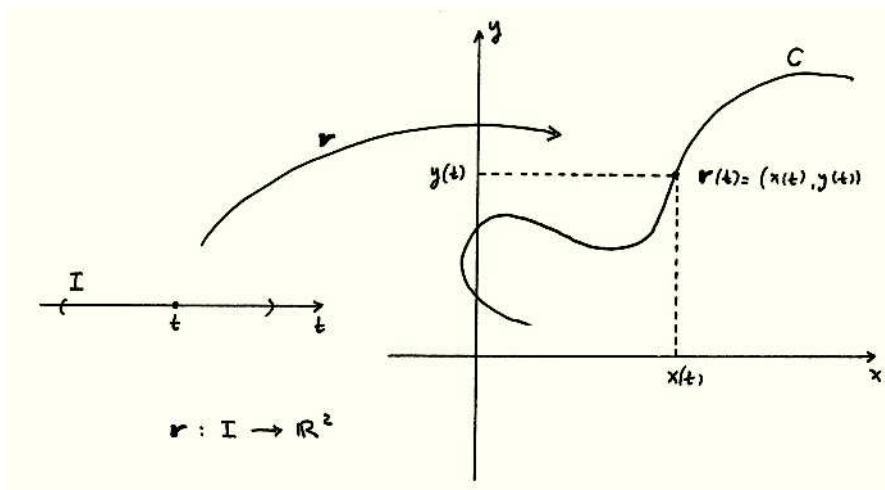
Η μεταβλητή t ονομάζεται **παράμετρος** της καμπύλης.

Όταν το t διατρέχει αυξανόμενο το διάστημα I , τότε το σημείο $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ διατρέχει την τροχιά C και η κατεύθυνση προς την οποία αυτό κινείται ονομάζεται **φορά διαγραφής** της καμπύλης.

Παρατηρήστε το σχήμα 6.5.

Φυσικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιοδήποτε σύμβολο αντί του t για την παράμετρο: $\mathbf{r}(u) = (x(u), y(u))$, $\mathbf{r}(s) = (x(s), y(s))$ κ.τ.λ.

Δεν θα ασχοληθούμε με τη μεθοδική παρουσίαση της θεωρίας των καμπυλών. Θα δούμε μόνο κάποια απλά παραδείγματα, ήδη γνωστά από τη στοιχειώδη Αναλυτική Γεωμετρία, με στόχο να ορίσουμε την έννοια της **εφαπτόμενης ευθείας** σε σημείο της καμπύλης και, λίγο πιο μετά, την έννοια του **μήκους** καμπύλης.



Σχήμα 6.5

Παράδειγμα 6.28. Θεωρούμε τις συνεχείς συναρτήσεις $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $x(t) = \kappa t + \mu$ και $y(t) = \lambda t + \nu$, όπου ένα τουλάχιστον από τα κ, λ είναι $\neq 0$. Η καμπύλη η οποία ορίζεται από αυτές τις συναρτήσεις είναι η συνάρτηση $\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = (\kappa t + \mu, \lambda t + \nu) = t(\kappa, \lambda) + (\mu, \nu) \quad \text{για } t \in \mathbb{R}.$$

Η τροχιά αυτής της καμπύλης είναι η **ευθεία** η οποία διέρχεται από το σημείο $\mathbf{r}(0) = (x(0), y(0)) = (\mu, \nu)$ και είναι παράλληλη με το διάνυσμα $(\kappa, \lambda) \neq (0, 0)$ το οποίο ονομάζεται **διάνυσμα κατεύθυνσης** της ευθείας. Όταν το t αυξάνεται διατρέχοντας το $\mathbb{R}$, τότε το σημείο $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ διατρέχει την ευθεία κινούμενο στην ίδια κατεύθυνση με το διάνυσμα (κ, λ) .

Η καρτεσιανή εξίσωση της ευθείας είναι

$$\lambda x - \kappa y = \lambda \mu - \kappa \nu,$$

δηλαδή της μορφής $ax + by = c$ με $a = \lambda, b = -\kappa, c = \lambda \mu - \kappa \nu$.

Παράδειγμα 6.29. Θεωρούμε τις συνεχείς συναρτήσεις $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $x(t) = r \cos t + x_0$ και $y(t) = r \sin t + y_0$, όπου $r > 0$. Η καμπύλη η οποία ορίζεται από αυτές τις συναρτήσεις είναι η συνάρτηση $\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = (r \cos t + x_0, r \sin t + y_0) = r(\cos t, \sin t) + (x_0, y_0) \quad \text{για } t \in \mathbb{R}.$$

Η τροχιά της καμπύλης είναι ο **κύκλος** με ακτίνα r και κέντρο (x_0, y_0) και με καρτεσιανή εξίσωση

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Όταν το t αυξάνεται διατρέχοντας το $\mathbb{R}$, τότε το σημείο $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ περιστρέφεται άπειρες φορές πάνω στον κύκλο με φορά περιστροφής αντίθετη εκείνης των δεικτών του ρολογιού. Όταν το t αυξάνεται διατρέχοντας το $[0, 2\pi]$ ή, γενικότερα, οποιοδήποτε διάστημα $[a, a + 2\pi]$, τότε το σημείο $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ κάνει ακριβώς μία πλήρη περιστροφή πάνω στον κύκλο.

Παράδειγμα 6.30. Θεωρούμε τις συνεχείς συναρτήσεις $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $x(t) = \kappa \cos t + x_0$ και $y(t) = \lambda \sin t + y_0$, όπου $\kappa > 0, \lambda > 0$. Η καμπύλη η οποία ορίζεται από αυτές τις συναρτήσεις είναι η συνάρτηση $\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = (\kappa \cos t + x_0, \lambda \sin t + y_0) \quad \text{για } t \in \mathbb{R}.$$

Η τροχιά της καμπύλης είναι **έλλειψη** με οριζόντιο και κατακόρυφο άξονα συμμετρίας την οριζόντια και την κατακόρυφη ευθεία οι οποίες διέρχονται από το σημείο (x_0, y_0) . Η καρτεσιανή εξίσωση της έλλειψης είναι

$$\left(\frac{x-x_0}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{\lambda}\right)^2 = 1.$$

Το μήκος του οριζώντιου άξονα της έλλειψης είναι 2κ και το μήκος του κατακόρυφου άξονά της είναι 2λ . Όταν το t αυξάνεται διατρέχοντας το $\mathbb{R}$, τότε το σημείο $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ περιστρέφεται άπειρες φορές πάνω στην έλλειψη με φορά περιστροφής αντίθετη εκείνης των δεικτών του ρολογιού. Όταν το t αυξάνεται διατρέχοντας οποιοδήποτε διάστημα $[a, a + 2\pi]$, τότε το σημείο $(x(t), y(t))$ κάνει ακριβώς μία πλήρη περιστροφή πάνω στην έλλειψη.

Παράδειγμα 6.31. Θεωρούμε διάστημα I και συνεχή συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Τώρα θεωρούμε τις συνεχείς συναρτήσεις $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ και $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $x(t) = t$ και $y(t) = f(t)$. Η καμπύλη η οποία ορίζεται από αυτές τις συναρτήσεις είναι η συνάρτηση $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = (t, f(t)) \quad \text{για } t \in I.$$

Η τροχιά της καμπύλης είναι το σύνολο $\{(t, f(t)) \mid t \in I\}$, δηλαδή το γράφημα της f . Όταν το t αυξάνεται διατρέχοντας το I , τότε το σημείο $\mathbf{r}(t) = (t, f(t))$ διατρέχει το γράφημα της f προς τα δεξιά.

Με ανάλογο τρόπο ορίζεται μία καμπύλη στον χώρο.

Ορισμός 6.6. Έστω διάστημα I και συνεχείς συναρτήσεις $x : I \rightarrow \mathbb{R}$, $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ και $z : I \rightarrow \mathbb{R}$. Τότε η συνάρτηση $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τιμές

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad \text{για } t \in I$$

χαρακτηρίζεται **καμπύλη στον χώρο**.

Το σύνολο τιμών

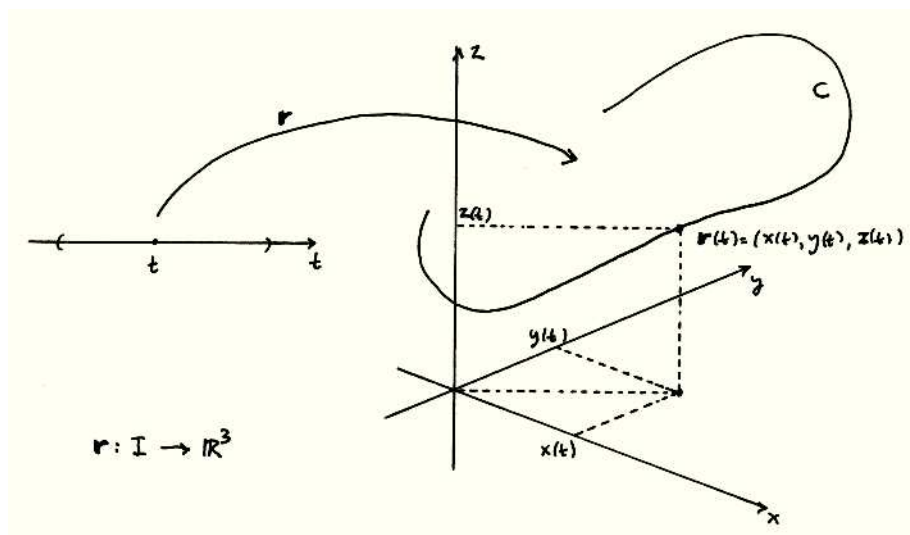
$$C = \{\mathbf{r}(t) \mid t \in I\} = \{(x(t), y(t), z(t)) \mid t \in I\}$$

είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$, δηλαδή του xyz -χώρου, και χαρακτηρίζεται **τροχιά** της καμπύλης.

Η μεταβλητή t ονομάζεται **παράμετρος** της καμπύλης.

Όταν το t διατρέχει αυξανόμενο το διάστημα I , τότε το σημείο $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ διατρέχει την τροχιά C και η κατεύθυνση προς την οποία αυτό κινείται ονομάζεται **φορά διαγραφής** της καμπύλης.

Παρατηρήστε το σχήμα 6.6.



Σχήμα 6.6

Παράδειγμα 6.32. Θεωρούμε τις συνεχείς συναρτήσεις $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $x(t) = \kappa t + \mu$, $y(t) = \lambda t + \nu$ και $z(t) = \rho t + \sigma$, όπου ένα τουλάχιστον από τα κ, λ, ρ είναι $\neq 0$. Η καμπύλη η οποία ορίζεται από αυτές τις συναρτήσεις είναι η συνάρτηση $\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (\kappa t + \mu, \lambda t + \nu, \rho t + \sigma) = t(\kappa, \lambda, \rho) + (\mu, \nu, \sigma) \quad \text{για } t \in \mathbb{R}.$$

Η τροχιά της καμπύλης είναι η **ευθεία** η οποία διέρχεται από το σημείο $\mathbf{r}(0) = (x(0), y(0), z(0)) = (\mu, \nu, \sigma)$ και είναι παράλληλη με το διάνυσμα $(\kappa, \lambda, \rho) \neq (0, 0, 0)$, το **διάνυσμα κατεύθυνσης** της ευθείας. Όταν το t αυξάνεται διατρέχοντας το $\mathbb{R}$, τότε το σημείο $(x(t), y(t), z(t))$ διατρέχει την ευθεία κινούμενο στην ίδια κατεύθυνση με το διάνυσμα (κ, λ, ρ) .

Παράδειγμα 6.33. Θεωρούμε τις συνεχείς συναρτήσεις $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $x(t) = r \cos t + x_0$, $y(t) = r \sin t + y_0$ και $z(t) = \lambda t + z_0$, όπου $r > 0$, $\lambda > 0$. Η καμπύλη η οποία ορίζεται είναι η συνάρτηση $\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (r \cos t + x_0, r \sin t + y_0, \lambda t + z_0) \text{ για } t \in \mathbb{R}.$$

Η τροχιά της καμπύλης είναι «ελικοειδής» και βρίσκεται πάνω σε μία κυλινδρική επιφάνεια. Όταν το t αυξάνεται διατρέχοντας το $\mathbb{R}$, τότε το $(x(t), y(t)) = (r \cos t + x_0, r \sin t + y_0)$, δηλαδή η προβολή του $(x(t), y(t), z(t))$ στο xy -επίπεδο, κάνει άπειρες περιστροφές πάνω στον κύκλο με κέντρο (x_0, y_0) και ακτίνα r με φορά περιστροφής αντίθετη εκείνης των δεικτών του ρολογιού και, ταυτόχρονα, το $z(t) = \lambda t + z_0$ διατρέχει προς τα πάνω ολόκληρο τον z -άξονα. Επομένως, το σημείο $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ κάνει μία *περιστροφική και, ταυτόχρονα, κατακόρυφη κίνηση* σε σταθερή απόσταση r από την ευθεία l η οποία τέμνει κάθετα το xy -επίπεδο στο σημείο $(x_0, y_0, 0)$. Επίσης, για κάθε t το σημείο $\mathbf{r}(t + 2\pi)$ βρίσκεται ακριβώς από πάνω από το σημείο $\mathbf{r}(t)$ και σε απόσταση $2\pi\lambda$ από αυτό: αυτή η σταθερή διαφορά ύψους είναι το λεγόμενο *βήμα* της ελικοειδούς καμπύλης.

Πριν συνεχίσουμε, δίνουμε έναν ορισμό.

Ορισμός 6.7. Έστω καμπύλη $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$ με τύπο $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ ή $(x(t), y(t), z(t))$. Ονομάζουμε **(διανυσματική) παράγωγο** στο $t_0 \in I$ της $\mathbf{r}$ το

$$\mathbf{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) \text{ ή } (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)),$$

αρκεί, φυσικά, οι συντεταγμένες συναρτήσεις να είναι παραγωγίσιμες στο t_0 . Με άλλα λόγια, η διανυσματική παράγωγος προκύπτει παραγωγίζοντας κάθε συντεταγμένη συνάρτηση ξεχωριστά.

Θα βρούμε τώρα την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στην τροχιά μίας καμπύλης στο επίπεδο ή στον χώρο, σε κάποιο σημείο της.

Έστω καμπύλη $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ στο επίπεδο η οποία ορίζεται από τις συνεχείς συναρτήσεις $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ και $y : I \rightarrow \mathbb{R}$. Έστω, επίσης, το σημείο $\mathbf{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$ της τροχιάς για κάποιο εσωτερικό σημείο t_0 του I . Θεωρούμε μεταβλητό κοντινό σημείο $t_0 + h$ στο I και το αντίστοιχο σημείο $\mathbf{r}(t_0 + h) = (x(t_0 + h), y(t_0 + h))$ της τροχιάς. Τότε η μεταβλητή ευθεία l_h η οποία περιέχει τα δύο σημεία, το σταθερό $\mathbf{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$ και το μεταβλητό $\mathbf{r}(t_0 + h) = (x(t_0 + h), y(t_0 + h))$, ορίζεται από τις συναρτήσεις

$$x_h(t) = \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h}(t - t_0) + x(t_0), \quad y_h(t) = \frac{y(t_0 + h) - y(t_0)}{h}(t - t_0) + y(t_0)$$

για $t \in \mathbb{R}$. Πράγματι, οι δύο συναρτήσεις έχουν τη μορφή $x_h(t) = \kappa t + \mu$ και $y_h(t) = \lambda t + \nu$, όπως περιγράφεται στο παράδειγμα 6.28, και, αν $t = t_0$, τότε δίνουν το σημείο $\mathbf{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$, ενώ, αν $t = t_0 + h$, τότε δίνουν το σημείο $\mathbf{r}(t_0 + h) = (x(t_0 + h), y(t_0 + h))$.

Τώρα, είναι σαφές, γεωμετρικά, ότι όταν το h προσεγγίζει το 0, τότε η ευθεία l_h προσεγγίζει την εφαπτόμενη ευθεία l_0 στην τροχιά της καμπύλης στο σημείο της $(x(t_0), y(t_0))$. Από την άλλη μεριά, όταν το h προσεγγίζει το 0, τότε οι συντελεστές $\frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h}$ και $\frac{y(t_0 + h) - y(t_0)}{h}$ του $t - t_0$ στους τύπους των συναρτήσεων $x_h(t)$ και $y_h(t)$ προσεγγίζουν τους αριθμούς $x'(t_0)$ και $y'(t_0)$, οπότε οι συναρτήσεις $x_h(t)$ και $y_h(t)$ προσεγγίζουν τις συναρτήσεις

$$x_0(t) = x'(t_0)(t - t_0) + x(t_0), \quad y_0(t) = y'(t_0)(t - t_0) + y(t_0)$$

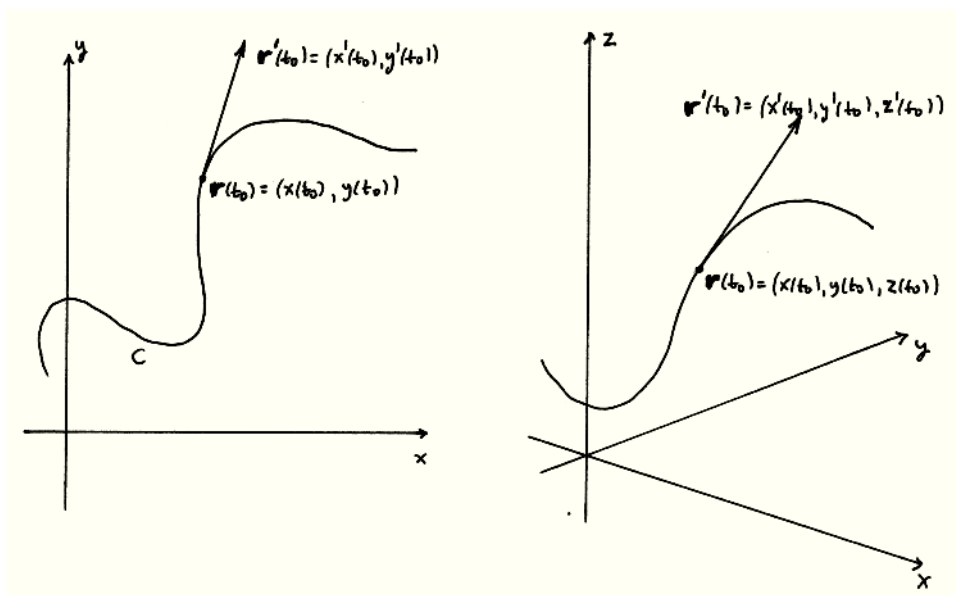
για $t \in \mathbb{R}$. Επομένως, αυτές οι συναρτήσεις $x_0(t)$ και $y_0(t)$ ορίζουν την εφαπτόμενη ευθεία l_0 . Από αυτές τις συναρτήσεις βλέπουμε ότι το διάνυσμα κατεύθυνσης της εφαπτόμενης ευθείας l_0 είναι

το $\mathbf{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$. Επειδή η εφαπτόμενη ευθεία l_0 στην τροχιά της καμπύλης στο σημείο της $\mathbf{r}(t_0)$ είναι παράλληλη με το διάνυσμα κατεύθυνσής της, δηλαδή το $\mathbf{r}'(t_0)$, είναι φανερό ότι, αν θεωρήσουμε ότι το $\mathbf{r}'(t_0)$ έχει αρχή το σημείο $\mathbf{r}(t_0)$, και όχι το $(0, 0)$, τότε:

Το $\mathbf{r}'(t_0)$, με αρχή το σημείο $\mathbf{r}(t_0)$, είναι εφαπτόμενο διάνυσμα στην τροχιά της καμπύλης στο σημείο της $\mathbf{r}(t_0)$.

Παρατηρήστε το αριστερό από τα σχήματα 6.7.

Προσέξτε: για να ορίζεται ευθεία από τις συναρτήσεις $x'(t_0)(t - t_0) + x(t_0)$, $y'(t_0)(t - t_0) + y(t_0)$, πρέπει ένα τουλάχιστον από τα $x'(t_0)$, $y'(t_0)$ να είναι $\neq 0$, δηλαδή η διανυσματική παράγωγος $\mathbf{r}'(t_0)$ πρέπει να είναι μη-μηδενικό διάνυσμα.



Σχήμα 6.7

Με εντελώς ανάλογο τρόπο βρίσκουμε ότι, αν μία καμπύλη $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ στον χώρο ορίζεται από τις συνεχείς συναρτήσεις $x : I \rightarrow \mathbb{R}$, $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ και $z : I \rightarrow \mathbb{R}$, τότε η εφαπτόμενη ευθεία l_0 στην τροχιά της καμπύλης στο σημείο της $\mathbf{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ ορίζεται από τις συναρτήσεις

$$x_0(t) = x'(t_0)(t - t_0) + x(t_0), \quad y_0(t) = y'(t_0)(t - t_0) + y(t_0), \quad z_0(t) = z'(t_0)(t - t_0) + z(t_0)$$

για $t \in \mathbb{R}$. Το διάνυσμα κατεύθυνσης της ευθείας l_0 είναι το $\mathbf{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$, οπότε:

Το $\mathbf{r}'(t_0)$, με αρχή το σημείο $\mathbf{r}(t_0)$, είναι εφαπτόμενο διάνυσμα στην τροχιά της καμπύλης στο σημείο της $\mathbf{r}(t_0)$.

Παρατηρήστε το δεξιό από τα σχήματα 6.7.

Προσέξτε: για να ορίζεται ευθεία από τις συναρτήσεις $x'(t_0)(t - t_0) + x(t_0)$, $y'(t_0)(t - t_0) + y(t_0)$, $z'(t_0)(t - t_0) + z(t_0)$, πρέπει ένα τουλάχιστον από τα $x'(t_0)$, $y'(t_0)$, $z'(t_0)$ να είναι $\neq 0$, δηλαδή η διανυσματική παράγωγος $\mathbf{r}'(t_0)$ πρέπει να είναι μη-μηδενικό διάνυσμα.

Παράδειγμα 6.34. Στο παράδειγμα 6.30 η καμπύλη $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = (r \cos t + x_0, r \sin t + y_0)$ έχει ως τροχιά τον κύκλο με ακτίνα r και κέντρο (x_0, y_0) . Η εφαπτόμενη ευθεία στην τροχιά της καμπύλης στο σημείο $\mathbf{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0)) = (r \cos t_0 + x_0, r \sin t_0 + y_0)$ ορίζεται από τις συναρτήσεις

$$x'(t_0)(t - t_0) + x(t_0) = -r \sin t_0(t - t_0) + r \cos t_0 + x_0, \quad y'(t_0)(t - t_0) + y(t_0) = r \cos t_0(t - t_0) + r \sin t_0 + y_0,$$

με διάνυσμα κατεύθυνσής της το $\mathbf{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) = (-r \sin t_0, r \cos t_0)$. Το διάνυσμα αυτό, αν θεωρήσουμε ότι έχει αρχή του το σημείο $\mathbf{r}(t_0)$, είναι εφαπτόμενο διάνυσμα στην τροχιά της καμπύλης, δηλαδή στον κύκλο, στο σημείο $\mathbf{r}(t_0)$. Αυτό μπορούμε να το επιβεβαιώσουμε ως εξής.

Το «ακτινικό διάνυσμα» από το κέντρο του κύκλου στο σημείο $\mathbf{r}(t_0)$ είναι το $\mathbf{r}(t_0) - (x_0, y_0) = (r \cos t_0, r \sin t_0)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\mathbf{r}'(t_0)$, αφού το εσωτερικό τους γινόμενο είναι

$$(\mathbf{r}(t_0) - (x_0, y_0)) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = (r \cos t_0, r \sin t_0) \cdot (-r \sin t_0, r \cos t_0) = -r^2 \cos t_0 \sin t_0 + r^2 \sin t_0 \cos t_0 = 0.$$

Επομένως, το $\mathbf{r}'(t_0)$, με αρχή το $\mathbf{r}(t_0)$, είναι εφαπτόμενο στον κύκλο στο σημείο $\mathbf{r}(t_0)$.

Παράδειγμα 6.35. Οι συνεχείς συναρτήσεις $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $x(t) = t \cos t$ και $y(t) = \sin t$ ορίζουν καμπύλη $\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ στο επίπεδο με τύπο

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = (t \cos t, \sin t).$$

Η εφαπτόμενη ευθεία στην τροχιά της καμπύλης στο σημείο $\mathbf{r}(0) = (x(0), y(0)) = (0, 0)$ ορίζεται από τις συναρτήσεις

$$x'(0)(t - 0) + x(0) = t, \quad y'(0)(t - 0) + y(0) = t,$$

και το διάνυσμα κατεύθυνσής της είναι το $\mathbf{r}'(0) = (x'(0), y'(0)) = (1, 1)$. Επίσης, το $\mathbf{r}'(0)$ είναι εφαπτόμενο διάνυσμα στην τροχιά της καμπύλης στο σημείο της $\mathbf{r}(0)$. Στην περίπτωση αυτή, το $\mathbf{r}'(0)$ δεν χρειάζεται να αλλάξει την αρχή του, διότι το $\mathbf{r}(0)$ είναι το $(0, 0)$.

Παράδειγμα 6.36. Οι συνεχείς συναρτήσεις $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $x(t) = t$, $y(t) = t^2$ και $z(t) = t^3$ ορίζουν καμπύλη $\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ στον χώρο με τύπο

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (t, t^2, t^3).$$

Η εφαπτόμενη ευθεία της στο σημείο $\mathbf{r}(1) = (x(1), y(1), z(1)) = (1, 1, 1)$ ορίζεται από τις συναρτήσεις

$$x'(1)(t - 1) + x(1) = t, \quad y'(1)(t - 1) + y(1) = 2t - 1, \quad z'(1)(t - 1) + z(1) = 3t - 2,$$

και το διάνυσμα κατεύθυνσής της είναι το $\mathbf{r}'(1) = (x'(1), y'(1), z'(1)) = (1, 2, 3)$. Το $\mathbf{r}'(1)$, με αρχή του το σημείο $\mathbf{r}(1)$, είναι εφαπτόμενο διάνυσμα στην τροχιά της καμπύλης στο σημείο της $\mathbf{r}(1)$.

Ασκήσεις

6.31. Ελέγξτε τυπικά το προφανές: η εφαπτόμενη ευθεία σε μία ευθεία, σε οποιοδήποτε σημείο της, είναι η ίδια ευθεία.

6.32. Βρείτε την εφαπτόμενη ευθεία σε κάθε σημείο μίας έλλειψης.

6.33. Βρείτε την εφαπτόμενη ευθεία σε κάθε σημείο της κυλινδρικής ελικοειδούς καμπύλης του παραδείγματος 6.33 η οποία ορίζεται από τις $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $x(t) = r \cos t + x_0$, $y(t) = r \sin t + y_0$, $z(t) = \lambda t + z_0$, όπου $r > 0$, $\lambda > 0$.

6.34. Βρείτε την εφαπτόμενη ευθεία σε κάθε σημείο της κωνικής ελικοειδούς καμπύλης η οποία ορίζεται από τις $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $x(t) = rt \cos t + x_0$, $y(t) = rt \sin t + y_0$, $z(t) = \lambda t + z_0$, όπου $r > 0$, $\lambda > 0$. Γιατί χρησιμοποιούμε τον χαρακτηρισμό «κωνική»;

6.35. (i) Θεωρήστε το σύνολο $C = \{(x, y) | y^4 = x^3\}$. Αποδείξτε ότι το C είναι η τροχιά της καμπύλης $\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο $\mathbf{r}(t) = (t^4, t^3)$. Επίσης, το C είναι η τροχιά της καμπύλης $\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο $\mathbf{r}(t) = (|t|^{\frac{4}{3}}, t)$. Τέλος, το C είναι η ένωση των τροχιών των καμπυλών $\mathbf{r} : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $\mathbf{r}(t) = (t, t^{\frac{3}{4}})$ και $\mathbf{r}(t) = (t, -t^{\frac{3}{4}})$. Και με τους τρεις τρόπους παραμετρικοποίησης του C βρείτε την εφαπτόμενη ευθεία σε κάθε σημείο του. Προσέξτε ιδιαίτερος το σημείο $(0, 0)$: ο ένας από τους τρεις τρόπους δεν ορίζει εφαπτόμενη ευθεία στο $(0, 0)$.

(ii) Να επαναλάβετε τα προηγούμενα για το σύνολο $C = \{(x, y) | y^2 = x^3\}$. Μήπως τώρα υπάρχει κάποιο πρόβλημα με την εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο $(0, 0)$;

6.36. (i) Έστω $a > 0$. Θεωρήστε το σύνολο $C = \{(x, y) \mid x^2 - y^2 = a^2\}$. Αποδείξτε ότι το C είναι η ένωση των τροχιών των καμπυλών $\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπους $\mathbf{r}(t) = (\frac{a}{2}(e^t + e^{-t}), \frac{a}{2}(e^t - e^{-t}))$ και $\mathbf{r}(t) = (-\frac{a}{2}(e^t + e^{-t}), \frac{a}{2}(e^t - e^{-t}))$. Σύμφωνα με την άσκηση 5.44, μπορούμε να γράψουμε αυτούς τους τύπους ως εξής: $\mathbf{r}(t) = (a \cosh t, a \sinh t)$ και $\mathbf{r}(t) = (-a \cosh t, a \sinh t)$. Ακόμη, αποδείξτε ότι το C είναι η ένωση των τροχιών των καμπυλών $\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπους $\mathbf{r}(t) = (\sqrt{t^2 + a^2}, t)$ και $\mathbf{r}(t) = (-\sqrt{t^2 + a^2}, t)$. Και με τους δύο τρόπους παραμετρικοποίησης του C βρείτε την εφαπτόμενη ευθεία σε κάθε σημείο του.

(ii) Έστω $b > 0$. Θεωρήστε το σύνολο $D = \{(x, y) \mid xy = b\}$. Αποδείξτε ότι το D είναι η ένωση των τροχιών των καμπυλών $\mathbf{r} : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ και $\mathbf{r} : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με κοινό τύπο $\mathbf{r}(t) = (t, \frac{b}{t})$. Βρείτε την εφαπτόμενη ευθεία σε κάθε σημείο του D .

(iii) Αποδείξτε ότι σε οποιοδήποτε κοινό σημείο (x, y) των C και D τα δύο σύνολα τέμνονται κάθετα, δηλαδή ότι οι εφαπτόμενες ευθείες τους στο κοινό σημείο είναι κάθετες.

6.37. Έστω $b > 0$. Θεωρήστε το σύνολο $D = \{(x, y) \mid xy = b\}$. Αποδείξτε, ότι αν πάρουμε οποιαδήποτε ευθεία εφαπτόμενη στο D , τότε το ευθύγραμμο τμήμα της το οποίο αποκόπτεται από τον x -άξονα και τον y -άξονα διχοτομείται από το σημείο επαφής της εφαπτόμενης ευθείας με το D .

6.38. Έστω $a > 0$. Θεωρήστε το σύνολο $C = \{(x, y) \mid \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = a\}$. Αποδείξτε ότι, αν πάρουμε οποιαδήποτε ευθεία εφαπτόμενη στο C , τότε το ευθύγραμμο τμήμα της το οποίο αποκόπτεται από τον x -άξονα και τον y -άξονα έχει σταθερό μήκος $a^{\frac{3}{2}}$. Σχεδιάστε το σύνολο C .

6.39. Ένα όχημα κινείται με μη-μηδενική ταχύτητα πάνω στο $\{(x, y) \mid y^2 = 4x^3\}$. Σε ποια θέση του οχήματος ο ρυθμός μεταβολής της πρώτης συντεταγμένης του ως προς τον χρόνο είναι διπλάσιος από τον ρυθμό μεταβολής της δεύτερης συντεταγμένης του ως προς τον χρόνο;

6.9 Θεωρήματα Fermat, Rolle και Μέσης Τιμής (Lagrange, Cauchy)

Ορισμός 6.8. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $\xi \in A$.

(i) Λέμε ότι το ξ είναι **σημείο (ολικού) μεγίστου** της f , αν ισχύει $f(x) \leq f(\xi)$ για κάθε $x \in A$. Λέμε ότι το ξ είναι **σημείο τοπικού μεγίστου** της f , αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) \leq f(\xi)$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $|x - \xi| < \delta$.

(ii) Λέμε ότι το ξ είναι **σημείο (ολικού) ελαχίστου** της f , αν ισχύει $f(x) \geq f(\xi)$ για κάθε $x \in A$. Λέμε ότι το ξ είναι **σημείο τοπικού ελαχίστου** της f , αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) \geq f(\xi)$ για κάθε $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $|x - \xi| < \delta$.

(iii) Λέμε ότι το ξ είναι **σημείο (ολικού) ακροτάτου** της f , αν είναι σημείο (ολικού) μεγίστου ή (ολικού) ελαχίστου της f . Λέμε ότι το ξ είναι **σημείο τοπικού ακροτάτου** της f , αν είναι σημείο τοπικού μεγίστου ή τοπικού ελαχίστου της f .

Με άλλα λόγια, το ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου ή τοπικού ελαχίστου της f , αν η τιμή την οποία αυτή παίρνει στο ξ είναι μέγιστη ή ελάχιστη, αντιστοίχως, ανάμεσα σε όλες τις άλλες τιμές τις οποίες παίρνει κοντά στο ξ .

Στο γράφημα της f ένα σημείο τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου ξ διακρίνεται ως εξής: το, έστω και μικρό, μέρος του γραφήματος κοντά στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ δεν έχει κανένα σημείο του πάνω ή κάτω, αντιστοίχως, από την οριζόντια ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο $(\xi, f(\xi))$.

Παράδειγμα 6.37. Το 0 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της $f(x) = 1 + x^2(x+1)$, διότι $f(0) = 1$ και ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in (-1, +\infty)$. Το 0 δεν είναι σημείο (ολικού) ελαχίστου, διότι υπάρχουν τιμές της συνάρτησης οι οποίες είναι < 1 . Για παράδειγμα, $f(-2) = -3 < 1$.

Παράδειγμα 6.38. Το 0 είναι σημείο τοπικού μεγίστου της $f(x) = x - \sqrt{x}$ στο $[0, +\infty)$, διότι $f(0) = 0$ και ισχύει $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [0, 1)$. Το 0 δεν είναι σημείο (ολικού) μεγίστου, αφού υπάρχουν τιμές της συνάρτησης οι οποίες είναι > 0 . Π.χ. $f(4) = 2 > 0$.

Παράδειγμα 6.39. Από τα γραφήματα συναρτήσεων τις οποίες συναντάμε συνήθως δημιουργείται η εντύπωση ότι, αν μία συνάρτηση είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα το οποίο περιέχει ένα τουλάχιστον από τα άκρα του, τότε το άκρο αυτό είναι, αυτομάτως, σημείο τοπικού ακροτάτου της συνάρτησης.

Θεωρήστε, όμως, τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{αν } x > 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0, \end{cases}$ ορισμένη στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Η f είναι συνεχής στο 0, διότι $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} x \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0)$. Επομένως, η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$.

Παρατηρούμε ότι στα σημεία $x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$, ισχύει $f(x) = x > 0$, ενώ στα σημεία $x = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$, ισχύει $f(x) = -x < 0$. Όταν $n \rightarrow +\infty$, τότε τα σημεία αυτά προσεγγίζουν το 0. Επομένως, όσο μικρό και είναι ένα διάστημα $[0, \delta)$, υπάρχουν σημεία του στα οποία η f παίρνει τιμές μεγαλύτερες και σημεία του στα οποία η f παίρνει τιμές μικρότερες από την τιμή της στο 0. Άρα το 0 δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f .

Είναι διδακτικό να σχεδιαστεί το γράφημα της f . Εξετάστε ξανά τις ασκήσεις 2.25, 2.26, 4.55, 4.56.

Θεώρημα Fermat. Έστω $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ και $a < \xi < b$. Αν το ξ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f , τότε

(i) είτε δεν υπάρχει η παράγωγος της f στο ξ

(ii) είτε υπάρχει η παράγωγος της f στο ξ και ισχύει $f'(\xi) = 0$.

Απόδειξη. Έστω ότι το ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της f . Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει το (i), δηλαδή ότι υπάρχει η παράγωγος $f'(\xi)$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν οι $f'_+(\xi)$ και $f'_-(\xi)$ και είναι ίσες με την $f'(\xi)$ και είναι, κατ' αρχάς, πιθανό η κοινή τιμή τους να είναι ένα από τα $\pm\infty$.

Παρατηρούμε ότι ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0$ κοντά στο ξ από δεξιά του. Από αυτό συνεπάγεται

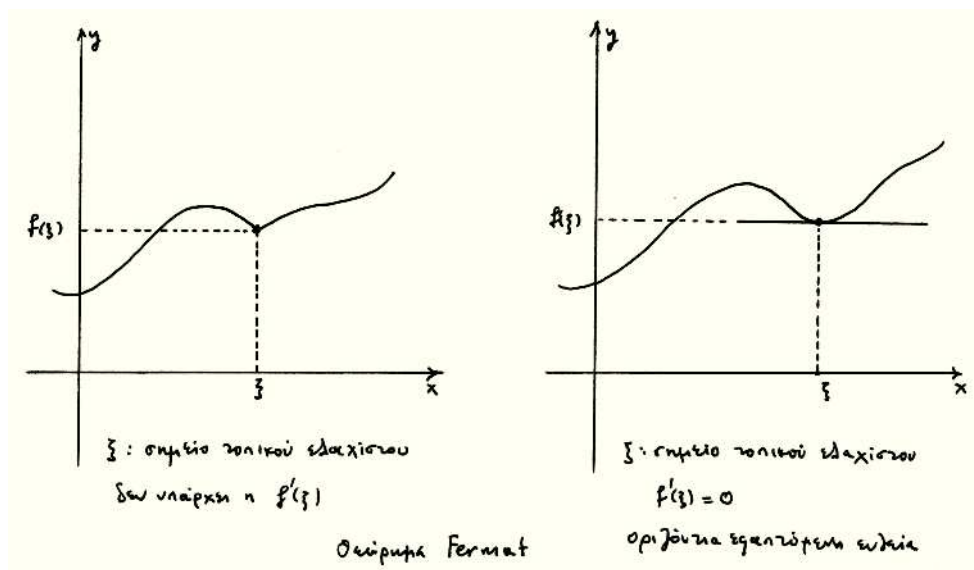
$$f'(\xi) = f'_+(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0.$$

Επίσης, ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0$ κοντά στο ξ από αριστερά του. Από αυτό συνεπάγεται

$$f'(\xi) = f'_-(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi-} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0.$$

Από τις δύο ανισότητες συνεπάγεται $f'(\xi) = 0$, οπότε ισχύει το (ii).

Αν το ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου, τότε επαναλαμβάνουμε τα ίδια αντικαθιστώντας το ≥ 0 με το ≤ 0 , και αντιστρόφως. $\square$



Σχήμα 6.8

Στα σχήματα 6.8 βλέπουμε το γεωμετρικό περιεχόμενο των (i) και (ii) του Θεωρήματος Fermat:

Αν το ξ είναι εσωτερικό σημείο τοπικού ακροτάτου της f , τότε είτε (i) δεν υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της συνάρτησης στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ είτε (ii) υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία και η κλίση της είναι ίση με 0, δηλαδή είναι οριζόντια.

Παράδειγμα 6.40. Το 0 είναι το μοναδικό σημείο (ολικού) ελαχίστου της $|x|$ η οποία είναι ορισμένη στο $(-\infty, +\infty)$ και δεν έχει παράγωγο στο 0.

Παράδειγμα 6.41. Το 0 είναι το μοναδικό σημείο (ολικού) ελαχίστου της συνάρτησης x^2 η οποία είναι ορισμένη στο $(-\infty, +\infty)$. Η παράγωγος της συνάρτησης στο 0 είναι $\frac{dx^2}{dx}\big|_{x=0} = 2x\big|_{x=0} = 0$.

Το Θεώρημα Fermat μάς δίνει το εξής πόρισμα:

Αν θέλουμε να βρούμε τα σημεία τοπικού ακροτάτου μιας συνάρτησης σε κάποιο διάστημα, τότε αρκεί να τα ψάξουμε ανάμεσα στα παρακάτω σημεία: τα (πιθανά) άκρα του διαστήματος, τα εσωτερικά σημεία στα οποία η συνάρτηση δεν έχει παράγωγο και τα εσωτερικά σημεία στα οποία η παράγωγος της συνάρτησης είναι ίση με 0. Κανένα άλλο σημείο δεν είναι υποψήφιο σημείο τοπικού ακροτάτου.

Παράδειγμα 6.42. Θεωρούμε την $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$ στο διάστημα $[0, 4]$. Είναι $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$, οπότε τα μόνα υποψήφια σημεία τοπικού ακροτάτου της f στο $[0, 4]$ είναι τα άκρα 0 και 4 του διαστήματος, καθώς και τα 1 και 2 στα οποία μηδενίζεται η f' . Οι τιμές της f στα σημεία αυτά είναι 5, 37, 10 και 9, αντιστοίχως.

Τώρα σκεφτόμαστε ως εξής. Η f είναι συνεχής στο $[0, 4]$, οπότε έχει, οπωσδήποτε, σημεία ολικού μεγίστου και ελαχίστου. Αυτά είναι, οπωσδήποτε, κάποια από τα παραπάνω τέσσερα σημεία, οπότε το 0 είναι το σημείο ολικού ελαχίστου και η ελάχιστη τιμή της f είναι 5, και το 4 είναι το σημείο ολικού μεγίστου και η μέγιστη τιμή της f είναι 37. Μένει να δούμε αν τα 1 και 2 είναι σημεία τοπικού ακροτάτου ή όχι.

Στο $[0, 2]$ η f είναι συνεχής, οπότε έχει σημεία ολικού μεγίστου και ολικού ελαχίστου στο διάστημα αυτό. Αυτά είναι κάποια από τα σημεία 0, 1 και 2, δηλαδή τα άκρα και το σημείο στο οποίο μηδενίζεται η f' . Οι αντίστοιχες τιμές της f είναι 5, 10 και 9, οπότε το 1 είναι το σημείο ολικού μεγίστου στο $[0, 2]$, οπότε είναι και σημείο τοπικού μεγίστου στο $[0, 4]$.

Ομοίως, αφού οι τιμές στα 1, 2 και 4 είναι 10, 9 και 37, αντιστοίχως, το 2 είναι σημείο ολικού ελαχίστου στο $[1, 4]$, οπότε είναι και σημείο τοπικού ελαχίστου στο $[0, 4]$.

Θα ξαναδούμε το παράδειγμα αυτό στην επόμενη ενότητα με πιο απλό τρόπο.

Το Θεώρημα Fermat έχει το εξής χρήσιμο συμπλήρωμα:

Πρόταση 6.5. (1) Έστω $f : [\xi, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Αν το ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου ή τοπικού ελαχίστου της f , τότε
 (i) είτε δεν υπάρχει η $f'_+(\xi)$
 (ii) είτε υπάρχει η $f'_+(\xi)$ και ισχύει $f'_+(\xi) \leq 0$ ή $f'_+(\xi) \geq 0$, αντιστοίχως.
 (2) Έστω $f : (a, \xi] \rightarrow \mathbb{R}$. Αν το ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου ή τοπικού ελαχίστου της f , τότε
 (i) είτε δεν υπάρχει η $f'_-(\xi)$
 (ii) είτε υπάρχει η $f'_-(\xi)$ και ισχύει $f'_-(\xi) \geq 0$ ή $f'_-(\xi) \leq 0$, αντιστοίχως.

Απόδειξη. (1) Έστω ότι το ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της f . Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει το (i), δηλαδή ότι υπάρχει η παράγωγος $f'_+(\xi)$. Παρατηρούμε ότι ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0$ κοντά στο ξ από δεξιά του. Από αυτό συνεπάγεται $f'_+(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi^+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0$.

Η περίπτωση του τοπικού ελαχίστου στο (1) αλλά και το (2), έχουν παρόμοια απόδειξη. □

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι, γράφοντας $f'_+(\xi) \leq 0$ ή $f'_+(\xi) \geq 0$, περιλαμβάνουμε την περίπτωση να είναι $f'_+(\xi) = -\infty$ ή $f'_+(\xi) = +\infty$, αντιστοίχως. Ομοίως για την $f'_-(\xi)$.

Παράδειγμα 6.43. Η x στο διάστημα $[0, 2]$ έχει το 0 ως σημείο τοπικού ελαχίστου και η παράγωγός της στο 0 είναι ίση με $1 \geq 0$. Η ίδια συνάρτηση έχει, στο ίδιο διάστημα, το 2 ως σημείο τοπικού μεγίστου και η παράγωγός της στο 2 είναι ίση με $1 \geq 0$.

Παράδειγμα 6.44. Η $\sqrt{x}$ στο διάστημα $[0, 2]$ έχει το 0 ως σημείο τοπικού ελαχίστου και η παράγωγός της στο 0 είναι ίση με $+\infty \geq 0$.

Θεώρημα Rolle. Έστω ότι η $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και έχει παράγωγο στο (a, b) . Αν $f(a) = f(b)$, τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f'(\xi) = 0$.

Απόδειξη. Αν η f είναι σταθερή στο $[a, b]$, δηλαδή αν όλες οι τιμές της είναι ίσες με $f(a) = f(b)$, τότε η παράγωγός της είναι ίση με 0 σε κάθε σημείο του (a, b) , οπότε το αποτέλεσμα είναι προφανές.

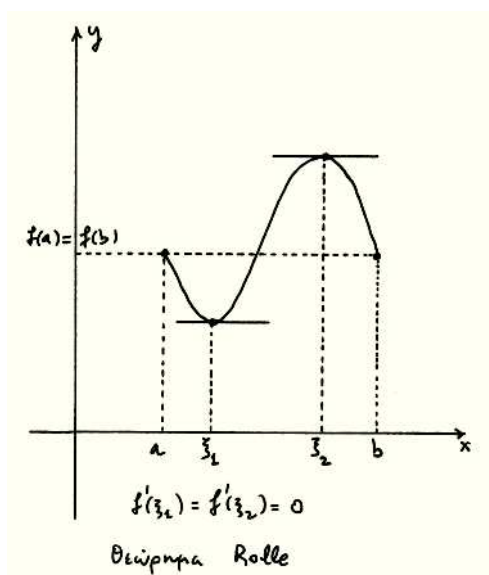
Αν η f δεν είναι σταθερή στο $[a, b]$, τότε είτε έχει μία τουλάχιστον τιμή $> f(a) = f(b)$ είτε έχει μία τουλάχιστον τιμή $< f(a) = f(b)$. Εξετάζουμε τις δύο περιπτώσεις ξεχωριστά.

Στην πρώτη περίπτωση εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέγιστης / Ελάχιστης Τιμής και συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ το οποίο είναι σημείο ολικού μεγίστου της f . Αφού υπάρχει κάποια τιμή μεγαλύτερη από την $f(a) = f(b)$, συνεπάγεται ότι και η μέγιστη τιμή $f(\xi)$ είναι μεγαλύτερη από την $f(a) = f(b)$, οπότε $\xi \in (a, b)$. Βάσει της υπόθεσης η f έχει παράγωγο στο ξ και τότε, βάσει του Θεωρήματος Fermat, ισχύει $f'(\xi) = 0$.

Στη δεύτερη περίπτωση, από το Θεώρημα Μέγιστης / Ελάχιστης Τιμής συνεπάγεται ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ το οποίο είναι σημείο ολικού ελαχίστου της f . Αφού υπάρχει κάποια τιμή μικρότερη από την $f(a) = f(b)$, συνεπάγεται ότι και η ελάχιστη τιμή $f(\xi)$ είναι μικρότερη από την $f(a) = f(b)$, οπότε $\xi \in (a, b)$. Βάσει της υπόθεσης η f έχει παράγωγο στο ξ και τότε, βάσει του Θεωρήματος Fermat, ισχύει $f'(\xi) = 0$.

Άρα, σε κάθε περίπτωση, υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f'(\xi) = 0$. □

Για το Θεώρημα Rolle παρατηρήστε το σχήμα 6.9.



Σχήμα 6.9

Παράδειγμα 6.45. Η $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 5$ είναι συνεχής στο διάστημα $[-2, \sqrt{3}]$, έχει παράγωγο $f'(x) = 3x^2 + 4x - 3$ στο διάστημα $(-2, \sqrt{3})$ και $f(-2) = f(\sqrt{3}) = 1$. Άρα υπάρχει $\xi \in (-2, \sqrt{3})$ ώστε $f'(\xi) = 0$. Για να βρούμε το ξ λύνουμε την εξίσωση $3x^2 + 4x - 3 = 0$. Οι λύσεις είναι τα $\frac{-2 \pm \sqrt{13}}{3}$ και ανήκουν και τα δύο στο $(-2, \sqrt{3})$.

Το Θεώρημα Rolle δεν αναφέρει τρόπο εύρεσης του ξ για το οποίο ισχύει $f'(\xi) = 0$.

Αν η f στο Θεώρημα Rolle δεν έχει παράγωγο, έστω και σε ένα μόνο σημείο του (a, b) , τότε ενδέχεται να μην υπάρχει κανένα $\xi \in (a, b)$ με $f'(\xi) = 0$.

Παράδειγμα 6.46. Η $|x|$ είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και οι τιμές της στα άκρα του διαστήματος είναι 1. Όμως, δεν υπάρχει κανένα $\xi \in (-1, 1)$ στο οποίο η παράγωγος έχει τιμή 0.

Οι υποθέσεις του Θεωρήματος Rolle επιτρέπουν να είναι η παράγωγος $+\infty$ ή $-\infty$ σε σημεία του διαστήματος (a, b) . Το συμπέρασμα εξακολουθεί να ισχύει.

Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Lagrange). Έστω ότι η $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και έχει παράγωγο στο (a, b) . Τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$h(x) = (b-a)f(x) - (f(b) - f(a))x.$$

Η h είναι συνεχής στο $[a, b]$, ισχύει $h(a) = h(b)$ και η h έχει παράγωγο στο (a, b) ίση με

$$h'(x) = (b-a)f'(x) - (f(b) - f(a)).$$

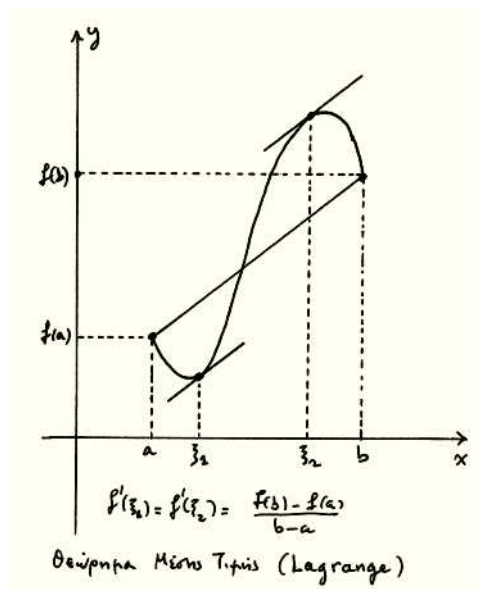
Από το Θεώρημα Rolle συνεπάγεται ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $h'(\xi) = 0$, δηλαδή

$$(b-a)f'(\xi) - (f(b) - f(a)) = 0,$$

οπότε $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Το Θεώρημα Rolle είναι ειδική περίπτωση του Θεωρήματος Μέσης Τιμής (Lagrange). Πράγματι, αν $f(a) = f(b)$, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Lagrange) συνεπάγεται ότι για κάποιο $\xi \in (a, b)$ ισχύει $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$. Επομένως, το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Lagrange) συνεπάγεται το Θεώρημα Rolle. Από την άλλη μεριά, το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Lagrange) αποδείχτηκε βάσει του Θεωρήματος Rolle. Άρα τα δύο θεωρήματα είναι ισοδύναμα.

Παρατηρήστε το σχήμα 6.10. Στο γράφημα της f στο Θεώρημα Μέσης Τιμής (Lagrange) βλέπουμε ότι ο αριθμός $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ δεν είναι τίποτε άλλο από την κλίση του ευθύγραμμου τμήματος



Σχήμα 6.10

με άκρα τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$. Επομένως, το γεωμετρικό περιεχόμενο του Θεωρήματος Μέσης Τιμής (Lagrange) είναι ότι:

Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και έχει παράγωγο στο (a, b) , τότε η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημά της σε κάποιο σημείο $(\xi, f(\xi))$ έχει την ίδια κλίση ή, ισοδύναμα, είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο συνδέει τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$.

Παράδειγμα 6.47. Η $\sin x$ είναι συνεχής στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ και έχει παράγωγο στο $(0, \frac{\pi}{2})$. Άρα υπάρχει $\xi \in (0, \frac{\pi}{2})$ ώστε $\cos \xi = \frac{\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0}{\frac{\pi}{2} - 0} = \frac{2}{\pi}$.

Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Cauchy). Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμες στο (a, b) . Τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x).$$

Η h είναι συνεχής στο $[a, b]$, ισχύει $h(a) = h(b)$ και η h έχει παράγωγο στο (a, b) ίση με

$$h'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - (g(b) - g(a))f'(x),$$

Από το Θεώρημα Rolle συνεπάγεται ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $h'(\xi) = 0$, δηλαδή

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi).$$

□

Πολλές φορές το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Cauchy) εφαρμόζεται με κάποιες επιπλέον υποθέσεις. Συγκεκριμένα,

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμες στο (a, b) . Αν $g(a) \neq g(b)$ και αν δεν ισχύει $f'(x) = g'(x) = 0$ για κανένα $x \in (a, b)$, τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Πράγματι, από την $(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi)$, την οποία μας δίνει το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Cauchy), και από το $g(b) - g(a) \neq 0$ προκύπτει

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi) = f'(\xi).$$

Από αυτήν την ισότητα συνεπάγεται ότι αν $g'(\xi) = 0$, τότε $f'(\xi) = 0$, το οποίο βάσει της υπόθεσής μας είναι άτοπο. Άρα $g'(\xi) \neq 0$ και καταλήγουμε στην παραπάνω ισότητα.

Παράδειγμα 6.48. Αν $0 < a < b$ και $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$, τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $\frac{b^m - a^m}{b^n - a^n} = \frac{m}{n} \xi^{m-n}$.

Ασκήσεις

6.40. Θεωρήστε τις συναρτήσεις $\begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x(1 + \sin \frac{1}{x}), & x > 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$

$\begin{cases} x^2(-1 + \sin \frac{1}{x}), & \text{αν } x > 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0. \end{cases}$ Δείτε αν το 0 είναι σημείο τοπικού ακροτάτου αυτών των συναρτήσεων. Παρατηρήστε ότι οι δύο τελευταίες είναι παραγωγίσιμες στο 0. Σχεδιάστε τα γραφήματά τους έτσι ώστε να φανεί και το αν είναι παραγωγίσιμες στο 0, καθώς και το αν το 0 είναι σημείο τοπικού ακροτάτου.

6.41. Έστω $a < b$. Αποδείξτε ότι

- (i) υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $\sin b - \sin a = (b - a) \cos \xi$.
- (ii) υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $\sin b - \sin a = (e^b - e^a)e^{-\xi} \cos \xi$.
- (iii) υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $e^b - e^a = (\arctan b - \arctan a)(1 + \xi^2)e^\xi$.

6.42. Μπορεί η εξίσωση $x^3 - 12x = c$ να έχει δύο διαφορετικές λύσεις στο διάστημα $[-2, 2]$; Στο $(-\infty, -2]$; Στο $[2, +\infty)$;

6.43. Θεωρήστε την $2 - \sqrt[5]{x^2}$ και παρατηρήστε ότι έχει την ίδια τιμή στα 1 και -1 . Υπάρχει $\xi \in (-1, 1)$ στο οποίο μηδενίζεται η παράγωγος της συνάρτησης;

6.44. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^2 = x \sin x + \cos x$ έχει ακριβώς δύο λύσεις. Προσδιορίστε τη θέση των δύο αυτών λύσεων σε σχέση με το 0.

6.45. Αποδείξτε ότι η πολυωνυμική εξίσωση $x^n + ax + b = 0$ έχει το πολύ δύο διαφορετικές λύσεις, αν το n είναι άρτιο, και το πολύ τρεις διαφορετικές λύσεις, αν το n είναι περιττό.

6.46. Πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $e^x = 1$; Η εξίσωση $e^x = 1 + x$; Η εξίσωση $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$; Γενικεύστε με επαγωγή: πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$;

6.47. Πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $1 + \frac{x}{1!} = 0$; Η εξίσωση $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} = 0$; Γενικεύστε με επαγωγή: πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = 0$;

6.48. Έστω διάστημα I και έστω ότι η $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο I και ότι ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I . Αποδείξτε ότι η f είναι ένα-προς-ένα στο I .

6.49. Έστω διάστημα I και έστω ότι οι $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο I και ότι ισχύει $f(x)g'(x) - f'(x)g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$. Αποδείξτε ότι ανάμεσα σε δύο οποιεσδήποτε λύσεις της $f(x) = 0$ στο I βρίσκεται τουλάχιστον μία λύση της $g(x) = 0$, και αντιστρόφως. Ταιριάζουν οι υποθέσεις και το συμπέρασμα με το ζευγάρι των $\cos x$ και $\sin x$ στο $(-\infty, +\infty)$;

Υπόδειξη: Έστω $a, b \in I$, $a < b$, $f(a) = f(b) = 0$ και $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Παρατηρήστε ότι $g(a) \neq 0$, $g(b) \neq 0$ και θεωρήστε την $\frac{f}{g}$ στο $[a, b]$.

6.50. Έστω ότι η $f : [\xi - h, \xi + h] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\xi - h, \xi + h]$ και παραγωγίσιμη στο $(\xi - h, \xi) \cup (\xi, \xi + h)$. Αποδείξτε ότι:

- (i) υπάρχει $\zeta \in (0, h)$ ώστε $\frac{f(\xi+h)-f(\xi-h)}{h} = f'(\xi + \zeta) + f'(\xi - \zeta)$.
- (ii) υπάρχει $\zeta \in (0, h)$ ώστε $\frac{f(\xi+h)-2f(\xi)+f(\xi-h)}{h} = f'(\xi + \zeta) - f'(\xi - \zeta)$.

6.51. (i) Με το Θεώρημα Rolle και με επαγωγή αποδείξτε ότι κάθε πολυώνυμο n -οστού βαθμού έχει το πολύ n διαφορετικές ρίζες.

(ii) Αν $a_1 < \dots < a_n$, αποδείξτε ότι η παράγωγος της $(x - a_1) \cdots (x - a_n)$ έχει ακριβώς $n - 1$ διαφορετικές ρίζες. Προσδιορίστε τη θέση των ριζών της παραγώγου σε σχέση με τα $a_1, \dots, a_n$.

(iii) Έστω πολυώνυμο $p(x)$ και έστω $\xi_1, \dots, \xi_m$ οι διαφορετικές ανά δύο ρίζες του. Δείτε την άσκηση 6.19. Έστω $k_1, \dots, k_m$ οι αντίστοιχες πολλαπλότητες των ριζών του $p(x)$, οπότε ισχύει $p(x) = (x - \xi_1)^{k_1} \cdots (x - \xi_m)^{k_m} q(x)$ για κάθε x , όπου $q(x)$ είναι κάποιο πολυώνυμο χωρίς καμία ρίζα. Τότε λέμε ότι το $p(x)$ έχει ακριβώς $k = k_1 + \dots + k_m$ ρίζες ή ότι το πλήθος των ριζών του $p(x)$ είναι k .

Αν το πλήθος των ριζών του πολυωνύμου $p(x)$ είναι k , αποδείξτε ότι το πλήθος των ριζών του $p'(x)$ είναι $\geq k - 1$. Ειδικότερα, αν ο βαθμός του $p(x)$ είναι n και το πλήθος των ριζών του είναι n , αποδείξτε ότι το πλήθος των ριζών του $p'(x)$ είναι $n - 1$.

6.52. Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$. Αποδείξτε ότι

- (i) αν ισχύει $|f'(x)| \leq \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x + \sqrt{x}) - f(x)) = 0$.

Υπόδειξη: Για κάθε $x > 0$ υπάρχει $\xi \in (x, x + \sqrt{x})$ ώστε $f(x + \sqrt{x}) - f(x) = f'(\xi) \sqrt{x}$.

- (ii) αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x + 1) - f(x)) = 0$.

6.53. (i) Έστω $f : [\xi, b) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $[\xi, b)$ και παραγωγίσιμη στο (ξ, b) . Αποδείξτε ότι αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow \xi+} f(x)$, τότε υπάρχει και η $f'_+(\xi)$ και είναι ίση με το $\lim_{x \rightarrow \xi+} f'(x)$.

(ii) Έστω $f : (a, \xi] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $(a, \xi]$ και παραγωγίσιμη στο (a, ξ) . Αποδείξτε ότι αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow \xi-} f(x)$, τότε υπάρχει και η $f'_-(\xi)$ και είναι ίση με το $\lim_{x \rightarrow \xi-} f'(x)$.

6.54. Εδώ θα δούμε μερικά αποτελέσματα για τη συμπεριφορά των χορδών του γραφήματος μιας συνάρτησης όταν αυτές προσεγγίζουν ένα σημείο του γραφήματος στο οποίο υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία: άλλες φορές οι κλίσεις των χορδών τείνουν στην κλίση της εφαπτόμενης ευθείας και άλλες φορές όχι.

Έστω ότι η $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\xi \in (a, b)$ και έστω ακολουθίες $(x'_n), (x''_n)$ στο (a, b) ώστε $x'_n \rightarrow \xi$ και $x''_n \rightarrow \xi$.

(i) Αν $x'_n < \xi < x''_n$ για κάθε n , τότε αποδείξτε ότι $\frac{f(x'_n) - f(x''_n)}{x'_n - x''_n} \rightarrow f'(\xi)$.

(ii) Αν $\left| \frac{x'_n - \xi}{x'_n - x''_n} \right| \leq M$ για κάθε n , τότε αποδείξτε ότι $\frac{f(x'_n) - f(x''_n)}{x'_n - x''_n} \rightarrow f'(\xi)$.

(iii) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (a, b) και αν η f' είναι συνεχής στο ξ , τότε αποδείξτε ότι $\frac{f(x'_n) - f(x''_n)}{x'_n - x''_n} \rightarrow f'(\xi)$.

Θεωρήστε τη συνάρτηση f της άσκησης 6.11(ii). Επίσης, έστω $x'_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ και $x''_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ για κάθε n . Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και $x'_n \rightarrow 0$, $x''_n \rightarrow 0$, αλλά αποδείξτε ότι $\frac{f(x'_n) - f(x''_n)}{x'_n - x''_n} \not\rightarrow f'(0)$.

6.10 Ακρότατα, μονοτονία και απόδειξη ισοτήτων και ανισοτήτων

6.10.1 Ακρότατα και μονοτονία

Η Πρόταση 6.6 λέει ότι το πρόσημο της παραγώγου μίας συνάρτησης σε κάποιο διάστημα καθορίζει τη μονοτονία της συνάρτησης σε αυτό το διάστημα.

Πρόταση 6.6. Έστω διάστημα I και έστω ότι η $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο I και ότι έχει παράγωγο σε κάθε εσωτερικό σημείο του I .

(i) Η f είναι σταθερή στο I , αν και μόνο αν ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε x εσωτερικό του I .

(ii) Η f είναι αύξουσα στο I , αν και μόνο αν ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε x εσωτερικό του I .

(iii) Η f είναι φθίνουσα στο I , αν και μόνο αν ισχύει $f'(x) \leq 0$ για κάθε x εσωτερικό του I .

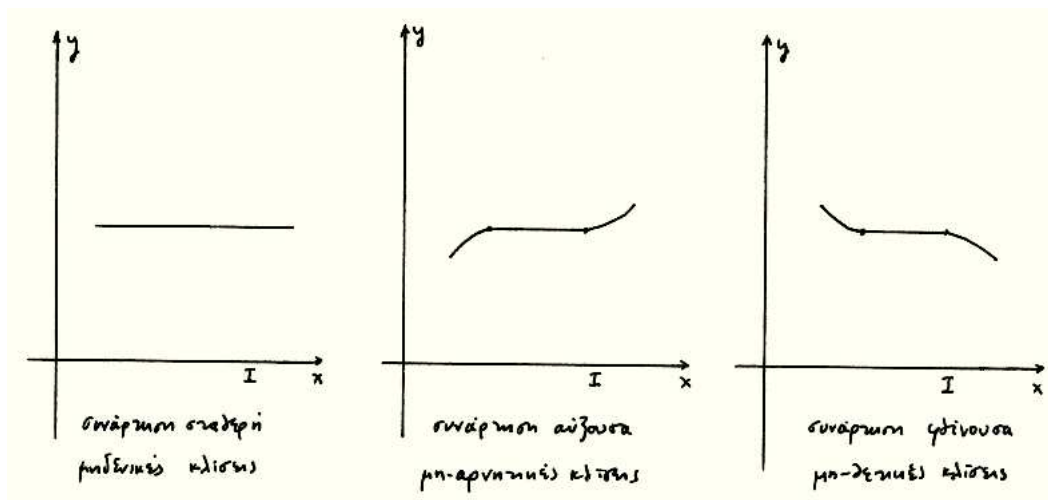
Απόδειξη. (i) Αν η f είναι σταθερή, τότε ήδη γνωρίζουμε ότι η παράγωγός της είναι μηδέν. Αντιστρόφως, έστω ότι ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε x εσωτερικό του I . Θεωρούμε οποιαδήποτε $x_1 \in I$, $x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$, όπου, ενδεχομένως, κάποιο από αυτά ή και τα δύο να είναι άκρο του I . Η f είναι τότε συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και έχει παράγωγο στο (x_1, x_2) . Άρα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$, οπότε ξ εσωτερικό του I , ώστε $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) = 0$. Άρα $f(x_1) = f(x_2)$. Αυτό σημαίνει ότι όλες οι τιμές της f είναι ίσες μεταξύ τους, οπότε η f είναι σταθερή στο I .

(ii) Αν η f είναι αύξουσα στο I , τότε, όπως αποδείξαμε πριν από τον κανόνα αντίστροφης συνάρτησης, ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε x εσωτερικό του I . Αντιστρόφως, έστω ότι ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε x εσωτερικό του I . Όπως στην απόδειξη του (i), θεωρούμε οποιαδήποτε $x_1 \in I$, $x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$, και βλέπουμε ότι υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$, οπότε ξ εσωτερικό του I , ώστε $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \geq 0$. Άρα $f(x_1) \leq f(x_2)$, οπότε η f είναι αύξουσα στο I .

(iii) Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του (ii). □

Στα σχήματα 6.11 βλέπουμε το γεωμετρικό περιεχόμενο της Πρότασης 6.6. Το γράφημα μιας συνάρτησης σε κάποιο διάστημα είναι *οριζόντια καμπύλη*, αν και μόνο αν οι εφαπτόμενες ευθείες σε κάθε σημείο της είναι οριζόντιες. Ομοίως, το γράφημα μιας συνάρτησης σε κάποιο διάστημα είναι καμπύλη η οποία *ανεβαίνει προς τα δεξιά*, αν και μόνο αν οι εφαπτόμενες ευθείες σε κάθε

σημείο της έχουν μη-αρνητικές κλίσεις. Επομένως, υπάρχει σχέση αλληλοκαθορισμού ανάμεσα στην κατεύθυνση μιας καμπύλης και στις κατευθύνσεις των εφαπτόμενων ευθειών της.



Σχήμα 6.11

Αξίζει να διατυπώσουμε μία παραλλαγή της Πρότασης 6.6.

Πρόταση 6.7. Έστω διάστημα I και έστω ότι η $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο I και ότι έχει παράγωγο σε κάθε εσωτερικό σημείο του I .

- (i) Αν ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε x εσωτερικό του I , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο I .
- (ii) Αν ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε x εσωτερικό του I , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο I .

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι ίδια με την απόδειξη του αντίστοιχου μέρους της Πρότασης 6.6. $\square$

Στις Προτάσεις 6.6 και 6.7, όταν γράφουμε $f'(x) \geq 0$ ή $f'(x) > 0$, τότε περιλαμβάνουμε και την περίπτωση $f'(x) = +\infty$. Ομοίως, όταν γράφουμε $f'(x) \leq 0$ ή $f'(x) < 0$, τότε περιλαμβάνουμε και την περίπτωση $f'(x) = -\infty$. Το ίδιο ισχύει και για την Πρόταση 6.8 παρακάτω.

Δεν ισχύουν τα αντίστροφα των (i) και (ii) της Πρότασης 6.7. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε το μόνο γενικό συμπέρασμα είναι αυτό το οποίο προκύπτει επειδή η συνάρτηση είναι αύξουσα, δηλαδή ότι ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε x εσωτερικό του I . Ανάλογο συμπέρασμα προκύπτει, αν η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Παράδειγμα 6.49. Η x^3 είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$, αλλά δεν είναι αλήθεια ότι ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, +\infty)$. Υπολογίζουμε $f'(x) = 3x^2$ για κάθε x και αυτό είναι > 0 για κάθε $x \neq 0$, αλλά είναι $= 0$ για $x = 0$.

Πρέπει να τονιστεί ότι στις Προτάσεις 6.6 και 6.7 οι υποθέσεις και τα συμπεράσματα ισχύουν σε διάστημα. Αν οι υποθέσεις ισχύουν σε ενώσεις διαστημάτων, τότε τα συμπεράσματα μπορεί να μην ισχύουν και αυτά στις ενώσεις διαστημάτων.

Παράδειγμα 6.50. Η $\frac{|x|}{x}$ έχει παράγωγο μηδέν στο πεδίο ορισμού της $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, αλλά δεν είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Είναι σταθερή -1 στο διάστημα $(-\infty, 0)$ και σταθερή 1 στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Παράδειγμα 6.51. Η $\frac{1}{x}$ έχει παράγωγο $-\frac{1}{x^2} < 0$ στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, αλλά δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι χρήσιμο για την αναγνώριση των σημείων τοπικού ακροτάτου μιας συνάρτησης.

Πρόταση 6.8. Έστω $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο (a, b) και $a < \xi < b$.

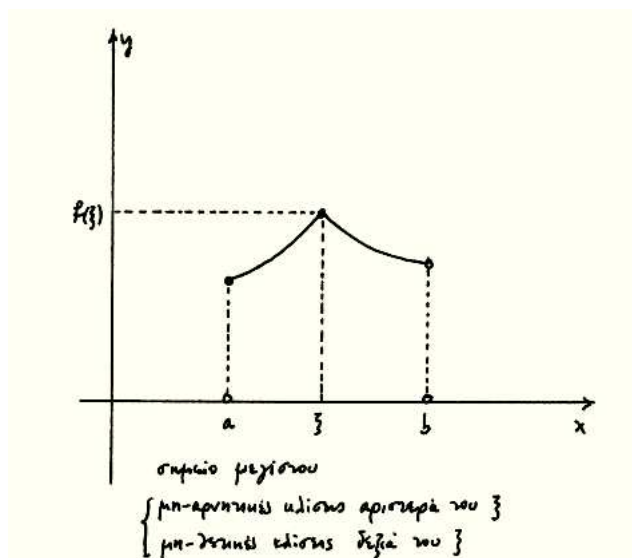
(i) Αν ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (a, \xi)$ και $f'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in (\xi, b)$, τότε το ξ είναι σημείο μεγίστου της f .

(ii) Αν ισχύει $f'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in (a, \xi)$ και $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (\xi, b)$, τότε το ξ είναι σημείο ελαχίστου της f .

Απόδειξη. (i) Η f είναι αύξουσα στο $(a, \xi]$ και φθίνουσα στο $[\xi, b)$, οπότε το $f(\xi)$ είναι η μέγιστη τιμή της στο (a, b) .

(ii) Ομοίως. □

Για την Πρόταση 6.8 παρατηρήστε το σχήμα 6.12.



Σχήμα 6.12

Ακολουθεί μια συνηθισμένη περίπτωση εφαρμογής της Πρότασης 6.8.

Έστω ότι έχουμε μια συνάρτηση f συνεχή σε κάποιο διάστημα οποιουδήποτε τύπου και έστω ότι έχουμε βρει διαδοχικά σημεία $\xi_1, \dots, \xi_n$ του διαστήματος, στα οποία περιλαμβάνονται τα πιθανά άκρα του διαστήματος, ώστε σε καθένα από τα ενδιάμεσα ανοικτά υποδιαστήματα η συνάρτηση έχει παράγωγο με σταθερό πρόσημο. Τότε (i) τα πιθανά άκρα του διαστήματος είναι σημεία τοπικού ακροτάτου, (ii) κάθε ξ_k το οποίο χωρίζει υποδιαστήματα στα οποία η παράγωγος έχει διαφορετικό πρόσημο είναι σημείο τοπικού ακροτάτου και (iii) κάθε ξ_k το οποίο χωρίζει υποδιαστήματα στα οποία η παράγωγος έχει ίδιο πρόσημο δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου.

Στα $\xi_1, \dots, \xi_n$ η f πρέπει να είναι συνεχής, αλλά δεν χρειάζεται να έχει παράγωγο.

Παράδειγμα 6.52. Θα επανεξετάσουμε το παράδειγμα 6.42.

Η $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 4]$ και έχει παράγωγο $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$ στο $(0, 4)$. Η f' είναι θετική στο διάστημα $(0, 1)$, αρνητική στο $(1, 2)$ και θετική στο $(2, 4)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[1, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, 4]$. Άρα τα 0, 2 είναι σημεία τοπικού ελαχίστου της f και τα 1, 4 είναι σημεία τοπικού μεγίστου.

Παράδειγμα 6.53. Η $f(x) = x^4(x-1)^4$ είναι συνεχής στο $(-\infty, +\infty)$ με $f'(x) = 8x^3(x-1)^3(x-\frac{1}{2})$. Η f' είναι αρνητική στο $(-\infty, 0)$, θετική στο $(0, \frac{1}{2})$, αρνητική στο $(\frac{1}{2}, 1)$ και θετική στο $(1, +\infty)$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0, \frac{1}{2}]$, γνησίως φθίνουσα στο $[\frac{1}{2}, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Επομένως, τα 0, 1 είναι σημεία τοπικού ελαχίστου και το $\frac{1}{2}$ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της f . Είναι $f(0) = f(1) = 0$ και, επειδή ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε

x , τα $0, 1$ είναι σημεία ολικού ελαχίστου. Το $\frac{1}{2}$ δεν είναι σημείο ολικού μεγίστου, διότι $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{256}$, ενώ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$.

Παράδειγμα 6.54. Η $f(x) = x + \frac{1}{x}$ είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$. Η $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ είναι θετική στο $(-\infty, -1)$, αρνητική στο $(-1, 0)$ και στο $(0, 1)$ και θετική στο $(1, +\infty)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 0)$ και στο $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Επομένως, το -1 είναι σημείο τοπικού μεγίστου και το 1 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου. Μάλιστα, το -1 είναι σημείο ολικού μεγίστου για το διάστημα $(-\infty, 0)$ και το 1 είναι σημείο ολικού ελαχίστου για το διάστημα $(0, +\infty)$.

Παράδειγμα 6.55. Η $f(x) = |\sin x|$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και είναι $f(x) = \sin x$ στο διάστημα $(0, \pi)$ και $f(x) = -\sin x$ στο διάστημα $(\pi, 2\pi)$. Επομένως, $f'(x) = \cos x$ στο $(0, \pi)$ και $f'(x) = -\cos x$ στο $(\pi, 2\pi)$. Συνεπάζεται ότι η f' είναι θετική στο $(0, \frac{\pi}{2})$, αρνητική στο $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, θετική στο $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ και αρνητική στο $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \frac{\pi}{2}]$, γνησίως φθίνουσα στο $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, γνησίως αύξουσα στο $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$. Επομένως, τα $0, \pi, 2\pi$ είναι σημεία τοπικού ελαχίστου της f και τα $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ είναι σημεία τοπικού μεγίστου. Επειδή $f(0) = f(\pi) = f(2\pi) = 0$, τα $0, \pi, 2\pi$ είναι σημεία ολικού ελαχίστου και, επειδή $f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{3\pi}{2}) = 1$, τα $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ είναι σημεία ολικού μεγίστου.

Παραεμπιπτόντως, η $f(x) = |\sin x|$ δεν έχει παράγωγο στο π .

Ασκήσεις

6.55. Βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα σημεία τοπικού και ολικού ακροτάτου των $x^2 - x - 1$, $x^3 - 15x^2 + 72x + 7$, $\frac{x^2-2x+3}{x^2+2x+3}$, $\frac{\sqrt{x}}{x+4}$, x^2e^{-x} , $\sin x - \cos x$, $\frac{\sin(3x)}{3} - \cos x$, $x + \sin x$, $x + |\sin x|$, $\frac{\log x}{x}$, $|x|e^{-|x-1|}$, $\arctan x - \log(1 + x^2)$.

6.56. Βρείτε τα σημεία τοπικού ακροτάτου των παρακάτω συναρτήσεων στα αντίστοιχα διαστήματα.

(i) $(x-1)|x|$, στο $[-1, 3]$.

(ii) $|x^2 - 3x + 2|$, στο $[-3, 10]$.

(iii) $\frac{\log^2 x}{x}$, στο $[1, 3]$.

(iv) $x + \frac{1}{x}$, στο $[\frac{1}{3}, 3]$.

(v) $e^x \sin x$, στο $[0, 2\pi]$.

6.57. Αποδείξτε ότι η $(1 + \frac{1}{x})^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

6.58. Βρείτε την τιμή του $a > 0$ για την οποία η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $a \log x + 2a - x$ στο διάστημα $(0, +\infty)$ είναι η ελάχιστη δυνατή.

6.59. Έστω $a_1 < \dots < a_n$. Βρείτε τα σημεία ολικού ελαχίστου των $(x - a_1)^2 + \dots + (x - a_n)^2$, $|x - a_1| + \dots + |x - a_n|$.

6.60. Ανάλογα με την τιμή του a βρείτε τον αριθμό των λύσεων της εξίσωσης $\sin x = ax$.

Υπόδειξη: Θεωρήστε την $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{αν } x \neq 0, \\ 1, & \text{αν } x = 0. \end{cases}$ Βρείτε τις ρίζες της f , τα διαστήματα στα

οποία είναι θετική και αρνητική, καθώς και τα διαστήματα μονοτονίας της. Σε κάθε διάστημα στο οποίο η f έχει σταθερό πρόσημο βρείτε τα ακρότατά της. Σχεδιάστε το γράφημα της f έτσι ώστε να φαίνεται το σχετικό ύψος των κορυφών του και των πυθμένων του.

6.61. Έστω $k \in \mathbb{Z}$. Ανάλογα με την τιμή του a βρείτε τον αριθμό των λύσεων της εξίσωσης $\tan x = ax$ στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$.

6.62. Έστω διάστημα I και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

(i) Κοιτάξτε την άσκηση 5.7 και αποδείξτε ότι, αν η f είναι Hölder συνεχής στο ξ με $\rho > 1$, τότε $f'(\xi) = 0$.

(ii) Αν υπάρχουν $M \geq 0$ και $\rho > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|^\rho$ για κάθε $x_1 \in I$, $x_2 \in I$, τότε λέμε ότι η f είναι **Hölder συνεχής στο διάστημα I** . Αν $\rho = 1$, τότε λέμε, επίσης, ότι η f είναι **Lipschitz συνεχής στο διάστημα I** .

Αν η f είναι Hölder συνεχής στο I με $\rho > 1$, αποδείξτε ότι είναι σταθερή στο I .

6.63. (i) Έστω $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ και $a < \xi < b$. Αν $f'(\xi) > 0$, αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) > f(\xi)$ κοντά στο ξ από δεξιά του και $f(x) < f(\xi)$ κοντά στο ξ από αριστερά του. Μπορεί το ξ να είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f ; Τι αλλάζει αν $f'(\xi) < 0$;

(ii) Θεωρήστε την $f(x) = \begin{cases} x - x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0. \end{cases}$ Αποδείξτε ότι $f'(0) = 1 > 0$, αλλά ότι δεν υπάρχει κανένα $\delta > 0$, οσοδήποτε μικρό, ώστε η f να είναι αύξουσα στο διάστημα $(-\delta, \delta)$.

6.64. Απόσταση σημείου από ευθεία. Έστω οποιαδήποτε ευθεία l του xy -επιπέδου και οποιοδήποτε σημείο $M = (x_0, y_0)$ του ίδιου επιπέδου. Ονομάζουμε **απόσταση** του M από την l την ελάχιστη απόσταση από το M προς οποιοδήποτε σημείο της l και τη συμβολίζουμε $d(M, l)$.

(i) Αν η l είναι κατακόρυφη με εξίσωση $x = \kappa$, αποδείξτε ότι $d(M, l) = |\kappa - x_0|$.

(ii) Αν η l είναι πλάγια με εξίσωση $y = \mu x + \nu$, αποδείξτε ότι $d(M, l) = \frac{|\mu x_0 + \nu - y_0|}{\sqrt{1 + \mu^2}}$.

Αν η εξίσωση της ευθείας είναι στη μορφή $ax + by = c$, όπου ένα τουλάχιστον από τα a, b είναι $\neq 0$, τότε

$$d(M, l) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

6.65. Λυγίζουμε μία λεπτή ευθεία ράβδο μήκους l ώστε να σχηματιστεί ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Σε ποια σημεία της πρέπει να λυγίσουμε τη ράβδο ώστε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο να έχει μέγιστο εμβαδόν;

6.66. Θεωρούμε μία ευθεία γραμμή η οποία χωρίζει ένα επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα, καθώς και ένα σημείο A_1 στο ένα ημιεπίπεδο σε απόσταση d_1 από την ευθεία και ένα σημείο A_2 στο άλλο ημιεπίπεδο σε απόσταση d_2 από την ευθεία. Ένα σημειακό όχημα κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου v_1 όταν βρίσκεται στο πρώτο ημιεπίπεδο και με ταχύτητα σταθερού μέτρου v_2 όταν βρίσκεται στο δεύτερο ημιεπίπεδο. Βρείτε την τροχιά την οποία πρέπει να ακολουθήσει το όχημα ώστε από το σημείο A_1 να φτάσει στο σημείο A_2 στον ελάχιστο χρόνο.

6.67. Έστω ορθός κυκλικός κώνος με ύψος h και ακτίνα βάσης r .

(i) Ποιος είναι ο κύλινδρος ο οποίος περιέχεται στον κώνο, με μία βάση του πάνω στη βάση του κώνου, και έχει τον μέγιστο όγκο;

(ii) Ποιος είναι ο κύλινδρος ο οποίος περιέχεται στον κώνο, με μία βάση του πάνω στη βάση του κώνου, και έχει τη μέγιστη επιφάνεια;

6.68. (i) Έστω ότι οι $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο $[0, b]$ και παραγωγίσιμες στο $(0, b)$, έστω ότι $f(0) = g(0) = 0$ και ότι ισχύει $f'(x) > 0$, $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, b)$. Αν η $\frac{f}{g}$ είναι αύξουσα στο $(0, b)$, αποδείξτε ότι η $\frac{f}{g}$ είναι αύξουσα στο $(0, b]$.

(ii) Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις $\frac{x}{\sin x}$, $\frac{x^2}{1 - \cos x}$, $\frac{x^3}{x - \sin x}$, $\frac{x^4}{-1 + \frac{x^2}{2} + \cos x}$, $\frac{x^5}{-x + \frac{x^3}{3} + \sin x}$ είναι αύξουσες στο $(0, \frac{\pi}{2})$. Ποια είναι η γενική μορφή αυτών των συναρτήσεων;

6.10.2 Απόδειξη ισοτήτων και ανισοτήτων

Θα δούμε πώς αποδεικνύονται διάφορες ισότητες και ανισότητες με τη βοήθεια των Θεωρημάτων Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού και των Προτάσεων 6.6 και 6.7.

Παράδειγμα 6.56. Θα χρησιμοποιήσουμε τις παραγώγους $\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$ και $\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$ για να αποδείξουμε ότι ισχύει $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ για κάθε x .

Θεωρούμε την $f(x) = \cos^2 x + \sin^2 x$. Τότε $f'(x) = -2 \cos x \sin x + 2 \sin x \cos x = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, +\infty)$. Από την Πρόταση 6.6 συνεπάγεται ότι η f είναι σταθερή στο $(-\infty, +\infty)$, δηλαδή υπάρχει c ώστε να ισχύει $f(x) = c$ για κάθε $x \in (-\infty, +\infty)$. Βρίσκουμε την τιμή του c δοκιμάζοντας οποιαδήποτε βολική τιμή του x . Για παράδειγμα: $c = f(0) = 1$.

Παράδειγμα 6.57. Θα αποδείξουμε ότι για κάθε x ισχύει

$$e^x \geq x + 1.$$

Θεωρούμε την $f(x) = e^x - x - 1$ και βλέπουμε ότι $f'(x) = e^x - 1 < 0$ για κάθε $x < 0$, και $f'(x) = e^x - 1 > 0$ για κάθε $x > 0$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα ισχύει $f(x) > f(0) = 0$ για κάθε $x \neq 0$.

Παράδειγμα 6.58. Θα αποδείξουμε ότι για κάθε x ισχύει

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Θεωρούμε την $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$. Λόγω της Πρότασης 4.11, ισχύει $f'(x) = x - \sin x < 0$ για $x < 0$, και $f'(x) = x - \sin x > 0$ για $x > 0$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα ισχύει $f(x) > f(0) = 0$ για κάθε $x \neq 0$.

Παράδειγμα 6.59. Θα αποδείξουμε ότι αν $0 < x < y$, τότε $\frac{1}{y} < \frac{1}{y-x} \log\left(\frac{y}{x}\right) < \frac{1}{x}$.

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Lagrange) υπάρχει $\xi \in (x, y)$ ώστε $\frac{1}{y-x} \log\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\log y - \log x}{y-x} = \frac{1}{\xi}$. Τώρα παρατηρούμε ότι $\frac{1}{y} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x}$.

Ασκήσεις

6.69. (i) Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{d(\arccos y + \arcsin y)}{dy} = 0$ για κάθε $y \in (-1, 1)$.

(ii) Αποδείξτε την πρώτη ισότητα στην άσκηση 2.28, δηλαδή ότι ισχύει $\arccos y + \arcsin y = \frac{\pi}{2}$ για κάθε $y \in [-1, 1]$. Με τον ίδιο τρόπο αποδείξτε και τη δεύτερη ισότητα στην ίδια άσκηση.

6.70. (i) Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{d(\arctan y + \arctan \frac{1}{y})}{dy} = 0$ για κάθε $y \neq 0$.

(ii) Αποδείξτε ότι ισχύει $\arctan y + \arctan \frac{1}{y} = \frac{\pi}{2}$ για κάθε $y > 0$, και $\arctan y + \arctan \frac{1}{y} = -\frac{\pi}{2}$ για κάθε $y < 0$. Πώς συμβιβάζεται με την Πρόταση 6.6 το ότι η $\arctan y + \arctan \frac{1}{y}$ έχει παράγωγο μηδέν στο πεδίο ορισμού της, αλλά δεν είναι σταθερή στο πεδίο ορισμού της;

6.71. Έστω ότι οι $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο (a, b) και $a < \xi < b$. Υποθέτουμε ότι ισχύει $f'(x) = g(x)$ και $g'(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$ και $f(\xi) = 0$ και $g(\xi) = 1$. Γνωρίζετε κάποιο ζευγάρι τέτοιων συναρτήσεων;

(i) Αποδείξτε ότι ισχύει $f(x)^2 + g(x)^2 = 1$ για κάθε $x \in (a, b)$.

(ii) Αν οι F, G έχουν τις ίδιες ιδιότητες, αποδείξτε ότι ισχύει $F(x) = f(x)$ και $G(x) = g(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$.

Υπόδειξη: Θεωρήστε την $(F(x) - f(x))^2 + (G(x) - g(x))^2$.

6.72. Αποδείξτε ότι

(i) $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x$ για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

(ii) $\log \frac{1+x}{1-x} > 2x + \frac{2x^3}{3}$ για κάθε $x \in (0, 1)$.

(iii) $\log \frac{1+x}{1-x} < 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{2}$ για κάθε $x \in (0, \frac{1}{2}]$.

(iv) $e^{\frac{x}{x+1}} < 1 + x$ για κάθε $x > -1$.

(v) $x - \frac{x^3}{3} < \arctan x < x$ για κάθε $x > 0$.

6.73. Έστω $0 < x < y$. Αποδείξτε ότι

(i) $ax^{a-1} < \frac{y^a - x^a}{y-x} < ay^{a-1}$, αν $a < 0$ ή $a > 1$.

(ii) $ay^{a-1} < \frac{y^a - x^a}{y-x} < ax^{a-1}$, αν $0 < a < 1$.

6.74. (i) Έστω $x < y$ και $a > 0$, $a \neq 1$. Αποδείξτε ότι $a^x \log a < \frac{a^y - a^x}{y-x} < a^y \log a$.

(ii) Έστω $0 \leq x < y$. Αποδείξτε ότι $\frac{y-x}{1+y^2} < \arctan y - \arctan x < \frac{y-x}{1+x^2}$.

6.75. Έστω ότι η $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και ότι έχει παράγωγο στο (a, b) . Αν ισχύει $f'(x) \geq \mu$ για κάθε $x \in (a, b)$, αποδείξτε ότι ισχύει

$$f(a) + \mu(x - a) \leq f(x) \leq f(b) + \mu(x - b)$$

για κάθε $x \in [a, b]$.

Πώς θα γίνει αυτή η διπλή ανισότητα, αν ισχύει $f'(x) \leq \mu$ για κάθε $x \in (a, b)$;

6.76. Έστω $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $[1, 4]$, έστω $f(1) = -7$ και έστω ότι ισχύει $f'(x) \geq 3$ για κάθε $x \in (1, 4)$.

(i) Αποδείξτε ότι $f(4) \geq 2$.

(ii) Αν $f(4) = 2$, αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) = 3x - 10$ για κάθε $x \in [1, 4]$.

6.77. Έστω διάστημα I και έστω ότι η $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο I και ότι έχει παράγωγο σε κάθε εσωτερικό σημείο του I . Υποθέτουμε ότι $|y_1 - y_2| = d$, ότι $x_1 \in I$, $x_2 \in I$ και ότι $f(x_1) = y_1$ και $f(x_2) = y_2$.

(i) Αν ισχύει $|f'(x)| \geq m > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I , αποδείξτε ότι $|x_1 - x_2| \leq \frac{d}{m}$.

(ii) Αν ισχύει $|f'(x)| \leq m$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I , αποδείξτε ότι $|x_1 - x_2| \geq \frac{d}{m}$.

6.78. Αποδείξτε ότι για κάθε $x \geq 0$ ισχύει

$$e^x \geq 1 + \frac{x}{1!}, \quad e^x \geq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}, \quad e^x \geq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}.$$

Ποια είναι η γενική μορφή αυτών των ανισοτήτων; Κατόπιν, αποδείξτε ότι για $x \leq 0$ ισχύει η πρώτη, η τρίτη, η πέμπτη κ.τ.λ. ανισότητα, καθώς και η αντίστροφη της δεύτερης, της τέταρτης κ.τ.λ. ανισότητας.

6.79. (i) Αποδείξτε ότι για κάθε $x \geq 0$ ισχύει

$$\sin x \leq \frac{x}{1!}, \quad \sin x \geq \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!}, \quad \sin x \leq \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

και ότι οι ανισότητες αυτές αντιστρέφονται για $x \leq 0$.

(ii) Αποδείξτε ότι για κάθε x ισχύει

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2!}, \quad \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}, \quad \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}.$$

Ποια είναι η γενική μορφή των ανισοτήτων στα (i), (ii);

6.80. (i) Αν $A > 0$, τότε βρείτε την ελάχιστη τιμή της $\frac{nA+x}{(n+1)^{n+1}\sqrt[n]{A^n x}}$ στο $(0, +\infty)$. Βρείτε όλα τα σημεία ολικού ελαχίστου.

(ii) Αν $a_1 \geq 0, \dots, a_n \geq 0$, αποδείξτε την **ανισότητα Cauchy**:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα στο (i) και επαγωγή.

Αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$, αν και μόνο αν $a_1 = \dots = a_n$.

6.81. Έστω $a \geq 0, b \geq 0$ και $p > 1, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Αποδείξτε την **ανισότητα Young**:

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Αποδείξτε ότι η ανισότητα αυτή ισχύει ως ισότητα, αν και μόνο αν $a^p = b^q$.

Υπόδειξη: Μελετήστε τη συνάρτηση $\frac{1}{q}x^q - x + \frac{1}{p}$ στο $(0, +\infty)$ και μετά πάρτε $x = \frac{b}{a^{p-1}}$.

6.82. Έστω $a_1 \geq 0, \dots, a_n \geq 0, b_1 \geq 0, \dots, b_n \geq 0$ και $p > 1, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(i) Αποδείξτε την **ανισότητα Hölder**:

$$a_1b_1 + \dots + a_nb_n \leq (a_1^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}}(b_1^q + \dots + b_n^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Αποδείξτε ότι ισχύει η ισότητα, αν και μόνο αν υπάρχουν $s \geq 0, t \geq 0$, όχι και τα δύο ίσα με 0, ώστε να ισχύει $sa_k^p = tb_k^q$ για κάθε $k = 1, \dots, n$.

Υπόδειξη: Έστω $A = (a_1^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}}$ και $B = (b_1^q + \dots + b_n^q)^{\frac{1}{q}}$. Αν $A > 0, B > 0$, εφαρμόστε την ανισότητα Young στην άσκηση 6.81 σε κάθε ζεύγος $\frac{a_k}{A}, \frac{b_k}{B}$ και προσθέστε. Τι γίνεται αν $A = 0$ ή $B = 0$;

Ως ειδική περίπτωση της ανισότητας Hölder, με $p = q = 2$, προκύπτει η γνωστή και πολύ σημαντική **ανισότητα Cauchy**:

$$a_1b_1 + \dots + a_nb_n \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2)^{\frac{1}{2}}(b_1^2 + \dots + b_n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

(ii) Αποδείξτε την **ανισότητα Minkowski**:

$$((a_1 + b_1)^p + \dots + (a_n + b_n)^p)^{\frac{1}{p}} \leq (a_1^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} + (b_1^p + \dots + b_n^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Αποδείξτε ότι ισχύει η ισότητα, αν και μόνο αν υπάρχουν $s \geq 0, t \geq 0$, όχι και τα δύο ίσα με 0, ώστε να ισχύει $sa_k = tb_k$ για κάθε $k = 1, \dots, n$.

Υπόδειξη: Γράψτε $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p = \sum_{k=1}^n a_k(a_k + b_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^n b_k(a_k + b_k)^{p-1}$ και εφαρμόστε την ανισότητα Hölder και στα δύο αθροίσματα στη δεξιά μεριά.

6.83. (i) Αποδείξτε ότι

$$(x+1)^a \geq ax+1 \quad \text{για } x \geq -1, a \geq 1$$

και ότι η ισότητα ισχύει, μόνο αν $x = 0$ ή $a = 1$. Η ανισότητα αυτή είναι γενίκευση της ανισότητας του Bernoulli, στην οποία το a είναι φυσικός.

(ii) Αν $0 < a < b, x \geq -a$ και $x \neq 0$, αποδείξτε ότι $(1 + \frac{x}{a})^a < (1 + \frac{x}{b})^b$.

6.11 Παράγωγοι ανώτερης τάξης

Η δεύτερη παράγωγος της f στο ξ είναι η πρώτη παράγωγος της f' στο ξ , δηλαδή το όριο

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi}.$$

Το όριο αυτό, αν υπάρχει, το συμβολίζουμε $f''(\xi)$ ή $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \Big|_{x=\xi}$ ή $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=\xi}$. Δηλαδή,

$$f''(\xi) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \Big|_{x=\xi} = \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=\xi} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi}.$$

Το σύμβολο $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=\xi}$ χρησιμοποιείται υπό την προϋπόθεση ότι είναι y το σύμβολο για την εξαρτημένη μεταβλητή: $y = f(x)$.

Ομοίως, ορίζεται η τρίτη παράγωγος ως η πρώτη παράγωγος της δεύτερης παραγώγου και, επαγωγικά, ορίζεται η n -οστή παράγωγος ως η πρώτη παράγωγος της $(n-1)$ -οστής παραγώγου. Η πρώτη παράγωγος συμβολίζεται και $f^{(1)}$ και η δεύτερη παράγωγος συμβολίζεται και $f^{(2)}$. Για την τρίτη παράγωγο χρησιμοποιούμε και τα δύο σύμβολα f''' και $f^{(3)}$, αλλά για μεγαλύτερης τάξης παραγώγους το σύμβολο με τους τόνους είναι άβολο, οπότε για την n -οστή παράγωγο χρησιμοποιούμε τα σύμβολα

$$f^{(n)}(\xi) \quad \text{ή} \quad \frac{d^n f(x)}{dx^n} \Big|_{x=\xi} \quad \text{ή} \quad \frac{d^n y}{dx^n} \Big|_{x=\xi}.$$

Τέλος, ας αναφέρουμε ότι καμιά φορά συμβολίζεται $f^{(0)}$ η ίδια η συνάρτηση f .

Παράδειγμα 6.60. Αν $m \in \mathbb{N}$, τότε οι διαδοχικές παράγωγοι της x^m είναι

$$\begin{aligned} \frac{dx^m}{dx} &= mx^{m-1}, \quad \frac{d^2 x^m}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}, \quad \frac{d^3 x^m}{dx^3} = m(m-1)(m-2)x^{m-3}, \quad \dots \\ \dots \quad \frac{d^{m-1} x^m}{dx^{m-1}} &= m(m-1) \cdots 2x, \quad \frac{d^m x^m}{dx^m} = m(m-1) \cdots 2 \cdot 1 = m!. \end{aligned}$$

Επειδή η m -οστή παράγωγος είναι σταθερή, κάθε παράγωγος μεγαλύτερης τάξης είναι ίση με 0, δηλαδή $\frac{d^n x^m}{dx^n} = 0$ για κάθε $n > m$.

Παράδειγμα 6.61. Αν το a δεν είναι φυσικός ή 0, τότε οι παράγωγοι της x^a είναι $\frac{dx^a}{dx} = ax^{a-1}$, $\frac{d^2 x^a}{dx^2} = a(a-1)x^{a-2}$, $\frac{d^3 x^a}{dx^3} = a(a-1)(a-2)x^{a-3}$ και, γενικά, για κάθε n είναι

$$\frac{d^n x^a}{dx^n} = a(a-1) \cdots (a-n+1)x^{a-n}.$$

Παρατηρήστε ότι, επειδή το a δεν είναι φυσικός ή 0, ο συντελεστής της δύναμης του x δεν είναι ίσος με 0, οπότε καμιά παράγωγος δεν είναι ίση με 0.

Παράδειγμα 6.62. Αν $a > 0$, $a \neq 1$, τότε οι παράγωγοι της a^x είναι $\frac{da^x}{dx} = a^x \log a$, $\frac{d^2 a^x}{dx^2} = a^x \log^2 a$, και, γενικά,

$$\frac{d^n a^x}{dx^n} = a^x \log^n a$$

για κάθε n .

Ειδικά για την e^x είναι

$$\frac{d^n e^x}{dx^n} = e^x$$

για κάθε n .

Παράδειγμα 6.63. Οι παράγωγοι της $\sin x$ είναι $\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$, $\frac{d^2 \sin x}{dx^2} = -\sin x$, $\frac{d^3 \sin x}{dx^3} = -\cos x$, $\frac{d^4 \sin x}{dx^4} = \sin x$. Από το σημείο αυτό οι διαδοχικές παράγωγοι επαναλαμβάνουν τον «κύκλο»: $\sin x$, $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$. Άρα για κάθε φυσικό k ισχύει

$$\frac{d^{2k} \sin x}{dx^{2k}} = (-1)^k \sin x, \quad \frac{d^{2k-1} \sin x}{dx^{2k-1}} = (-1)^{k-1} \cos x.$$

Ομοίως, οι παράγωγοι της $\cos x$ είναι $\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$, $\frac{d^2 \cos x}{dx^2} = -\cos x$, $\frac{d^3 \cos x}{dx^3} = \sin x$, $\frac{d^4 \cos x}{dx^4} = \cos x$. Από το σημείο αυτό οι διαδοχικές παράγωγοι επαναλαμβάνουν τον «κύκλο»: $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$, $\sin x$. Άρα για κάθε φυσικό k ισχύει

$$\frac{d^{2k} \cos x}{dx^{2k}} = (-1)^k \cos x, \quad \frac{d^{2k-1} \cos x}{dx^{2k-1}} = (-1)^k \sin x.$$

Ασκήσεις

6.84. Αποδείξτε ότι η $\begin{cases} x^2, & \text{αν } x \geq 0, \\ -x^2, & \text{αν } x \leq 0, \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, +\infty)$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και ότι δεν έχει δεύτερη παράγωγο στο 0.

Γενικά, για οποιοδήποτε $m \in \mathbb{N}$, θεωρήστε την $f(x) = \begin{cases} x^m, & \text{αν } x \geq 0, \\ -x^m, & \text{αν } x \leq 0, \end{cases}$ και υπολογίστε, αν υπάρχει, την $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ για κάθε n .

6.85. Βρείτε για κάθε n τις n -οστές παραγώγους των $\frac{1}{x-4}$, $\frac{x+2}{x-1}$, $\frac{x+2}{x^2-1}$, $\frac{x+1}{(x-1)^2}$, $\frac{x^3}{x^2-1}$, e^{2x-5} , $\cos(4x+1)$, $\sin(5x)\sin(7x)$.

Υπόδειξη: Για τη δεύτερη γράψτε $\frac{x+2}{x-1} = \frac{(x-1)+3}{x-1}$, για την τρίτη $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$ και για την τελευταία θυμηθείτε έναν γνωστό τριγωνομετρικό τύπο.

6.86. (i) Αν το $p(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $n \geq 1$, αποδείξτε ότι το $p'(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $n-1$. Αποδείξτε και το αντίστροφο. *Προσέξτε:* το μηδενικό πολυώνυμο δεν έχει βαθμό.

(ii) Έστω $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$. Αποδείξτε ότι ισχύει $f^{(n+1)}(x) = 0$ για κάθε x σε κάποιο διάστημα I θετικού μήκους, αν και μόνο αν το $f(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $\leq n$ ή το μηδενικό πολυώνυμο.

6.87. (i) Έστω πολυώνυμο $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$. Αποδείξτε ότι $p^{(k)}(0) = k! a_k$ για κάθε $n = 0, 1, \dots, n$. Επίσης, αποδείξτε ότι $p^{(k)}(0) = 0$ για κάθε $k \geq n+1$.

(ii) Έστω αριθμοί $y_0, y_1, \dots, y_n$. Βρείτε πολυώνυμο $p(x)$ βαθμού $\leq n$ ώστε να είναι $p^{(k)}(0) = y_k$ για κάθε $k = 0, 1, \dots, n$. Πόσα τέτοια πολυώνυμα υπάρχουν;

6.88. Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, διάστημα I και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω ότι η $f^{(n-1)}$ είναι συνεχής στο I και η $f^{(n)}$ υπάρχει στο εσωτερικό του I . Αν η f έχει $n+1$ διαφορετικές ρίζες στο I , αποδείξτε ότι η $f^{(n)}$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο εσωτερικό του I .

6.89. Έστω $a < b$. Θεωρήστε το πολυώνυμο $p(x) = (x-a)^n(x-b)^n$. Αποδείξτε ότι η $p^{(n)}$ είναι πολυώνυμο βαθμού n , ότι έχει ακριβώς n διαφορετικές ρίζες και ότι όλες αυτές οι ρίζες ανήκουν στο (a, b) .

6.90. Έστω $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $[-1, 1]$, τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ και έστω $f(-1) = f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(0) = 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (-1, 1)$ ώστε $f^{(3)}(\xi) = 3$.

Υπόδειξη: Βρείτε πολυώνυμο τρίτου βαθμού p το οποίο ικανοποιεί όλες τις παραπάνω συνθήκες και θεωρήστε την $f - p$.

6.91. Έστω ότι η $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ έχει δεύτερη παράγωγο στο (a, b) και ότι ισχύει $f(x)f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Αν στο (a, b) περιέχονται δύο λύσεις της εξίσωσης $f(x)f'(x) = 0$, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή ανάμεσα στις δύο αυτές λύσεις.

Υπόδειξη: Βρείτε την $(ff')'$.

6.92. Αποδείξτε με επαγωγή τον **τύπο του Leibniz**:

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

Υπόδειξη: Μελετήστε ξανά την απόδειξη του διωνυμικού τύπου του Newton στο παράδειγμα 1.22.

6.93. Θεωρήστε την $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ στο $(0, +\infty)$.

(i) Αποδείξτε με επαγωγή ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $f^{(n)}(x) = x^{-2n} p_n(x) e^{-\frac{1}{x}}$ για κάθε $x > 0$, όπου $p_n(x)$ είναι κάποιο πολυώνυμο βαθμού $n-1$. Για παράδειγμα: $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = 1 - 2x$, $p_3(x) = 1 - 6x + 6x^2$ κ.τ.λ.

(ii) Αποδείξτε ότι $p_{n+1}(x) = x^2 p'_n(x) + (1 - 2nx) p_n(x)$ για κάθε $x > 0$.

(iii) Αποδείξτε ότι $p_{n+2}(x) = (1 - 2(n+1)x) p_{n+1}(x) - n(n+1)x^2 p_n(x)$ για κάθε $x > 0$.

(iv) Αποδείξτε ότι ο συντελεστής του x^{n-1} στο $p_n(x)$ είναι το $(-1)^{n-1} n!$.

(v) Αποδείξτε ότι $x^2 p''_n(x) - (2nx - 2x - 1) p'_n(x) + n(n-1) p_n(x) = 0$ για κάθε $x > 0$.

6.94. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$.

(i) Αποδείξτε με επαγωγή ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $f^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x) e^{-x^2}$ για κάθε x , όπου $H_n(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n . Για παράδειγμα: $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$, $H_3(x) = 8x^3 - 12x$ κ.τ.λ.

(ii) Αποδείξτε ότι $H_{n+1}(x) = -H'_n(x) + 2xH_n(x)$ για κάθε x .

(iii) Αποδείξτε ότι $f'(x) = -2xf(x)$ για κάθε x . Παραγωγίστε n φορές με τον τύπο του Leibniz στην άσκηση 6.92 για να αποδείξετε ότι $H_{n+2}(x) = 2xH_{n+1}(x) - 2(n+1)H_n(x)$ για κάθε x .

(iv) Αποδείξτε ότι $H'_{n+1}(x) = 2(n+1)H_n(x)$ για κάθε x .

(v) Αποδείξτε ότι ο συντελεστής του x^n στο $H_n(x)$ είναι το 2^n .

(vi) Αποδείξτε ότι $H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0$ για κάθε x .

Τα πολυώνυμα $H_n(x)$ ονομάζονται **πολυώνυμα Hermite**.

6.12 Κυρτότητα και κοιλότητα, σημεία καμπής και απόδειξη ανισοτήτων

6.12.1 Τοπικά ακρότατα

Κριτήριο δεύτερης παραγώγου. Έστω $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $a < \xi < b$ και έστω ότι η f έχει παράγωγο στο (a, b) και δεύτερη παράγωγο στο ξ .

(i) Αν $f'(\xi) = 0$ και $f''(\xi) > 0$, τότε το ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f .

(ii) Αν $f'(\xi) = 0$ και $f''(\xi) < 0$, τότε το ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της f .

Απόδειξη. (i) Έστω $f'(\xi) = 0$ και $f''(\xi) > 0$. Επειδή $f''(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi}$, συνεπάγεται ότι ισχύει $\frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} > 0$ κοντά στο ξ , δηλαδή υπάρχουν $c \in (a, \xi)$ και $d \in (\xi, b)$ ώστε να ισχύει $\frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} > 0$ για κάθε $x \in (c, \xi) \cup (\xi, d)$. Επομένως, ισχύει $f'(x) < f'(\xi) = 0$ για κάθε $x \in (c, \xi)$ και $f'(x) > f'(\xi) = 0$ για κάθε $x \in (\xi, d)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $(c, \xi]$ και στο $[\xi, d)$, συνεπάγεται ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(c, \xi]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\xi, d)$. Άρα το ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f .

(ii) Ομοίως. □

Παράδειγμα 6.64. Για την $f(x) = x^2$ είναι $f'(x) = 2x$ και $f''(x) = 2$, οπότε $f'(0) = 0$ και $f''(0) = 2 > 0$. Άρα το 0 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της συνάρτησης.

Παράδειγμα 6.65. Δεν ισχύει το αντίστροφο του κριτηρίου δεύτερης παραγώγου. Η $f(x) = x^4$ έχει $f'(x) = 4x^3$ και $f''(x) = 12x^2$, οπότε $f'(0) = 0$ και $f''(0) = 0$. Όμως το 0 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της συνάρτησης.

Ασκήσεις

6.95. Εφαρμόστε το κριτήριο δεύτερης παραγώγου για να βρείτε τα σημεία τοπικού ακροτάτου των συναρτήσεων $x^3 - 4x^2 + x + 3$, xe^x , xe^{-x^2} , $x \log x$, $\frac{x^2 + x - 1}{x + 2}$.

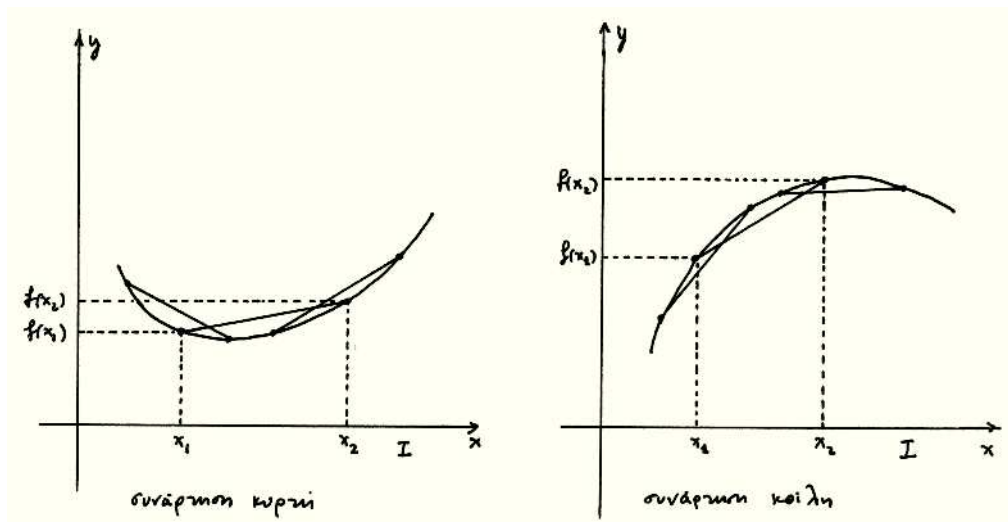
6.12.2 Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις και σημεία καμπής

Ορισμός 6.9. Έστω διάστημα I και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Η f χαρακτηρίζεται **κυρτή** στο I , αν για κάθε $x_1 \in I$, $x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ το μέρος του γραφήματος της f το οποίο αντιστοιχεί στο διάστημα $[x_1, x_2]$ δεν έχει κανένα σημείο του πάνω από το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$.

Η f χαρακτηρίζεται **κοίλη** στο I , αν για κάθε $x_1 \in I$, $x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ το μέρος του γραφήματος της f το οποίο αντιστοιχεί στο διάστημα $[x_1, x_2]$ δεν έχει κανένα σημείο του κάτω από το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$.

Αυτός ο ορισμός των εννοιών της κυρτότητας και της κοιλότητας είναι γεωμετρικός και απεικονίζεται στο σχήμα 6.13. Αλλά τώρα θα διατυπώσουμε και με αναλυτική ορολογία τις έννοιες αυτές.



Σχήμα 6.13

Η εξίσωση της ευθείας l η οποία διέρχεται από τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$ είναι η

$$y = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1).$$

Αν θεωρήσουμε οποιοδήποτε $x \in [x_1, x_2]$, τότε το να μην είναι το αντίστοιχο σημείο $(x, f(x))$ του γραφήματος της f πάνω από το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$ ισοδυναμεί με το ότι το σημείο $(x, f(x))$ δεν είναι πάνω από το αντίστοιχο σημείο (x, y) της ευθείας l , δηλαδή ότι

$$f(x) \leq y = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1).$$

Ομοίως, το να μην είναι το σημείο $(x, f(x))$ του γραφήματος της f κάτω από το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$ ισοδυναμεί με την αντίστροφη ανισότητα. Μπορούμε, λοιπόν, να πούμε ότι:

Η f είναι κυρτή στο διάστημα I , αν για κάθε $x_1 \in I$, $x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ και για κάθε $x \in [x_1, x_2]$ ισχύει

$$f(x) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1).$$

Η f είναι κοίλη στο διάστημα I , αν για κάθε $x_1 \in I$, $x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ και για κάθε $x \in [x_1, x_2]$ ισχύει

$$f(x) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1).$$

Υπάρχει ένας ακόμη τρόπος να διατυπώσουμε τις ανισότητες οι οποίες χαρακτηρίζουν τις κυρτές και τις κοίλες συναρτήσεις. Παρατηρούμε εύκολα ότι για κάθε $t \in [0, 1]$ ο αριθμός

$$x = (1 - t)x_1 + tx_2$$

ανήκει στο $[x_1, x_2]$. Αντιστρόφως, για κάθε $x \in [x_1, x_2]$ υπάρχει μοναδικό $t \in [0, 1]$ ώστε να ισχύει $x = (1 - t)x_1 + tx_2$. Πράγματι, λύνοντας ως προς t , βρίσκουμε $t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ το οποίο ανήκει στο $[0, 1]$. Μπορούμε, λοιπόν, να γράψουμε την ανισότητα $f(x) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1)$, η οποία ορίζει την έννοια της κυρτότητας, στη μορφή

$$f((1 - t)x_1 + tx_2) \leq (f(x_2) - f(x_1))t + f(x_1) = (1 - t)f(x_1) + tf(x_2),$$

και να ξαναδιατυπώσουμε τον ορισμό της κυρτότητας και της κοιλότητας ως εξής:

Η f είναι κυρτή στο διάστημα I , αν για κάθε $x_1 \in I$, $x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ και για κάθε $t \in [0, 1]$ ισχύει

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

Η f είναι κοίλη στο διάστημα I , αν για κάθε $x_1 \in I$, $x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ και για κάθε $t \in [0, 1]$ ισχύει

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \geq (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

Παρατηρήστε ότι αν $x_1 = x_2$, τότε όλες οι παραπάνω ανισότητες ισχύουν, έτσι και αλλιώς, ως ισότητες.

Παράδειγμα 6.66. Κάθε συνάρτηση $f(x) = \mu x + \nu$ είναι κυρτή και κοίλη στο $(-\infty, +\infty)$. Πράγματι:

$$f((1-t)x_1 + tx_2) = \mu((1-t)x_1 + tx_2) + \nu = (1-t)(\mu x_1 + \nu) + t(\mu x_2 + \nu) = (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

Παράδειγμα 6.67. Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι κυρτή στο $(-\infty, +\infty)$. Πράγματι, χρησιμοποιώντας την ανισότητα $2x_1x_2 \leq x_1^2 + x_2^2$, έχουμε για $0 \leq t \leq 1$:

$$\begin{aligned} f((1-t)x_1 + tx_2) &= ((1-t)x_1 + tx_2)^2 = (1-t)^2x_1^2 + 2t(1-t)x_1x_2 + t^2x_2^2 \\ &\leq (1-t)^2x_1^2 + t(1-t)(x_1^2 + x_2^2) + t^2x_2^2 = (1-t)x_1^2 + tx_2^2 \\ &= (1-t)f(x_1) + tf(x_2). \end{aligned}$$

Παράδειγμα 6.68. Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι κυρτή στο $(-\infty, +\infty)$, διότι για $0 \leq t \leq 1$:

$$f((1-t)x_1 + tx_2) = |(1-t)x_1 + tx_2| \leq (1-t)|x_1| + t|x_2| = (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

Στη συνέχεια θα δούμε δύο βασικά κριτήρια με τα οποία μπορούμε να αποφασίσουμε αν μια συνάρτηση είναι κυρτή ή κοίλη σε κάποιο διάστημα.

Πρόταση 6.9. Έστω διάστημα I και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο I και έχει παράγωγο σε κάθε εσωτερικό σημείο του I .

- (i) *Η f είναι κυρτή στο I , αν και μόνο αν η f' είναι αύξουσα στο εσωτερικό του I .*
- (ii) *Η f είναι κοίλη στο I , αν και μόνο αν η f' είναι φθίνουσα στο εσωτερικό του I .*

Απόδειξη. (i) Έστω ότι η f είναι κυρτή στο I . Παίρνουμε εσωτερικά σημεία x_1 και x_2 του I με $x_1 < x_2$ για να αποδείξουμε ότι $f'(x_1) \leq f'(x_2)$. Για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ ισχύει

$$f(x) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1) + f(x_1).$$

Αυτή η ανισότητα γράφεται και $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, οπότε, παίρνοντας το όριο της αριστερής πλευράς όταν $x \rightarrow x_1+$, βρίσκουμε

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

Ομοίως, η ίδια ανισότητα γράφεται και $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}$, οπότε, παίρνοντας το όριο της δεξιάς πλευράς όταν $x \rightarrow x_2-$, βρίσκουμε

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq f'(x_2).$$

Επομένως, $f'(x_1) \leq f'(x_2)$.

Αντιστρόφως, έστω ότι η f' είναι αύξουσα στο εσωτερικό του I . Θεωρούμε οποιαδήποτε $x_1 \in I$, $x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ και θεωρούμε οποιοδήποτε $x \in (x_1, x_2)$. Η συνάρτηση είναι συνεχής στο $[x_1, x]$ και έχει παράγωγο στο (x_1, x) , οπότε από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού γνωρίζουμε ότι υπάρχει $\xi_1 \in (x_1, x)$ ώστε $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(\xi_1)$.

Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι υπάρχει $\xi_2 \in (x, x_2)$ ώστε $\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(\xi_2)$. Λόγω της μονοτονίας της παραγώγου και του ότι $\xi_1 < x < \xi_2$, συνεπάγεται $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$, οπότε

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

Από αυτό συνεπάγεται $f(x) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1) + f(x_1)$. Τώρα, επειδή το x είναι οποιοδήποτε σημείο του (x_1, x_2) και επειδή η ίδια ανισότητα ισχύει, προφανώς, και για $x = x_1$ και $x = x_2$, η f είναι κυρτή στο I .

(ii) Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του (i). $\square$

Παράδειγμα 6.69. Η $f(x) = \begin{cases} 2x^2, & \text{αν } x \leq 0, \\ x^2, & \text{αν } 0 \leq x, \end{cases}$ έχει παράγωγο $f'(x) = \begin{cases} 4x, & \text{αν } x \leq 0, \\ 2x, & \text{αν } 0 \leq x. \end{cases}$ Η παράγωγος είναι αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$, οπότε η συνάρτηση είναι κυρτή στο $(-\infty, +\infty)$. Παρατηρήστε, εν όψει της Πρότασης 6.10, ότι η συνάρτηση δεν έχει δεύτερη παράγωγο στο 0.

Η Πρόταση 6.9 δίνει ένα δεύτερο γεωμετρικό περιεχόμενο στις έννοιες της κυρτότητας και της κοιλότητας. Έστω ότι η f έχει παράγωγο σε κάποιο διάστημα και ας συμβολίσουμε l_x την εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της συνάρτησης στο σημείο $(x, f(x))$. Η κλίση της l_x είναι ίση με $f'(x)$. Η Πρόταση 6.9 λέει ότι η f είναι κυρτή στο διάστημα, αν και μόνο αν η κλίση της μεταβλητής εφαπτόμενης ευθείας l_x αυξάνεται όταν το x αυξάνεται. Ομοίως, η f είναι κοίλη στο διάστημα, αν και μόνο αν η κλίση της μεταβλητής εφαπτόμενης ευθείας l_x μειώνεται όταν το x αυξάνεται.

Βάσει της γνωστής μας σχέσης ανάμεσα στη μονοτονία μίας συνάρτησης και στο πρόσημο της παραγώγου της, έχουμε την εξής προφανή παραλλαγή της Πρότασης 6.9.

Πρόταση 6.10. Έστω διάστημα I και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο I και έχει δεύτερη παράγωγο σε κάθε εσωτερικό σημείο του I .

(i) Η f είναι κυρτή στο I , αν και μόνο αν ισχύει $f''(x) \geq 0$ για κάθε x εσωτερικό του I .

(ii) Η f είναι κοίλη στο I , αν και μόνο αν ισχύει $f''(x) \leq 0$ για κάθε x εσωτερικό του I .

Παράδειγμα 6.70. Για την $f(x) = x(x-1)(x-2)$ έχουμε ότι $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$ και $f''(x) = 6x - 6$. Ισχύει $f''(x) \leq 0$ στο $(-\infty, 1)$, οπότε η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 1]$. Ισχύει $f''(x) \geq 0$ στο $(1, +\infty)$, οπότε η f είναι κυρτή στο $[1, +\infty)$.

Παράδειγμα 6.71. Αν το $n \in \mathbb{N}$ είναι άρτιο, τότε η x^n είναι κυρτή στο $(-\infty, +\infty)$. Αν το $n \in \mathbb{N}$ είναι περιττό, τότε η x^n είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$ και κυρτή στο $[0, +\infty)$.

Πράγματι, αν το n είναι άρτιο, τότε ισχύει $\frac{d^2 x^n}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2} \geq 0$ για κάθε x . Αν το n είναι περιττό, τότε ισχύει $\frac{d^2 x^n}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2} \geq 0$ για κάθε $x > 0$, και $\frac{d^2 x^n}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2} \leq 0$ για κάθε $x < 0$.

Παράδειγμα 6.72. Στο $(0, +\infty)$ η x^a είναι κυρτή, αν $a \leq 0$ ή $a \geq 1$, και κοίλη, αν $0 < a < 1$, διότι το πρόσημο της $\frac{d^2 x^a}{dx^2} = a(a-1)x^{a-2}$ είναι ίδιο με το πρόσημο του $a(a-1)$.

Παράδειγμα 6.73. Η a^x είναι κυρτή στο $(-\infty, +\infty)$, διότι $\frac{d^2 a^x}{dx^2} = a^x \log^2 a \geq 0$ για κάθε x .

Παράδειγμα 6.74. Το πρόσημο της $\frac{d^2 \log_a x}{dx^2} = -\frac{1}{x^2} \frac{1}{\log a}$ είναι ίδιο με το πρόσημο του $-\frac{1}{\log a}$. Άρα στο $(0, +\infty)$ η $\log_a x$ είναι κοίλη, αν $a > 1$, και κυρτή, αν $0 < a < 1$.

Ορισμός 6.10. Έστω διάστημα I και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ και ξ εσωτερικό σημείο του I και έστω ότι υπάρχει η $f'(\xi)$, δηλαδή ότι υπάρχει η εφαπτόμενη ευθεία l στο γράφημα της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$. Λέμε ότι το ξ είναι **σημείο καμπής** της f , αν το μέρος του γραφήματος της f το οποίο είναι κοντά στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ και δεξιά του και το μέρος του γραφήματος της f το οποίο είναι κοντά στο $(\xi, f(\xi))$ και αριστερά του είναι το ένα στο ένα και το άλλο στο άλλο από τα δύο ημιεπίπεδα, τα οποία ορίζει η εφαπτόμενη ευθεία l .

Αν $f'(\xi) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε η εφαπτόμενη ευθεία l είναι κατακόρυφη και είναι σαφές ότι ικανοποιείται αυτομάτως η γεωμετρική συνθήκη η οποία καθορίζει το ότι το ξ είναι σημείο καμπής της f . Τώρα έστω ότι το $f'(\xi)$ είναι αριθμός, οπότε η εφαπτόμενη ευθεία l στο γράφημα της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ έχει εξίσωση

$$y = f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi).$$

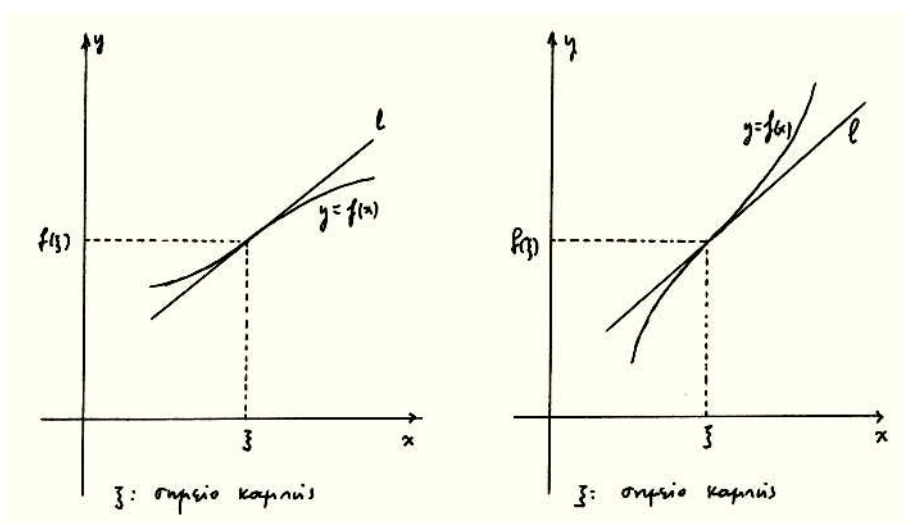
Άρα η γεωμετρική συνθήκη η οποία καθορίζει το ότι το ξ είναι σημείο καμπής της f μεταφράζεται ως εξής: υπάρχουν c, d ώστε $c < \xi < d$ και ώστε: είτε (i) ισχύει

$$f(x) \geq f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi) \text{ αν } x \in (c, \xi] \text{ και } f(x) \leq f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi) \text{ αν } x \in [\xi, d),$$

είτε (ii) ισχύει

$$f(x) \leq f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi) \text{ αν } x \in (c, \xi] \text{ και } f(x) \geq f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi) \text{ αν } x \in [\xi, d).$$

Παρατηρήστε τα δύο σχήματα 6.14 για τις αντίστοιχες δύο περιπτώσεις.



Σχήμα 6.14

Η Πρόταση 6.11 δίνει ένα κριτήριο για να αποφασίζουμε αν το ξ είναι σημείο καμπής της f στην περίπτωση κατά την οποία η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο ξ , δηλαδή αν το $f'(\xi)$ είναι αριθμός.

Πρόταση 6.11. Έστω διάστημα I και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ και ξ εσωτερικό σημείο του I και έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο ξ . Έστω ότι η f είτε (i) είναι κυρτή σε κάποιο διάστημα $(c, \xi]$ και κοίλη σε κάποιο $[\xi, d)$ είτε (ii) είναι κοίλη σε κάποιο $(c, \xi]$ και κυρτή σε κάποιο $[\xi, d)$. Τότε το ξ είναι σημείο καμπής της f .

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι κυρτή στο $(c, \xi]$ και κοίλη στο $[\xi, d)$. Έχουμε δει στην απόδειξη της Πρότασης 6.9 ότι, επειδή η f είναι κυρτή στο $(c, \xi]$, ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq f'(\xi)$ για κάθε $x \in (c, \xi]$, και ότι, επειδή η f είναι κοίλη στο $[\xi, d)$, ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq f'(\xi)$ για κάθε $x \in [\xi, d)$. Άρα ισχύει $f(x) \geq f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi)$ για κάθε $x \in (c, \xi]$ και $f(x) \leq f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi)$ για κάθε $x \in [\xi, d)$. Άρα το ξ είναι σημείο καμπής της f .

Ομοίως, αν η f είναι κοίλη στο $(c, \xi]$ και κυρτή στο $[\xi, d)$. □

Μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε διάφορα κριτήρια για το πότε η f είναι κυρτή ή κοίλη σε διαστήματα για να διακρίνουμε αν κάποιος αριθμός είναι σημείο καμπής της f . Για παράδειγμα:

Πρόταση 6.12. Έστω διάστημα I και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ και ξ εσωτερικό σημείο του I και έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο ξ . Έστω ότι είτε (i) ισχύει $f''(x) \geq 0$ σε κάποιο διάστημα (c, ξ) και $f''(x) \leq 0$ σε κάποιο (ξ, d) είτε (ii) ισχύει $f''(x) \leq 0$ σε κάποιο (c, ξ) και $f''(x) \geq 0$ σε κάποιο (ξ, d) . Τότε το ξ είναι σημείο καμπής της f .

Παράδειγμα 6.75. Η $f(x) = x^3$ έχει παράγωγο $f'(x) = 3x^2$ και δεύτερη παράγωγο $f''(x) = 6x$. Επειδή ισχύει $f''(x) \leq 0$ στο $(-\infty, 0)$ και $f''(x) \geq 0$ στο $(0, +\infty)$, το 0 είναι σημείο καμπής της συνάρτησης.

Ασκήσεις

6.96. Βρείτε τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτές ή κοίλες οι συναρτήσεις $x^3 - 3x^2 + 6x$, $x^2(x-1)^2$, $\frac{x}{x+1}$, $\frac{1}{\log x}$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$. Ποια είναι τα σημεία καμπής τους;

6.97. Αποδείξτε ότι το 0 είναι σημείο καμπής της $\begin{cases} x|x| + x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0. \end{cases}$ Μπορεί να εφαρμοστεί η Πρόταση 6.11 ή η Πρόταση 6.12;

6.98. Έστω f παραγωγίσιμη στο (a, b) , $a < \xi < b$ και έστω ότι ισχύει είτε $f'(x) \geq f'(\xi)$ για κάθε $x \in (a, b)$ είτε $f'(x) \leq f'(\xi)$ για κάθε $x \in (a, b)$. Αποδείξτε ότι το ξ είναι σημείο καμπής της f .

6.99. Έστω f συνεχής στο $[a, b]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a, b) . Αν $f(a) = f(b) = 0$ και $f(c) > 0$ για κάποιο $c \in (a, b)$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f''(\xi) < 0$.

Υπόδειξη: Τι γίνεται αν $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$; Αλλιώς: εφαρμόστε το Θεώρημα Μέσης Τιμής στα $[a, c]$, $[c, b]$.

6.100. Αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή σε κάποιο διάστημα, αν και μόνο αν η $-f$ είναι κοίλη στο ίδιο διάστημα.

6.101. Αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή και κοίλη σε κάποιο διάστημα (a, b) , αν και μόνο αν υπάρχουν p, q ώστε να ισχύει $f(x) = px + q$ για κάθε $x \in (a, b)$.

6.102. Έστω ότι η f είναι κυρτή στο διάστημα I και έστω $x_1 \in I$, $x_2 \in I$ και $x_1 < x_0 < x_2$. Αν το σημείο $(x_0, f(x_0))$ βρίσκεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα το οποίο ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$, αποδείξτε με γεωμετρικό και με αναλυτικό τρόπο ότι για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ το σημείο $(x, f(x))$ βρίσκεται πάνω στο ίδιο ευθύγραμμο τμήμα ή, με άλλα λόγια, ότι το μέρος του γραφήματος της f το οποίο αντιστοιχεί στο $[x_1, x_2]$ ταυτίζεται με το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$.

6.103. (i) Αν η f είναι κυρτή και άνω φραγμένη στο $(-\infty, +\infty)$, αποδείξτε με γεωμετρικό και με αναλυτικό τρόπο ότι είναι σταθερή στο $(-\infty, +\infty)$.

(ii) Αν η f είναι κυρτή και άνω φραγμένη στο $(a, +\infty)$, αποδείξτε με γεωμετρικό και με αναλυτικό τρόπο ότι είναι φθίνουσα στο $(a, +\infty)$.

6.104. Αν η f είναι κυρτή σε κάποιο διάστημα I , αποδείξτε με γεωμετρικό και με αναλυτικό τρόπο ότι είναι συνεχής σε κάθε εσωτερικό σημείο του I .

6.105. Έστω f κυρτή σε διάστημα I και ξ εσωτερικό σημείο του I και έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο ξ . Αποδείξτε ότι η εφαπτόμενη ευθεία l στο γράφημα της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ είναι **ευθεία στήριξης** του γραφήματος από κάτω, δηλαδή ότι δεν υπάρχει κανένα σημείο του γραφήματος κάτω από την l ή, ισοδύναμα, ότι ισχύει $f(x) \geq f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi)$ για κάθε $x \in I$.

Διατυπώστε τα ανάλογα όταν η f είναι κοίλη στο I .

6.106. (i) Έστω τρία σημεία (x, y) , (x', y') , (x'', y'') του xy -επιπέδου τα οποία δεν βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία. Αποδείξτε ότι η ακτίνα R του κύκλου ο οποίος διέρχεται από τα τρία αυτά σημεία είναι ίση με

$$R = \frac{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2} \sqrt{(x''-x)^2+(y''-y)^2} \sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2}}{2|(x'-x)(y''-y)-(x''-x)(y'-y)|}.$$

(ii) Έστω διάστημα I , συνεχείς $x : I \rightarrow \mathbb{R}$, $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ και η καμπύλη $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ και η τροχιά $C = \{(x(t), y(t)) \mid t \in I\}$. Για κάθε εσωτερικό σημείο t του I θεωρούμε

μικρό $h > 0$ και τα σημεία $(x(t), y(t))$, $(x(t+h), y(t+h))$, $(x(t-h), y(t-h))$ της C . Αν $R_{t,h}$ είναι η ακτίνα του κύκλου ο οποίος διέρχεται από τα τρία αυτά σημεία και $R_t = \lim_{h \rightarrow 0^+} R_{t,h}$, τότε το R_t ονομάζεται **ακτίνα καμπυλότητας** της C στο σημείο $(x(t), y(t))$. Αν οι x, y είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο t και $x''(t)y'(t) \neq x'(t)y''(t)$, αποδείξτε ότι

$$R_t = \frac{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}{|x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t)|}.$$

(iii) Βρείτε σε κάθε σημείο του την ακτίνα καμπυλότητας του κύκλου ο οποίος ορίζεται από τις $x(t) = r \cos t + x_0$, $y(t) = r \sin t + y_0$. Τι παρατηρείτε; Ποιοι κύκλοι έχουν μεγάλη ακτίνα καμπυλότητας;

(iv) Βρείτε σε κάθε σημείο της την ακτίνα καμπυλότητας της έλλειψης η οποία ορίζεται από τις $x(t) = \kappa \cos t + x_0$, $y(t) = \lambda \sin t + y_0$. Σε ποια σημεία της έλλειψης είναι η ακτίνα καμπυλότητας μέγιστη; Ελάχιστη;

(v) Αποδείξτε ότι η ακτίνα καμπυλότητας του γραφήματος της $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ στο σημείο $(t, f(t))$, όπου t είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος I και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο t και $f''(t) \neq 0$, είναι ίση με

$$R_t = \frac{(1 + f'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''(t)|}.$$

Βρείτε την ακτίνα καμπυλότητας σε κάθε σημείο του γραφήματος της $f(t) = t^2$, καθώς και σε κάθε σημείο του γραφήματος της $f(t) = \frac{1}{t}$.

(vi) Ποια είναι η ακτίνα καμπυλότητας μιας ευθείας σε οποιοδήποτε σημείο της; Μπορούν να θεωρηθούν οι ευθείες ως «μεγάλοι κύκλοι»;

6.12.3 Απόδειξη ανισοτήτων

Θα δούμε τώρα κάποιες εφαρμογές της δεύτερης παραγώγου σε αποδείξεις ανισοτήτων. Οι εφαρμογές αυτές είναι, ουσιαστικά, απλές εφαρμογές της έννοιας της κυρτότητας ή της κοιλότητας σε αποδείξεις ανισοτήτων.

Παράδειγμα 6.76. Ισχύει $e^{\frac{x_1+x_2}{2}} \leq \frac{e^{x_1} + e^{x_2}}{2}$ για κάθε x_1, x_2 .

Αυτό είναι εφαρμογή της κυρτότητας της e^x . Πράγματι, επειδή η e^x είναι κυρτή στο $(-\infty, +\infty)$, ισχύει $e^{(1-t)x_1 + tx_2} \leq (1-t)e^{x_1} + te^{x_2}$ για κάθε x_1, x_2 με $x_1 \neq x_2$ και κάθε $t \in [0, 1]$. Αν θέσουμε $t = \frac{1}{2}$, τότε η τελευταία ανισότητα συνεπάγεται αυτήν την οποία θέλουμε να αποδείξουμε στην περίπτωση $x_1 \neq x_2$. Αλλά και στην περίπτωση $x_1 = x_2$ η ανισότητα την οποία θέλουμε να αποδείξουμε ισχύει, προφανώς, ως ισότητα.

Παράδειγμα 6.77. Ισχύει $(x_1 + x_2) \log \frac{x_1+x_2}{2} \leq x_1 \log x_1 + x_2 \log x_2$ για κάθε $x_1 > 0, x_2 > 0$.

Πράγματι, η $x \log x$ είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$, διότι ισχύει $\frac{d^2(x \log x)}{dx^2} = \frac{1}{x} \geq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Εφαρμόζοντας, όπως στο παράδειγμα 6.76, τη βασική ανισότητα της κυρτότητας με $t = \frac{1}{2}$, βλέπουμε ότι ισχύει $\frac{x_1+x_2}{2} \log \frac{x_1+x_2}{2} \leq \frac{x_1 \log x_1 + x_2 \log x_2}{2}$ για κάθε $x_1 > 0, x_2 > 0$ με $x_1 \neq x_2$. Αυτή είναι η ανισότητα την οποία θέλουμε να αποδείξουμε στην περίπτωση $x_1 \neq x_2$, ενώ στην περίπτωση $x_1 = x_2$ η ανισότητα ισχύει, προφανώς, ως ισότητα.

Παράδειγμα 6.78. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει $x^{\frac{3}{4}} \leq \frac{3}{4}(x-1) + 1$ για κάθε $x \geq 0$.

Η ανισότητα αυτή μπορεί να αποδειχθεί και με στοιχειώδη τρόπο (πώς;). Εδώ θα την αποδείξουμε, χρησιμοποιώντας το ότι η $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$ είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$, αφού η $f'(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$ είναι φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Αν $x > 1$, τότε υπάρχει $\xi \in (1, x)$ ώστε $\frac{x^{\frac{3}{4}} - 1}{x-1} = \frac{f(x)-1}{x-1} = f'(\xi) \leq f'(1) = \frac{3}{4}$.

Ομοίως, αν $0 \leq x < 1$, τότε υπάρχει $\xi \in (x, 1)$ ώστε $\frac{x^{\frac{3}{4}} - 1}{x-1} = \frac{f(x)-1}{x-1} = f'(\xi) \geq f'(1) = \frac{3}{4}$.

Από τις δύο αυτές ανισότητες συνεπάγεται $x^{\frac{3}{4}} \leq \frac{3}{4}(x-1) + 1$ για $x \geq 0, x \neq 1$. Η ανισότητα είναι, προφανώς, σωστή ως ισότητα και για $x = 1$.

Ασκήσεις

6.107. Έστω $a \geq 1$ ή $a \leq 0$. Αποδείξτε ότι

(i) $((1-t)x_1 + tx_2)^a \leq (1-t)x_1^a + tx_2^a$, αν $x_1 > 0, x_2 > 0, 0 \leq t \leq 1$.

(ii) $x^a \geq a\xi^{a-1}(x-\xi) + \xi^a$, αν $x > 0, \xi > 0$.

Αποδείξτε ότι οι ανισότητες αυτές αντιστρέφονται, αν $0 \leq a \leq 1$.

6.108. Έστω $a > 0$. Αποδείξτε ότι

(i) $a^{(1-t)x_1 + tx_2} \leq (1-t)a^{x_1} + ta^{x_2}$, αν $0 \leq t \leq 1$.

(ii) $a^x \geq a^\xi \log a (x - \xi) + a^\xi$.

6.109. Αποδείξτε ότι

(i) $\log((1-t)x_1 + tx_2) \geq (1-t)\log x_1 + t\log x_2$, αν $x_1 > 0, x_2 > 0, 0 \leq t \leq 1$.

(ii) $\log x \leq \frac{1}{\xi}(x - \xi) + \log \xi$, αν $x > 0, \xi > 0$.

6.110. Αποδείξτε την ανισότητα Young στην άσκηση 6.81 με δύο τρόπους: (i) από το ότι η $\log x$ είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$ και (ii) από το ότι η $x^{\frac{1}{p}}$ είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$, αν $p > 1$.

6.111. (i) Έστω $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή στο διάστημα I . Έστω $x_1 \in I, \dots, x_n \in I$ και $\mu_1 > 0, \dots, \mu_n > 0$ με $\mu_1 + \dots + \mu_n = 1$. Αποδείξτε την **ανισότητα Jensen**:

$$f(\mu_1 x_1 + \dots + \mu_n x_n) \leq \mu_1 f(x_1) + \dots + \mu_n f(x_n).$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε επαγωγή. Για $n = 2$ γράψτε $\mu_1 = 1 - t, \mu_2 = t$ με $t \in (0, 1)$.

(ii) Αποδείξτε την ανισότητα Hölder στην άσκηση 6.82, χρησιμοποιώντας το ότι η $x^{\frac{1}{q}}$ είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$, αν $q > 1$ και θεωρώντας $x_1 = \frac{b_1^q}{a_1^p}, \dots, x_n = \frac{b_n^q}{a_n^p}$ και $\mu_1 = \frac{a_1^p}{A^p}, \dots, \mu_n = \frac{a_n^p}{A^p}$, όπου $A = (a_1^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}}$.

(iii) Αποδείξτε την ανισότητα Cauchy στην άσκηση 6.80, χρησιμοποιώντας το ότι η $\log x$ είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$.

6.13 Υπολογισμός απροσδιόριστων μορφών ορίων

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε εφαρμογές των παραγώγων στον υπολογισμό απροσδιόριστων μορφών $\frac{0}{0}$ και $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Οι εφαρμογές αυτές εκφράζονται μέσω των δύο κανόνων l' Hopitâl.

6.13.1 Όρια συναρτήσεων

Ο πρώτος κανόνας l' Hopitâl αναφέρεται στην απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

Πρώτος κανόνας l' Hopitâl. Έστω παραγωγίσιμες $f : (\xi, b) \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : (\xi, b) \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $g(x) \neq 0$ και $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\xi, b)$, καθώς και $\lim_{x \rightarrow \xi+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \xi+} g(x) = 0$.

Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow \xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε υπάρχει και το $\lim_{x \rightarrow \xi+} \frac{f(x)}{g(x)}$ και τα δύο αυτά όρια έχουν την ίδια τιμή. Δηλαδή,

$$\lim_{x \rightarrow \xi+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Όλα τα προηγούμενα ισχύουν, με τις προφανείς προσαρμογές, και για κάθε άλλη περίπτωση ορίου: $x \rightarrow \xi-, x \rightarrow \xi, x \rightarrow +\infty$ και $x \rightarrow -\infty$.

Απόδειξη. Οι f, g δεν θεωρούνται ορισμένες στο σημείο ξ , αλλά τώρα τις ορίζουμε και στο ξ , θέτοντας $f(\xi) = 0$ και $g(\xi) = 0$. Λόγω της υπόθεσης $\lim_{x \rightarrow \xi+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \xi+} g(x) = 0$, οι f, g είναι τώρα

συνεχείς στο $[\xi, b)$.

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Cauchy) συνεπάγεται ότι για κάθε $x \in (\xi, b)$ υπάρχει $\zeta \in (\xi, x)$ ώστε

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(\xi)}{g(x)-g(\xi)} = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}. \quad (6.1)$$

Έστω ότι το $\eta = \lim_{x \rightarrow \xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ είναι αριθμός. Παίρνουμε $\epsilon > 0$, οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - \eta \right| < \epsilon \quad \text{αν } \xi < x < \xi + \delta. \quad (6.2)$$

Τώρα, αν $\xi < x < \xi + \delta$, συνεπάγεται ότι για το $\zeta \in (\xi, x)$, για το οποίο ισχύει η (6.1), ισχύει $\xi < \zeta < \xi + \delta$, οπότε λόγω της (6.2) ισχύει $\left| \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} - \eta \right| < \epsilon$, οπότε

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \eta \right| = \left| \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} - \eta \right| < \epsilon.$$

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι ισχύει $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \eta \right| < \epsilon$, αν $\xi < x < \xi + \delta$. Άρα $\lim_{x \rightarrow \xi+} \frac{f(x)}{g(x)} = \eta$.

Στην περίπτωση του ορίου $\lim_{x \rightarrow \xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$, αποδεικνύουμε το $\lim_{x \rightarrow \xi+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ με τον ίδιο τρόπο.

Απλώς, αντικαθιστούμε τις ανισότητες $\left| \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} - \eta \right| < \epsilon$ και $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \eta \right| < \epsilon$ με τις $\frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} > M$ και $\frac{f(x)}{g(x)} > M$.

Ομοίως, στην περίπτωση του $\lim_{x \rightarrow \xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$.

Η απόδειξη είναι παρόμοια και στις περιπτώσεις $x \rightarrow \xi-$ και $x \rightarrow \xi$.

Τώρα θα αναγάγουμε την περίπτωση $x \rightarrow +\infty$ στην περίπτωση $x \rightarrow 0+$.

Έστω παραγωγίσιμες $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $a > 0$ και έστω ότι ισχύει $g(x) \neq 0$ και $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, +\infty)$ και ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$. Υποθέτουμε ότι το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ υπάρχει και θα αποδείξουμε ότι και το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ υπάρχει και έχει την ίδια τιμή με το προηγούμενο.

Μέσω της αλλαγής μεταβλητής $t = \frac{1}{x}$, ορίζουμε τις $F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) = f(x)$ και $G(t) = g\left(\frac{1}{t}\right) = g(x)$ στο διάστημα $(0, \frac{1}{a})$ και παρατηρούμε ότι ισχύει

$$G(t) = g(x) \neq 0, \quad G'(t) = -\frac{1}{t^2} g'\left(\frac{1}{t}\right) = -x^2 g'(x) \neq 0$$

για κάθε $t \in (0, \frac{1}{a})$. Επίσης,

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 f'(x)}{-x^2 g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

οπότε το $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{F'(t)}{G'(t)}$ υπάρχει. Άρα και το $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{F(t)}{G(t)}$ υπάρχει και είναι το ίδιο με το προηγούμενο.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{F(t)}{G(t)}$, συνεπάγεται ότι και το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ υπάρχει και είναι το ίδιο με το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Με τον ίδιο τρόπο η περίπτωση $x \rightarrow -\infty$ ανάγεται στην περίπτωση $x \rightarrow 0-$. □

Παράδειγμα 6.79. Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$.

Στο $(-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$ ισχύει $\sin x \neq 0$ και $\frac{d \sin x}{dx} = \cos x \neq 0$. Επίσης, $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$.

Τώρα υπολογίζουμε το όριο του λόγου των παραγώγων: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1$. Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = 1$.

Ο δεύτερος κανόνας l' Hopital αναφέρεται στην απροσδιόριστη μορφή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ή, καλύτερα, σε μία γενίκευσή της. Η απόδειξή του είναι πιο δύσκολη από την απόδειξη του πρώτου κανόνα.

Δεύτερος κανόνας Ι' Hopitâl. Έστω παραγωγίσιμες $f : (\xi, b) \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : (\xi, b) \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $g(x) \neq 0$ και $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\xi, b)$ καθώς και $\lim_{x \rightarrow \xi+} |g(x)| = +\infty$. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow \xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε υπάρχει και το $\lim_{x \rightarrow \xi+} \frac{f(x)}{g(x)}$ και τα δύο αυτά όρια έχουν την ίδια τιμή. Δηλαδή,

$$\lim_{x \rightarrow \xi+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Όλα τα προηγούμενα ισχύουν, με τις προφανείς προσαρμογές, και για κάθε άλλη περίπτωση ορίων: $x \rightarrow \xi-$, $x \rightarrow \xi$, $x \rightarrow +\infty$ και $x \rightarrow -\infty$.

Απόδειξη. Έστω ότι το $\eta = \lim_{x \rightarrow \xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ είναι αριθμός. Παίρνουμε $\epsilon > 0$, οπότε υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε να ισχύει

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - \eta \right| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{αν } \xi < x < \xi + \delta'. \quad (6.3)$$

Επιλέγουμε οποιοδήποτε x_0 ώστε $\xi < x_0 < \xi + \delta'$. Τώρα, επειδή $\lim_{x \rightarrow \xi+} |g(x)| = +\infty$, υπάρχει $\delta'' > 0$ ώστε να ισχύει

$$|g(x)| > \max \{ |g(x_0)|, \frac{3}{\epsilon} |f(x_0) - \eta g(x_0)| \} \quad \text{αν } \xi < x < \xi + \delta''. \quad (6.4)$$

Ορίζουμε $\delta = \min\{x_0 - \xi, \delta''\}$ και παρατηρούμε ότι αν $\xi < x < \xi + \delta$, τότε $\xi < x < x_0 < \xi + \delta'$ και $\xi < x < \xi + \delta''$.

Τώρα, έστω $\xi < x < \xi + \delta$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Cauchy) συνεπάγεται ότι υπάρχει $\zeta \in (x, x_0)$ ώστε

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}. \quad (6.5)$$

Βλέπουμε ότι $\xi < \zeta < \xi + \delta'$, οπότε το ζ ικανοποιεί την (6.3) και, σε συνδυασμό με την (6.5), βρίσκουμε

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - \eta \right| = \left| \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} - \eta \right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Συνεπάγεται

$$|f(x) - f(x_0) - \eta(g(x) - g(x_0))| < \frac{\epsilon}{3} |g(x) - g(x_0)|,$$

οπότε

$$|f(x) - \eta g(x)| < \frac{\epsilon}{3} (|g(x)| + |g(x_0)|) + |f(x_0) - \eta g(x_0)|.$$

Τέλος, επειδή το x ικανοποιεί την (6.4), συνεπάγεται

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \eta \right| < \frac{\epsilon}{3} \left(1 + \frac{|g(x_0)|}{|g(x)|} \right) + \frac{|f(x_0) - \eta g(x_0)|}{|g(x)|} < \frac{\epsilon}{3} (1 + 1) + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι ισχύει $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \eta \right| < \epsilon$, αν $\xi < x < \xi + \delta$. Άρα $\lim_{x \rightarrow \xi+} \frac{f(x)}{g(x)} = \eta$.

Οι περιπτώσεις $\lim_{x \rightarrow \xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$, καθώς και οι περιπτώσεις $x \rightarrow \xi-$ και $x \rightarrow \xi$ αποδεικνύονται με παρόμοιο τρόπο. Οι περιπτώσεις $x \rightarrow \pm\infty$ ανάγονται στις $x \rightarrow 0\pm$, όπως στην απόδειξη του πρώτου κανόνα. $\square$

Στις υποθέσεις του δεύτερου κανόνα Ι' Hopitâl δεν αναφέρεται το $\lim_{x \rightarrow \xi+} f(x)$: δεν μας ενδιαφέρει αν αυτό το όριο υπάρχει ούτε το ποια ακριβώς είναι η τιμή του, αν υπάρχει. Επομένως, οι απροσδιόριστες μορφές $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ είναι ειδικές περιπτώσεις του δεύτερου κανόνα Ι' Hopitâl όπως τον έχουμε διατυπώσει.

Παράδειγμα 6.80. Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^b}{a^x} = 0 \quad \text{αν } a > 1, \quad b > 0.$$

Θεωρούμε πρώτα την ειδική περίπτωση με $b = 1$, δηλαδή το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{a^x} = 0$ με $a > 1$. Τώρα, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$, οπότε το όριο το οποίο πρέπει να αποδείξουμε είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$. Στο $(-\infty, +\infty)$ ισχύει $a^x \neq 0$ και $\frac{da^x}{dx} = a^x \log a \neq 0$. Ο λόγος των παραγώγων είναι $\frac{1}{a^x \log a}$ και έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x \log a} = 0$. Από τον δεύτερο κανόνα συνεπάγεται $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{a^x} = 0$.

Η γενική περίπτωση ανάγεται στην ειδική: επειδή $a^{\frac{1}{b}} > 1$, συνεπάγεται ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^b}{a^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{(a^{\frac{1}{b}})^x} \right)^b = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(a^{\frac{1}{b}})^x} \right)^b = 0^b = 0.$$

Με την ευκαιρία αυτού του παραδείγματος, θα δούμε δύο ορισμούς ανάλογους των ορισμών 3.14 και 3.15 για όρια ακολουθιών.

Ορισμός 6.11. Έστω $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = +\infty$. Αν $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, τότε λέμε ότι, όταν $x \rightarrow \xi$, τότε το $f(x)$ τείνει στο $+\infty$ **πιο αργά** απ' ό,τι το $g(x)$ τείνει στο $+\infty$ και, επίσης, το $g(x)$ τείνει στο $+\infty$ **πιο γρήγορα** απ' ό,τι το $f(x)$ τείνει στο $+\infty$.

Ορισμός 6.12. Έστω $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = 0$. Αν $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, τότε λέμε ότι, όταν $x \rightarrow \xi$, τότε το $f(x)$ τείνει στο 0 **πιο γρήγορα** απ' ό,τι το $g(x)$ τείνει στο 0 και, επίσης, το $g(x)$ τείνει στο 0 **πιο αργά** απ' ό,τι το $f(x)$ τείνει στο 0.

Αρα το παράδειγμα 6.80 λέει ότι:

Αν $a > 1$, $b > 0$, τότε, όταν $x \rightarrow +\infty$, τότε το a^x τείνει στο $+\infty$ **πιο γρήγορα** απ' ό,τι το x^b τείνει στο $+\infty$ και, επίσης, το $\frac{1}{a^x}$ τείνει στο 0 **πιο γρήγορα** απ' ό,τι το $\frac{1}{x^b}$ τείνει στο 0.

Παράδειγμα 6.81. Θα αποδείξουμε το

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log^c x}{x^b} = 0 \quad \text{αν } b > 0, c > 0.$$

Θεωρούμε πρώτα την ειδική περίπτωση $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^b} = 0$ με $b > 0$. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^b = +\infty$, οπότε προκύπτει απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$. Στο $(0, +\infty)$ ισχύει $x^b \neq 0$ και $\frac{dx^b}{dx} = bx^{b-1} \neq 0$. Ο λόγος των παραγώγων είναι $\frac{\frac{1}{x}}{bx^{b-1}} = \frac{1}{bx^b}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{bx^b} = 0$. Από τον δεύτερο κανόνα συνεπάγεται $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^b} = 0$.

Για τη γενική περίπτωση: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log^c x}{x^b} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\log x}{x^{\frac{b}{c}}} \right)^c = 0^c = 0$, διότι $\frac{b}{c} > 0$. Συμπεραίνουμε ότι:

Αν $b > 0$, $c > 0$, τότε, όταν $x \rightarrow +\infty$, τότε το x^b τείνει στο $+\infty$ **πιο γρήγορα** απ' ό,τι το $\log^c x$ τείνει στο $+\infty$.

Παράδειγμα 6.82. Το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \cos x}{x}$ είναι περίπτωση απροσδιόριστης μορφής $\frac{+\infty}{+\infty}$. Πράγματι, από την ανισότητα $x - \cos x \geq x - 1$ συνεπάγεται $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \cos x) = +\infty$.

Το αρχικό όριο υπολογίζεται πολύ εύκολα: από την ανισότητα $\left| \frac{\cos x}{x} \right| \leq \frac{1}{x}$ για $x > 0$ συνεπάγεται $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$, οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\cos x}{x} \right) = 1 - 0 = 1$.

Όμως, ο δεύτερος κανόνας δεν βοηθά! Ο λόγος των παραγώγων είναι $\frac{1 + \sin x}{1} = 1 + \sin x$ και δεν υπάρχει το όριό του, διότι, όπως γνωρίζουμε, δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$.

Το παράδειγμα αυτό δείχνει, επίσης, ότι δεν ισχύει το αντίστροφο του κανόνα l'Hôpital. Πράγματι, στο παράδειγμα αυτό υπάρχει το όριο του λόγου των συναρτήσεων, αλλά δεν υπάρχει το όριο του λόγου των παραγώγων τους.

Υπάρχουν, όμως, και άλλες απροσδιόριστες μορφές πέραν των $\frac{0}{0}$ και $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Σε κάθε περίπτωση μετασχηματίζουμε την εκάστοτε απροσδιόριστη μορφή σε μία από τις βασικές αυτές απροσδιόριστες μορφές και μετά εφαρμόζουμε τον κατάλληλο κανόνα l' Hopital. Θα περιγράψουμε, τελείως σχηματικά, πώς περίπου χειριζόμαστε τις διάφορες περιπτώσεις.

(i) Έστω $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = \pm\infty$ και θέλουμε το $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)g(x)$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή $0(\pm\infty)$. Μετατρέπουμε σε $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$, δηλαδή σε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Εναλλακτικά, μετατρέπουμε σε $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$, δηλαδή σε απροσδιόριστη μορφή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

(ii) Έστω $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = -\infty$ και θέλουμε το $\lim_{x \rightarrow \xi} (f(x) + g(x))$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή $(+\infty) + (-\infty)$. Μετατρέπουμε σε $\lim_{x \rightarrow \xi} (\frac{1}{g(x)} + \frac{1}{f(x)})f(x)g(x)$, δηλαδή σε απροσδιόριστη μορφή $0(-\infty)$. Έτσι αναγόμεν στην προηγούμενη περίπτωση.

(iii) Έστω $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο ξ και θέλουμε το $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)^{g(x)}$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή 0^0 . Μετατρέπουμε σε $\lim_{x \rightarrow \xi} e^{g(x) \log f(x)}$, δηλαδή σε απροσδιόριστη μορφή $0(-\infty)$.

(iv) Έστω $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = 0$ και θέλουμε το $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)^{g(x)}$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)^0$. Μετατρέπουμε σε $\lim_{x \rightarrow \xi} e^{g(x) \log f(x)}$, δηλαδή σε απροσδιόριστη μορφή $0(+\infty)$.

(v) Έστω $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = \pm\infty$ και θέλουμε το $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)^{g(x)}$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή $1^{\pm\infty}$. Μετατρέπουμε σε $\lim_{x \rightarrow \xi} e^{g(x) \log f(x)}$, δηλαδή σε απροσδιόριστη μορφή $(\pm\infty)0$.

Παράδειγμα 6.83. Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x \rightarrow 0+} x \log x$ το οποίο είναι απροσδιόριστη μορφή $0(-\infty)$.

Γράφουμε $x \log x = \frac{\log x}{\frac{1}{x}}$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = +\infty$. Ελέγχουμε τις υποθέσεις του δεύτερου κανόνα: $\frac{1}{x} \neq 0$ και $\frac{d(\frac{1}{x})}{dx} = -\frac{1}{x^2} \neq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Τώρα, για τον λόγο των παραγώγων ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \rightarrow 0+} x = 0$. Άρα

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \log x = 0.$$

Παράδειγμα 6.84. Το $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x$ είναι απροσδιόριστη μορφή 0^0 . Γράφουμε $x^x = e^{x \log x}$, οπότε από το όριο στο παράδειγμα 6.83 βρίσκουμε $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0+} e^{x \log x} = e^0 = 1$, διότι η e^x είναι συνεχής στο 0. Άρα

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^x = 1.$$

Παράδειγμα 6.85. Το $\lim_{x \rightarrow 0+} (\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x})$ είναι απροσδιόριστη μορφή $(+\infty) - (+\infty)$.

Γράφουμε

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x}$$

και έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0+} (x - \sin x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0+} x \sin x = 0$. Ελέγχουμε τις υποθέσεις του πρώτου κανόνα: $x \sin x \neq 0$ και $\frac{d(x \sin x)}{dx} = \sin x + x \cos x \neq 0$ για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Άρα θα υπολογίσουμε το

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x}.$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0+} (1 - \cos x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0+} (\sin x + x \cos x) = 0$, έχουμε πάλι απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Σκοπεύοντας να εφαρμόσουμε για δεύτερη φορά τον πρώτο κανόνα, βλέπουμε ότι ισχύει $\sin x + x \cos x \neq 0$ για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ και $\frac{d}{dx}(\sin x + x \cos x) = 2 \cos x - x \sin x \neq 0$ για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{4})$. Για τον λόγο των παραγώγων ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0.$$

Από τον πρώτο κανόνα συνεπάγεται $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1-\cos x}{\sin x + x \cos x} = 0$, οπότε, πάλι από τον πρώτο κανόνα, συνεπάγεται $\lim_{x \rightarrow 0+} (\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}) = 0$.

Παράδειγμα 6.86. Το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{x}{1+x^2})^x$ είναι απροσδιόριστη μορφή $1^{+\infty}$. Κάνουμε τη μετατροπή

$$(1 + \frac{x}{1+x^2})^x = e^{x \log \frac{1+x+x^2}{1+x^2}},$$

οπότε αναγόμεν στο $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \frac{1+x+x^2}{1+x^2}$ το οποίο είναι απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)0$. Γράφουμε, λοιπόν,

$$x \log \frac{1+x+x^2}{1+x^2} = \frac{\log \frac{1+x+x^2}{1+x^2}}{\frac{1}{x}}$$

και έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Ελέγχουμε τις υποθέσεις του πρώτου κανόνα: $\frac{1}{x} \neq 0$ και $\frac{d(\frac{1}{x})}{dx} = -\frac{1}{x^2} \neq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Για τον λόγο των παραγώγων ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(x^2-1)}{(1+x^2)(1+x+x^2)} = 1.$$

Από τον πρώτο κανόνα συνεπάγεται $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \frac{1+x+x^2}{1+x^2} = 1$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{x}{1+x^2})^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \log \frac{1+x+x^2}{1+x^2}} = e^1 = e,$$

διότι η e^x είναι συνεχής στο 1.

Ασκήσεις

6.112. Χρησιμοποιώντας όρια αυτής της ενότητας, υπολογίστε τα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{x}{4}}}{x^{13}}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^7}{\log^5 x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^5}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}} - \log^4 x}{x^{100} - e^{\frac{x}{4}}}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^{10})$, $\lim_{x \rightarrow 0+} (\frac{1}{x^5} - \frac{2}{x^2} + \log^7 x)$.

6.113. Χρησιμοποιώντας τους κανόνες l' Hopitâl, βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^a-1}{x^b-1}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x-1}{b^x-1}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{e^{2x}-1}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\arctan x}$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x+\log x}{1-\sqrt{2-x}}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(\log x)}{\log x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(\log(\log x))}{\log(\log x)}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\log x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$, $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x})$, $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x})$, $\lim_{x \rightarrow 0} (\cot x - \frac{1}{x})$, $\lim_{x \rightarrow 0+} \sin x \log x$, $\lim_{x \rightarrow 1+} \log x \log(x-1)$, $\lim_{x \rightarrow 0+} x^{x^x-1}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(\sin x) - \sin^2 x}{x^6}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x) - \tan(\sin x)}{x^7}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \sin x}{\tan x - \arctan x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} (\tan(x + \frac{\pi}{4}))^{-\cot(2x)}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-(1+x)^{\frac{1}{x}}}}{x}$.

6.114. Δείτε την άσκηση 5.7 και θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\log|x|}, & \text{αν } x \neq 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0. \end{cases}$ Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής, αλλά όχι Hölder συνεχής στο 0.

6.115. Μπορείτε να υπολογίσετε τα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ με διαδοχικές εφαρμογές του δεύτερου κανόνα l' Hopitâl; Μήπως τα όρια αυτά υπολογίζονται πολύ εύκολα χωρίς αναφορά στους κανόνες l' Hopitâl;

6.116. Βρείτε a, b ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1-\cos x}{x^4} + \frac{a}{x^2} + b) = 0$.

6.117. Να σχεδιαστούν τα γραφήματα των συναρτήσεων xe^{-x} , xe^{-x^2} , $x \log x$, $\frac{\log x}{x}$, $x^{\frac{1}{x}}$, x^x , βρίσκοντας τα διαστήματα στα οποία είναι μονότονες, τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτές ή κοίλες, τα σημεία (τοπικού) μεγίστου και (τοπικού) ελαχίστου, τα σημεία καμπής και τις ασύμπτωτες ευθείες, κατακόρυφες και πλάγιες.

6.118. Γενίκευση του κριτηρίου δεύτερης παραγώγου.

(i) Έστω ότι η $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι $2m - 1$ φορές παραγωγίσιμη στο (a, b) , ότι $a < \xi < b$ και ότι υπάρχει η $f^{(2m)}(\xi)$. Αν $f^{(1)}(\xi) = \dots = f^{(2m-1)}(\xi) = 0$, αποδείξτε ότι το ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f , αν $f^{(2m)}(\xi) > 0$, και σημείο τοπικού μεγίστου της f , αν $f^{(2m)}(\xi) < 0$.

(ii) Έστω ότι η $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι $2m$ φορές παραγωγίσιμη στο (a, b) , ότι $a < \xi < b$ και ότι υπάρχει η $f^{(2m+1)}(\xi)$. Αν $f^{(1)}(\xi) = \dots = f^{(2m)}(\xi) = 0$ και $f^{(2m+1)}(\xi) \neq 0$, αποδείξτε ότι το ξ δεν είναι ούτε σημείο τοπικού ελαχίστου ούτε σημείο τοπικού μεγίστου της f .

6.119. Έστω $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ και $a < \xi < b$. Αποδείξτε ότι

(i) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi+h) - f(\xi-h)}{2h} = f'(\xi)$, αν υπάρχει η $f'(\xi)$. Μη χρησιμοποιήσετε τον πρώτο κανόνα l' Hopital.

(ii) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi+h) - 2f(\xi) + f(\xi-h)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi+2h) - 2f(\xi+h) + f(\xi)}{h^2} = f''(\xi)$, αν υπάρχει η $f''(\xi)$.

6.120. Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και έστω $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \eta$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \eta$.

6.121. Έστω παραγωγίσιμη $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω ότι το $\eta = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + f'(x))$ είναι αριθμός. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \eta$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

Υπόδειξη: Θεωρήστε την $e^x f(x)$.

6.122. Έστω $0 < k < 1$ και $n \in \mathbb{N}$.

(i) Σχεδιάστε το γράφημα της $e^{-x}(1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!}) - k$.

(ii) Αποδείξτε ότι υπάρχει ακριβώς μία θετική λύση της εξίσωσης $1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = ke^x$. Αν συμβολίσουμε x_n αυτήν τη λύση, αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) είναι γνησίως αύξουσα.

6.123. (i) Αν η $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο 0 και αν $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$, αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(\frac{a}{\sqrt{x}}))^x = e^{-\frac{a^2}{2}}$.

(ii) Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos \frac{a}{\sqrt{x}})^x = e^{-\frac{a^2}{2}}$.

6.124. (i) Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^{-m} e^{-\frac{1}{x}} = 0 \quad \text{για κάθε } m \in \mathbb{N}.$$

Δηλαδή, όταν $x \rightarrow 0+$, τότε το $e^{-\frac{1}{x}}$ τείνει στο 0 πιο γρήγορα απ' ό,τι το x^m τείνει στο 0 .

(ii) Θεωρήστε την $h(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{αν } x > 0, \\ 0, & \text{αν } x \leq 0. \end{cases}$

Αποδείξτε ότι η h είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty, +\infty)$ και ότι $h^{(n)}(0) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Κατόπιν, σχεδιάστε το γράφημα της h .

Υπόδειξη: Με επαγωγή αποδείξτε ότι η h είναι n φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty, +\infty)$ και ότι $h^{(n)}(0) = 0$. Θα βοηθήσει το (i) της άσκησης 6.93.

(iii) Θεωρήστε την $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{2}{1-x^2}}, & \text{αν } -1 < x < 1, \\ 0, & \text{αν } |x| \geq 1. \end{cases}$

Αποδείξτε ότι η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty, +\infty)$. Σχεδιάστε το γράφημά της.

6.13.2 Όρια ακολουθιών

Εφαρμόζουμε τους κανόνες l' Hopital στον υπολογισμό ορίων ακολουθιών.

Πρώτη εφαρμογή. Έστω ακολουθίες (a_n) και (b_n) με $b_n \neq 0$ για κάθε n και έστω $a_n \rightarrow 0$ και $b_n \rightarrow 0$. Στόχος είναι ο υπολογισμός του ορίου του $\frac{a_n}{b_n}$, αν αυτό υπάρχει.

Για να εφαρμόσουμε τον πρώτο κανόνα l' Hopital, πρέπει να βρούμε $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε: $f(n) = a_n$ και $g(n) = b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Φυσικά, οι f, g πρέπει να είναι παραγωγίσιμες στο $[1, +\infty)$, πρέπει να ισχύει $g(x) \neq 0$ και $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$, καθώς και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$. Αν, λοιπόν, υποθέσουμε ότι έχουμε βρει αυτές τις συναρτήσεις και αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε συμπεραίνουμε ότι υπάρχει και το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ και έχει την ίδια τιμή με το προηγούμενο όριο. Τώρα, εφαρμόζοντας την Πρόταση 4.10 στη συνάρτηση $\frac{f(x)}{g(x)}$ και στην ακολουθία (x_n) με τύπο $x_n = n$, συμπεραίνουμε ότι και το όριο του $\frac{a_n}{b_n} = \frac{f(n)}{g(n)}$ υπάρχει και έχει την ίδια τιμή με τα δύο προηγούμενα όρια.

Παράδειγμα 6.87. Θα υπολογίσουμε το όριο του $\arctan \frac{1}{n} \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n})$. Επειδή $\arctan \frac{1}{n} \rightarrow 0$ και $\tan(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}) \rightarrow +\infty$, το όριο το οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε είναι απροσδιόριστη μορφή $0(+\infty)$.

Γράφουμε

$$\arctan \frac{1}{n} \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}) = \arctan \frac{1}{n} \cot \frac{1}{n} = \frac{\arctan \frac{1}{n}}{\tan \frac{1}{n}},$$

για να μετατρέψουμε σε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$ και $g(x) = \tan \frac{1}{x}$ στο διάστημα $(\frac{2}{\pi}, +\infty)$. Οι συναρτήσεις αυτές έχουν όλες τις απαιτούμενες ιδιότητες, οπότε υπολογίζουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \cos^2 \frac{1}{x}}{1+x^2} = 1,$$

οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Θεωρώντας την ακολουθία (n) με όριο $+\infty$, εφαρμόζουμε την Πρόταση 4.10 και βρίσκουμε $\frac{\arctan \frac{1}{n}}{\tan \frac{1}{n}} = \frac{f(n)}{g(n)} \rightarrow 1$.

Δεύτερη εφαρμογή. Έστω ακολουθίες (a_n) και (b_n) με $b_n \neq 0$ για κάθε n και έστω $|b_n| \rightarrow +\infty$. Στόχος, όπως πριν, είναι ο υπολογισμός του ορίου του $\frac{a_n}{b_n}$, αν αυτό υπάρχει.

Για να εφαρμόσουμε τον δεύτερο κανόνα l' Hopital, πρέπει να βρούμε $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε: $f(n) = a_n$ και $g(n) = b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Οι συναρτήσεις αυτές πρέπει να είναι παραγωγίσιμες στο $[1, +\infty)$, πρέπει να ισχύει $g(x) \neq 0$ και $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} |g(x)| = +\infty$. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε συμπεραίνουμε ότι υπάρχει και το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ και έχει την ίδια τιμή με το προηγούμενο όριο. Τώρα εφαρμόζουμε την Πρόταση 4.10 με την ακολουθία (x_n) με τύπο $x_n = n$ και συμπεραίνουμε ότι υπάρχει και το όριο του $\frac{a_n}{b_n} = \frac{f(n)}{g(n)}$ και έχει την ίδια τιμή με τα δύο προηγούμενα όρια.

Παράδειγμα 6.88. Δύο σημαντικά όρια ακολουθιών είναι τα

$$\frac{n^b}{a^n} \rightarrow 0 \text{ αν } b > 0, a > 1, \quad \frac{\log^c n}{n^b} \rightarrow 0 \text{ αν } b > 0, c > 0.$$

Για το πρώτο όριο, θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = a^x$ και $g(x) = x^b$, οι οποίες ικανοποιούν τις απαραίτητες συνθήκες, και αναγώμαστε στον υπολογισμό του $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$. Το όριο αυτό έχει ήδη υπολογιστεί στο παράδειγμα 6.80 με τον δεύτερο κανόνα l' Hopital: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Τότε, βάσει

της Πρότασης 4.10, έχουμε: $\frac{n^b}{a^n} = \frac{f(n)}{g(n)} \rightarrow 0$.

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται και το δεύτερο όριο: μελετήστε το παράδειγμα 6.81.

Παράδειγμα 6.89. Θα αποδείξουμε πάλι το γνωστό όριο ακολουθίας: $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$.

Γράφουμε $\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\log n}{n}}$ για να μετατρέψουμε την απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)^0$ σε απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$ και εφαρμόζουμε το όριο στο παράδειγμα 6.88: $\frac{\log n}{n} \rightarrow 0$. Καταλήγουμε στο $\sqrt[n]{n} = e^{\frac{\log n}{n}} \rightarrow e^0 = 1$, λόγω συνέχειας της συνάρτησης e^x στο 0.

Ασκήσεις

6.125. Βρείτε τα όρια των ακολουθιών με n -οστούς όρους ne^{-n} , $n^3 e^{-n}$, $\frac{e^{\frac{n}{100}}}{n}$, $n - \cot \frac{1}{n}$, $n(\sqrt[n]{n} - 1)$, $\frac{\sqrt{n}}{\log^{95} n}$, $\frac{\log(\log n)}{\log n}$, $\frac{\log(\log(\log n))}{\log(\log n)}$.

6.14 Τάξη μεγέθους και ασυμπτωτική ισότητα

6.14.1 Τάξη μεγέθους

Ορισμός 6.13. (i) Έστω ότι ισχύει $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ κοντά στο ξ και $\lim_{x \rightarrow \xi} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0$. Τότε λέμε ότι η f έχει **μικρότερη τάξη μεγέθους** από την g στο ξ , καθώς και ότι η g έχει **μεγαλύτερη τάξη μεγέθους** από την f στο ξ . Παρατηρήστε ότι, λόγω της υπόθεσης για μη-μηδενισμό των συναρτήσεων, η ισότητα $\lim_{x \rightarrow \xi} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0$ είναι ισοδύναμη με την $\lim_{x \rightarrow \xi} \left| \frac{g(x)}{f(x)} \right| = +\infty$.

(ii) Αν υπάρχουν $l > 0$, $u > 0$ ώστε να ισχύει $0 < l \leq \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq u < +\infty$ κοντά στο ξ , τότε λέμε ότι οι f, g έχουν **ίδια τάξη μεγέθους** στο ξ .

Όλα τα προηγούμενα ισχύουν, με τις προφανείς προσαρμογές, και για κάθε άλλη περίπτωση: στο ξ από δεξιά του ή από αριστερά του, στο $+\infty$, στο $-\infty$.

Αν υπάρχει το $\rho = \lim_{x \rightarrow \xi} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|$ και είναι θετικός αριθμός, τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 4.8, ισχύει $\frac{\rho}{2} < \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < 2\rho$ κοντά στο ξ , οπότε οι f, g έχουν ίδια τάξη μεγέθους στο ξ .

Παράδειγμα 6.90. Αν $a > 1$, $b > 0$, τότε η x^b έχει μικρότερη τάξη μεγέθους από την a^x στο $+\infty$, διότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^b}{a^x} = 0$.

Παράδειγμα 6.91. Αν $b > 0$, $c > 0$, τότε η $\log^c x$ έχει μικρότερη τάξη μεγέθους από την x^b στο $+\infty$, διότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log^c x}{x^b} = 0$.

Παράδειγμα 6.92. Έστω $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ και $q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$ δύο πολυωνυμικές συναρτήσεις με $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$.

Αν $n = m$, τότε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{p(x)}{q(x)} \right| = \left| \frac{a_n}{b_n} \right|$ είναι θετικός αριθμός, οπότε οι p, q έχουν ίδια τάξη μεγέθους στο $+\infty$.

Αν $n < m$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = 0$, οπότε η p έχει μικρότερη τάξη μεγέθους από την q στο $+\infty$.

Παράδειγμα 6.93. Αν $a > 1$, $b > 0$, τότε η $a^{-\frac{1}{x}}$ έχει μικρότερη τάξη μεγέθους από την x^b στο 0 από δεξιά του, διότι $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{a^{-\frac{1}{x}}}{x^b} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^b}{a^t} = 0$.

Παράδειγμα 6.94. Οι $1 - \cos x$ και x^2 έχουν ίδια τάξη μεγέθους στο 0, διότι το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ είναι θετικός αριθμός.

Παράδειγμα 6.95. Οι $\sin x$ και x έχουν ίδια τάξη μεγέθους στο 0, διότι το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ είναι θετικός αριθμός.

Παράδειγμα 6.96. Αν $b > 0$, $c > 0$, τότε η $\log^c \frac{1}{x}$ έχει μικρότερη τάξη μεγέθους από την $\frac{1}{x^b}$ στο 0 από δεξιά του, διότι $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log^c \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^b}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log^c t}{t^b} = 0$.

Παράδειγμα 6.97. Το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + x \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + \sin x)$ δεν υπάρχει. Όμως, οι $2x + x \sin x$ και x έχουν ίδια τάξη μεγέθους στο $+\infty$, αφού ισχύει $1 \leq \frac{2x + x \sin x}{x} \leq 3$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Θα περιγράψουμε, τώρα, ειδικά για την περίπτωση του $+\infty$, μερικούς ευρέως χρησιμοποιούμενους όρους: την **πολυωνυμική**, την **εκθετική** και τη **λογαριθμική τάξη μεγέθους**.

Είδαμε στο παράδειγμα 6.92 ότι αν το n είναι φυσικός, τότε όλες οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού n έχουν ίδια τάξη μεγέθους στο $+\infty$. Αυτό το κωδικοποιούμε λέγοντας ότι κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ με $a_n \neq 0$ έχει **πολυωνυμική τάξη μεγέθους** (βαθμού n) στο $+\infty$. Σύμφωνα, και πάλι, με το παράδειγμα 6.92, μπορούμε να ιεραρχήσουμε τις πολυωνυμικές

τάξεις μεγέθους στο $+\infty$ ανάλογα με τον βαθμό τους: μεγαλύτερος βαθμός αντιστοιχεί σε μεγαλύτερη τάξη μεγέθους. Φυσικά, από τις πολωνυμικές συναρτήσεις βαθμού n η πιο απλή είναι η x^n . Πρέπει να πούμε ότι ο όρος «πολωνυμική τάξη μεγέθους βαθμού n » χαρακτηρίζει, όχι μόνο τις πολωνυμικές συναρτήσεις βαθμού n , αλλά και κάθε συνάρτηση η οποία έχει ίδια τάξη μεγέθους με την x^n στο $+\infty$. Επίσης, πολλές φορές ο όρος «πολωνυμική τάξη μεγέθους» χρησιμοποιείται για τις συναρτήσεις x^b ακόμη και όταν ο εκθέτης b είναι οποιοσδήποτε θετικός αριθμός, όχι κατ' ανάγκη φυσικός. Αυτό, βεβαίως, ισχύει και για κάθε συνάρτηση η οποία έχει ίδια τάξη μεγέθους με κάποια από τις x^b , $b > 0$, στο $+\infty$.

Ορισμός 6.14. (i) Λέμε ότι μια συνάρτηση έχει **πολωνυμική τάξη μεγέθους** (βαθμού b) στο $+\infty$, αν έχει ίδια τάξη μεγέθους με την x^b στο $+\infty$ για κάποιο $b > 0$.

(ii) Λέμε ότι μια συνάρτηση έχει **εκθετική τάξη μεγέθους** στο $+\infty$, αν έχει ίδια τάξη μεγέθους με την a^x στο $+\infty$ για κάποιο $a > 1$.

(iii) Λέμε ότι μια συνάρτηση έχει **λογαριθμική τάξη μεγέθους** στο $+\infty$, αν έχει ίδια τάξη μεγέθους με την $\log^c x$ στο $+\infty$ για κάποιο $c > 0$.

Παράδειγμα 6.98. Ρητή συνάρτηση $r(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m}$ με $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$ και $n > m$ έχει πολωνυμική τάξη μεγέθους βαθμού $N = n - m$ στο $+\infty$, αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{r(x)}{x^{n-m}} \right| = \left| \frac{a_n}{b_m} \right| > 0$.

Είναι φανερό ότι οι πολωνυμικές τάξεις μεγέθους ιεραρχούνται ανάλογα με τον βαθμό τους, αφού, αν $0 < b_1 < b_2$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{b_1}}{x^{b_2}} = 0$. Παρατηρούμε, επίσης, ότι κάθε συνάρτηση με πολωνυμική τάξη μεγέθους στο $+\infty$ έχει, σε απόλυτη τιμή, όριο $+\infty$ στο $+\infty$. Πράγματι, έστω ότι η f έχει ίδια τάξη μεγέθους με κάποια x^b , $b > 0$, στο $+\infty$. Τότε υπάρχουν $u > 0$, $l > 0$ ώστε να ισχύει $l \leq \left| \frac{f(x)}{x^b} \right| \leq u$, οπότε $|f(x)| \geq l x^b$ κοντά στο $+\infty$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^b = +\infty$, συνεπάγεται $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = +\infty$.

Οι εκθετικές τάξεις μεγέθους ιεραρχούνται ανάλογα με τη βάση a , αφού, αν $1 < a_1 < a_2$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_1^x}{a_2^x} = 0$.

Ομοίως, οι λογαριθμικές τάξεις μεγέθους ιεραρχούνται ανάλογα με τον εκθέτη c , αφού, αν $0 < c_1 < c_2$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log^{c_1} x}{\log^{c_2} x} = 0$.

Όπως και με τις συναρτήσεις πολωνυμικής τάξης μεγέθους, παρατηρούμε ότι κάθε συνάρτηση με εκθετική ή με λογαριθμική τάξη μεγέθους στο $+\infty$ έχει, σε απόλυτη τιμή, όριο $+\infty$ στο $+\infty$. Η απόδειξη είναι παρόμοια.

Στο παραδείγματα 6.90 και 6.91 είδαμε ότι

Στο $+\infty$ κάθε λογαριθμική τάξη μεγέθους είναι μικρότερη από κάθε πολωνυμική τάξη μεγέθους, και κάθε πολωνυμική τάξη μεγέθους είναι μικρότερη από κάθε εκθετική τάξη μεγέθους.

Ασκήσεις

6.126. (i) Έστω $a > 1$. Ιεραρχήστε κατά τάξη μεγέθους στο $+\infty$ τις a^x , a^{a^x} , $a^{a^{a^x}}$. Γενικεύστε.
(ii) Ιεραρχήστε κατά τάξη μεγέθους στο $+\infty$ τις $\log x$, $\log(\log x)$, $\log(\log(\log x))$. Γενικεύστε.

6.127. (i) Αποδείξτε ότι οι x , $\log(e^x + x \log x)$, $e^{(1+\frac{1}{x}) \log x}$ έχουν ίδια τάξη μεγέθους στο $+\infty$.

(ii) Αποδείξτε ότι οι $\log \frac{1}{x}$, $\frac{x^2 + x \log \frac{1}{x}}{\sin x + x^2}$ έχουν ίδια τάξη μεγέθους στο 0 από δεξιά του.

6.128. Κατατάξτε τις τάξεις μεγέθους στο $+\infty$ των $\frac{x^3 e^x - x^5 e^{\frac{x}{2}}}{x e^x + \sin x}$, $e^{\frac{x}{5}} + x^3 e^{\frac{x}{6}} - x$, $e^{3 \log(2 + \log x)}$ σε πολωνυμικές, εκθετικές και λογαριθμικές και να τις ιεραρχήσετε.

6.129. Λέμε ότι μια συνάρτηση έχει **αντίστροφη πολωνυμική τάξη μεγέθους** στο $+\infty$, αν έχει ίδια τάξη μεγέθους με την $\frac{1}{x^b}$ για κάποιο $b > 0$. Ομοίως, λέμε ότι μια συνάρτηση έχει **αντίστροφη εκθετική** ή **αντίστροφη λογαριθμική τάξη μεγέθους** στο $+\infty$, αν έχει ίδια τάξη μεγέθους με την

$\frac{1}{a^x}$ για κάποιο $a > 1$ ή με την $\frac{1}{\log^c x}$ για κάποιο $c > 0$, αντιστοίχως.

(i) Αποδείξτε ότι κάθε συνάρτηση με αντίστροφη πολυωνυμική ή αντίστροφη εκθετική ή αντίστροφη λογαριθμική τάξη μεγέθους στο $+\infty$ έχει όριο 0 στο $+\infty$.

(ii) Αποδείξτε ότι στο $+\infty$ κάθε αντίστροφη εκθετική τάξη μεγέθους είναι μικρότερη από κάθε αντίστροφη πολυωνυμική τάξη μεγέθους, και ότι κάθε αντίστροφη πολυωνυμική τάξη μεγέθους είναι μικρότερη από κάθε αντίστροφη λογαριθμική τάξη μεγέθους.

(iii) Ιεραρχήστε τις αντίστροφες πολυωνυμικές τάξεις μεγέθους στο $+\infty$ μεταξύ τους και κάντε το ίδιο για τις αντίστροφες εκθετικές και τις αντίστροφες λογαριθμικές τάξεις μεγέθους στο $+\infty$.

(iv) Αποδείξτε ότι κάθε ρητή συνάρτηση $\frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m}$ με $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$ και $n < m$ έχει αντίστροφη πολυωνυμική τάξη μεγέθους στο $+\infty$.

(v) Κατατάξτε τις τάξεις μεγέθους στο $+\infty$ των $e^{-x} + 2e^{-x^2}$, $\frac{1}{\log(x+\log x)}$, $\log(e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2})$ σε αντίστροφες πολυωνυμικές, αντίστροφες εκθετικές και αντίστροφες λογαριθμικές και να τις ιεραρχήσετε.

6.14.2 Ασυμπτωτική ισότητα, μικρό όμικρον και μεγάλο όμικρον

Ορισμός 6.15. (i) Έστω ότι ισχύει $g(x) \neq 0$ κοντά στο ξ και $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Τότε γράφουμε

$$f = o(g) \quad \text{στο } \xi$$

και λέμε ότι «η f είναι **μικρό όμικρον** της g » στο ξ .

(ii) Έστω ότι ισχύει $g(x) \neq 0$ κοντά στο ξ και ότι υπάρχει αριθμός u ώστε να ισχύει $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq u$ κοντά στο ξ . Τότε γράφουμε

$$f = O(g) \quad \text{στο } \xi$$

και λέμε ότι «η f είναι **μεγάλο όμικρον** της g » στο ξ .

Όλα τα προηγούμενα ισχύουν, με τις προφανείς προσαρμογές, και για κάθε άλλη περίπτωση: στο ξ από δεξιά του ή από αριστερά του, στο $+\infty$, στο $-\infty$.

Παράδειγμα 6.99. Αν η f έχει μικρότερη τάξη μεγέθους από την g στο ξ , τότε $f = o(g)$ στο ξ . Το αντίστροφο ισχύει φυσικά, αν επιπλέον ισχύει $f(x) \neq 0$ κοντά στο ξ .

Για παράδειγμα, αν $a > 1$ και $b > 0$, $c > 0$, τότε $\log^c x = o(x^b)$ και $x^b = o(a^x)$ στο $+\infty$.

Επίσης, αν $0 < b_1 < b_2$, τότε $x^{b_1} = o(x^{b_2})$ στο $+\infty$, και $x^{b_2} = o(x^{b_1})$ στο 0.

Παράδειγμα 6.100. Αν η f έχει μικρότερη τάξη μεγέθους από ή την ίδια τάξη μεγέθους με την g στο ξ , τότε $f = O(g)$ στο ξ .

Για παράδειγμα, $\sin x = O(x)$ και $1 - \cos x = O(x^2)$ στο 0.

Ορισμός 6.16. Έστω ότι ισχύει $g(x) \neq 0$ κοντά στο ξ και $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Τότε γράφουμε

$$f \sim g \quad \text{στο } \xi$$

και λέμε ότι η f είναι **ασυμπτωτικά ίση** με την g στο ξ .

Η ορολογία είναι ανάλογη, με τις προφανείς προσαρμογές, και για κάθε άλλη περίπτωση: στο ξ από δεξιά του ή από αριστερά του, στο $+\infty$, στο $-\infty$.

Από το $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ συνεπάγεται ότι ισχύει $\frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$ κοντά στο ξ , οπότε ισχύει $f(x) \neq 0$ κοντά στο ξ . Δηλαδή, αν $f \sim g$ στο ξ , τότε ισχύει $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ κοντά στο ξ . Φυσικά, συνεπάγεται $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$, οπότε $g \sim f$ στο ξ , δηλαδή ότι και η g είναι ασυμπτωτικά ίση με την f στο ξ . Δηλαδή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη συμμετρική έκφραση: οι f, g είναι **ασυμπτωτικά ίσες** στο ξ .

Από μια παρατήρηση την οποία κάναμε αμέσως μετά από τον ορισμό 6.13 προκύπτει ότι αν οι f, g είναι ασυμπτωτικά ίσες στο ξ , τότε έχουν ίδια τάξη μεγέθους στο ξ .

Παράδειγμα 6.101. $\sin x \sim x$ και $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ στο 0.

Παράδειγμα 6.102. $e^x - 1 \sim x$ στο 0, διότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \left. \frac{de^x}{dx} \right|_{x=0} = 1$.

Παράδειγμα 6.103. $\log(1+x) \sim x$ στο 0, διότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \left. \frac{d \log x}{dx} \right|_{x=1} = 1$.

Παράδειγμα 6.104. $\tan x \sim \frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}$ στο $\frac{\pi}{2}$, διότι $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}} = \lim_{t \rightarrow 0} t \cot t = 1$.

Ακολουθεί μια χρήσιμη παρατήρηση:

Πρόταση 6.13. (i) Αν $f_1 = o(g)$, $f_2 = o(g)$ στο ξ , τότε $f_1 + f_2 = o(g)$ στο ξ .

(ii) $h = o(g)$ στο ξ , αν και μόνο αν $g + h \sim g$ στο ξ .

(iii) Έστω $f \sim g$ στο ξ . Τότε $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = a$, αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = a$.

(iv) Αν $h_1 = o(g_1)$, $h_2 = o(g_2)$ στο ξ , τότε $(g_1 + h_1)(g_2 + h_2) \sim g_1 g_2$, $\frac{g_1 + h_1}{g_2 + h_2} \sim \frac{g_1}{g_2}$ στο ξ .

Απόδειξη. (i) Από $f_1 = o(g)$ και $f_2 = o(g)$ στο ξ παίρνουμε

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f_1(x) + f_2(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f_1(x)}{g(x)} + \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f_2(x)}{g(x)} = 0 + 0 = 0.$$

Άρα $f_1 + f_2 = o(g)$ στο ξ .

(ii) Το $h = o(g)$ στο ξ είναι ισοδύναμο με το $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{h(x)}{g(x)} = 0$ και αυτό με το $\lim_{x \rightarrow \xi} \left(\frac{g(x) + h(x)}{g(x)} - 1 \right) = 0$ και αυτό με το $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{g(x) + h(x)}{g(x)} = 1$ και αυτό με το $g + h \sim g$ στο ξ .

(iii) Επειδή $f \sim g$ στο ξ , έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \xi} \left(\frac{f(x)}{g(x)} g(x) \right) = \lim_{x \rightarrow \xi} g(x).$$

(iv) Αν $h_1 = o(g_1)$ και $h_2 = o(g_2)$ στο ξ , τότε από το (ii) συνεπάγεται ότι $g_1 + h_1 \sim g_1$ και $g_2 + h_2 \sim g_2$ στο ξ . Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{(g_1(x) + h_1(x))(g_2(x) + h_2(x))}{g_1(x)g_2(x)} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{g_1(x) + h_1(x)}{g_1(x)} \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{g_2(x) + h_2(x)}{g_2(x)} = 1.$$

Άρα $(g_1 + h_1)(g_2 + h_2) \sim g_1 g_2$ στο ξ . Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι $\frac{g_1 + h_1}{g_2 + h_2} \sim \frac{g_1}{g_2}$ στο ξ . $\square$

Βάσει του (ii) της Πρότασης 6.13 τα τέσσερα προηγούμενα παραδείγματα αναδιατυπώνονται ως εξής:

Παράδειγμα 6.105. $\sin x - x = o(x)$ και $\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 = o(x^2)$ στο 0.

Παράδειγμα 6.106. $e^x - 1 - x = o(x)$ στο 0.

Παράδειγμα 6.107. $\log(1+x) - x = o(x)$ στο 0.

Παράδειγμα 6.108. $\tan x - \frac{1}{\frac{\pi}{2}-x} = o\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}\right)$ στο $\frac{\pi}{2}$.

Ορισμός 6.17. Αν στο άθροισμα συναρτήσεων $g+h$ ισχύει $h = o(g)$ στο ξ , τότε η g χαρακτηρίζεται **κύριος όρος του αθροίσματος** στο ξ .

Έστω ότι η g είναι κύριος όρος του αθροίσματος $g + h$ στο ξ . Τότε από το (ii) της Πρότασης 6.13 έχουμε ότι $g + h \sim g$ στο ξ . Αν, επιπλέον, ο κύριος όρος g έχει κάποιο όριο όταν $x \rightarrow \xi$, τότε από το (iii) της ίδιας πρότασης έχουμε ότι και το άθροισμα $g + h$ έχει το ίδιο όριο.

Επίσης, έστω ότι οι g_1, g_2 είναι κύριοι όροι των αθροισμάτων $g_1 + h_1, g_2 + h_2$ στο ξ . Τότε από το (iv) της Πρότασης 6.13 έχουμε ότι $\frac{g_1 + h_1}{g_2 + h_2} \sim \frac{g_1}{g_2}$ στο ξ . Αν, επιπλέον, ο λόγος $\frac{g_1}{g_2}$ των κύριων όρων έχει κάποιο όριο όταν $x \rightarrow \xi$, τότε από το (iii) της ίδιας πρότασης έχουμε ότι και ο λόγος $\frac{g_1 + h_1}{g_2 + h_2}$ έχει το ίδιο όριο.

Παράδειγμα 6.109. Βάσει των προηγούμενων μπορούμε να δούμε με «νέο μάτι» τα όρια πολυωνυμικών και ρητών συναρτήσεων. Επειδή $x^k = o(x^n)$ στο $+\infty$ για κάθε $k < n$, συνεπάγεται ότι στο πολυώνυμο $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, $a_n \neq 0$, το a_nx^n είναι ο κύριος όρος στο $+\infty$, οπότε

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \sim a_nx^n \quad \text{στο } +\infty,$$

$$\text{οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_nx^n.$$

Ομοίως, αν $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$, τότε

$$\frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m} \sim \frac{a_nx^n}{b_mx^m} \quad \text{στο } +\infty,$$

$$\text{οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_nx^n}{b_mx^m}.$$

Παράδειγμα 6.110. Και στα δύο αθροίσματα $xe^{2x} - x^2 + 3e^x - x^2e^{\frac{x}{2}}$ και $2e^{2x} + \log x - x^2e^x$ ο πρώτος τους όρος είναι ο κύριος όρος στο $+\infty$. Άρα

$$\frac{xe^{2x} - x^2 + 3e^x - x^2e^{\frac{x}{2}}}{2e^{2x} + \log x - x^2e^x} \sim \frac{xe^{2x}}{2e^{2x}} = \frac{x}{2} \quad \text{στο } +\infty,$$

$$\text{οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^{2x} - x^2 + 3e^x - x^2e^{\frac{x}{2}}}{2e^{2x} + \log x - x^2e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty.$$

Ασκήσεις

6.130. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω ότι η f είναι $n - 1$ φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, b) και $a < \xi < b$. Αν υπάρχει η $f^{(n)}(\xi)$ και είναι αριθμός, αποδείξτε τα εξής, τα οποία είναι ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} (x - \xi)^k &= o((x - \xi)^n) \quad \text{στο } \xi, \\ f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} (x - \xi)^k &\sim \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x - \xi)^n \quad \text{στο } \xi \quad \text{αν } f^{(n)}(\xi) \neq 0. \end{aligned}$$

Υπόδειξη: Αν $n = 1$, τότε το δεύτερο γράφεται $f(x) - f(\xi) \sim f'(\xi)(x - \xi)$ στο ξ και είναι απλώς ο ορισμός της παραγώγου $f'(\xi)$. Αν $n \geq 2$, τότε για την απόδειξη θα χρειαστεί να εφαρμόσετε ακριβώς $n - 1$ φορές τον πρώτο κανόνα l' Hopital.

Αποδείξτε τις παρακάτω ασυμπτωτικές ισότητες και γράψτε και τις αντίστοιχες ισοδύναμες σχέσεις με το μικρό όμικρον.

(i) Αν $n \geq 1$, τότε $\frac{1}{1-x} - (1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}) \sim x^n$ στο 0.

(ii) Αν $n \geq 1$, τότε $e^x - (1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}) \sim \frac{1}{n!}x^n$ στο 0.

(iii) Αν $n \geq 1$, τότε $\sin x - (\frac{1}{1!}x + \frac{(-1)^1}{3!}x^3 + \frac{(-1)^2}{5!}x^5 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}) \sim \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ στο 0.

(iv) Αν $n \geq 0$, τότε $\cos x - (1 + \frac{(-1)^1}{2!}x^2 + \frac{(-1)^2}{4!}x^4 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}) \sim \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!}x^{2n+2}$ στο 0.

(v) Αν $n \geq 2$, τότε $\log(1+x) - (\frac{x}{1} + \frac{(-1)^1}{2}x^2 + \frac{(-1)^2}{3}x^3 + \dots + \frac{(-1)^{n-2}}{n-1}x^{n-1}) \sim \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ στο 0.

(vi) Αν $n \geq 1$, τότε $\arctan x - (\frac{x}{1} + \frac{(-1)^1}{3}x^3 + \frac{(-1)^2}{5}x^5 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}) \sim \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ στο 0.

6.131. (i) Έστω $f(x) - (a + bx + cx^2 + dx^3) = o(x^3)$ στο 0.

Αποδείξτε ότι $f(x) - (a + bx + cx^2) = o(x^2)$, $f(x) - (a + bx) = o(x)$, $f(x) - a = o(1)$ στο 0.

(ii) Υπολογίστε διαδοχικά τα a, b, c, d , ώστε $\frac{x}{e^x-1} - (a + bx + cx^2 + dx^3) = o(x^3)$ στο 0.

6.132. Βρείτε τους κύριους όρους στο $+\infty$ των $e^{2x} \log x - x^5 e^x$, $x \log x - \frac{x^2}{\log x} + x \sqrt{x} \log(\log x)$, $x^2 \log x - x^2 + 3x \sin x$.

6.133. Βρείτε τους κύριους όρους στο 0 των $\frac{2}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}}$, $1 + 2x - x\sqrt{x}$, $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{3}{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}}$.

6.134. Αν η f είναι μικρό όμικρον της g , αποδείξτε ότι η f είναι μεγάλο όμικρον της g . Αυτό το γράφουμε συνοπτικά: $o(g) = O(g)$. Προσέξτε: δεν ισχύει $O(g) = o(g)$.

Είδαμε ότι αν οι f_1 και f_2 είναι μικρό όμικρον της g , τότε η $f_1 + f_2$ είναι μικρό όμικρον της g . Αυτό το γράφουμε συνοπτικά: $o(g) + o(g) = o(g)$.

Αποδείξτε και τα: $O(g) + O(g) = O(g)$, $o(g_1)O(g_2) = o(g_1g_2)$, $O(g_1)O(g_2) = O(g_1g_2)$.

6.15 Το Θεώρημα Taylor, A

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο ξ , τότε $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\xi)$. Με άλλα λόγια, το $f(x)$ είναι περίπου ίσο με το $f(\xi)$, αν το x είναι πολύ κοντά στο ξ . Συμβολικά:

$$f(x) \approx f(\xi) \quad \text{αν } x \approx \xi.$$

Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως προσέγγιση του $f(x)$ το $f(\xi)$, αν αυτό είναι γνωστό, δηλαδή αν υπολογίζεται εύκολα.

Παράδειγμα 6.111. Επειδή το 4.00001 είναι πολύ κοντά στο 4 και η $\sqrt{x}$ είναι συνεχής στο 4, μπορούμε να πούμε ότι $\sqrt{4.00001} \approx \sqrt{4} = 2$.

Το ακόλουθο θεώρημα επιτρέπει μία πιο μεθοδική μελέτη τέτοιων προσεγγίσεων.

Θεώρημα Taylor με σφάλμα τύπου Lagrange. Έστω $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, διάστημα I και $\xi \in I$. Έστω ότι η f έχει παραγώγους τάξης μέχρι και n συνεχείς στο I και ότι υπάρχει η παράγωγος τάξης $n+1$ της f σε κάθε εσωτερικό σημείο του I . Τότε για κάθε $x \in I$, $x \neq \xi$, υπάρχει $\eta \in (\xi, x)$ ή (x, ξ) ώστε

$$f(x) = f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1!}(x - \xi) + \cdots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n + \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}(x - \xi)^{n+1}.$$

Αν, επιπλέον, ισχύει $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ για κάθε x εσωτερικό του I , τότε

$$\left| f(x) - f(\xi) - \frac{f'(\xi)}{1!}(x - \xi) - \cdots - \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n \right| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - \xi|^{n+1}$$

για κάθε $x \in I$.

Απόδειξη. Αν $n = 0$, τότε η ισότητα την οποία θέλουμε να αποδείξουμε γράφεται

$$f(x) = f(\xi) + f'(\eta)(x - \xi),$$

και δεν είναι τίποτε άλλο από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού.

Τώρα, έστω $n \geq 1$. Σταθεροποιούμε τα x και ξ και ορίζουμε τον αριθμό A μέσω της ισότητας

$$A = \frac{(n+1)!}{(x-\xi)^{n+1}} \left(f(x) - f(\xi) - \frac{f'(\xi)}{1!}(x - \xi) - \cdots - \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n \right).$$

Κατόπιν, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(t) = f(x) - f(\xi) - \frac{f'(\xi)}{1!}(x - \xi) - \cdots - \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n - \frac{A}{(n+1)!}(x - t)^{n+1},$$

με ανεξάρτητη μεταβλητή t στο $[\xi, x]$ ή $[x, \xi]$. Η $g(t)$ είναι συνεχής στο $[\xi, x]$ ή $[x, \xi]$. Μετά από λίγες πράξεις βλέπουμε ότι η $g(t)$ έχει παράγωγο στο (ξ, x) ή (x, ξ) ίση με

$$g'(t) = \frac{A - f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n.$$

Προφανώς, $g(x) = 0$ και, βάσει του ορισμού του A , $g(\xi) = 0$. Άρα υπάρχει $\eta \in (\xi, x)$ ή (x, ξ) ώστε $g'(\eta) = 0$, οπότε $A = f^{(n+1)}(\eta)$. Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή του A στην ισότητα η οποία το έχει εξ αρχής καθορίσει, παίρνουμε την ισότητα του θεωρήματος.

Η ανισότητα προκύπτει από την ισότητα και την $|f^{(n+1)}(\eta)| \leq M$. □

Ορισμός 6.18. Η παράσταση

$$f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1!}(x - \xi) + \cdots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x - \xi)^k$$

ονομάζεται **προσέγγιση Taylor τάξης n** της f στο I και το $\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}(x - \xi)^{n+1}$ ονομάζεται **σφάλμα τάξης n τύπου Lagrange**. Η προσέγγιση Taylor τάξης n είναι πολυώνυμο του x βαθμού $\leq n$.

Παράδειγμα 6.112. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Taylor για την $\sqrt{x}$ στο διάστημα $[4, 4.00001]$ με $\xi = 4$, $x = 4.00001$ και $n = 1$ και βρίσκουμε

$$\sqrt{4.00001} = \sqrt{4} + \frac{1}{1!} \frac{1}{2\sqrt{4}} (4.00001 - 4) - \frac{1}{2!} \frac{1}{4\sqrt{\eta^3}} (4.00001 - 4)^2 = 2.0000025 - \frac{1}{8\sqrt{\eta^3}10^{10}}$$

για κάποιο $\eta \in (4, 4.00001)$. Επειδή

$$0 < \frac{1}{8\sqrt{\eta^3}10^{10}} < \frac{1}{8\sqrt{4^3}10^{10}} = 0.0000000000015625,$$

συνεπάγεται

$$2.0000024999984375 < \sqrt{4.00001} < 2.0000025.$$

Αυτό σημαίνει ότι το 2.00000249999 προσεγγίζει το $\sqrt{4.00001}$ με ακρίβεια έως και ενδέκατου δεκαδικού ψηφίου: η δεκαδική παράσταση του $\sqrt{4.00001}$ ξεκινά με 2.00000249999 και συνεχίζει με άλλα δεκαδικά ψηφία, από τα οποία το πρώτο είναι το 8 ή το 9.

Για καλύτερη προσέγγιση εφαρμόζουμε το Θεώρημα Taylor με $n = 2$. Τότε

$$\begin{aligned} \sqrt{4.00001} &= \sqrt{4} + \frac{1}{1!} \frac{1}{2\sqrt{4}} (4.00001 - 4) - \frac{1}{2!} \frac{1}{4\sqrt{\eta^3}} (4.00001 - 4)^2 + \frac{1}{3!} \frac{3}{8\sqrt{\eta^5}} (4.00001 - 4)^3 \\ &= 2.0000024999984375 + \frac{1}{16\sqrt{\eta^5}10^{15}} \end{aligned}$$

για κάποιο $\eta \in (4, 4.00001)$. Επειδή

$$0 < \frac{1}{16\sqrt{\eta^5}10^{15}} < \frac{1}{16\sqrt{4^5}10^{15}} = 0.00000000000000001953125,$$

συνεπάγεται

$$2.0000024999984375 < \sqrt{4.00001} < 2.000002499998437501953125.$$

Άρα το 2.00000249999843750 προσεγγίζει το $\sqrt{4.00001}$ με ακρίβεια έως και δέκατου έβδομου δεκαδικού ψηφίου: η δεκαδική παράσταση του $\sqrt{4.00001}$ ξεκινά με 2.00000249999843750 και συνεχίζει με άλλα δεκαδικά ψηφία, από τα οποία το πρώτο είναι το 0 ή το 1.

Ασκήσεις

6.135. Βρείτε σε κατάλληλα διαστήματα I τα οποία περιέχουν το $\xi = 0$ τις προσεγγίσεις Taylor οποιασδήποτε τάξης των συναρτήσεων $\frac{1}{1-x}$, e^x , $\log \frac{1}{1-x}$, $\sin x$, $\cos x$, $\sqrt{1+x}$, $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

6.136. Όπως στο παράδειγμα 6.112, εφαρμόστε το Θεώρημα Taylor με σφάλμα τύπου Lagrange στη συνάρτηση $\sqrt{x}$ στο διάστημα $[4, 4.00001]$ με $\xi = 4$ και $x = 4.00001$. Ποιο n πρέπει να χρησιμοποιήσετε έτσι ώστε να προσεγγίσετε το $\sqrt{4.00001}$ με ακρίβεια έως και χιλιοστού δεκαδικού ψηφίου, δηλαδή ώστε να είστε βέβαιοι ότι τα πρώτα χίλια δεκαδικά ψηφία του αριθμού τα οποία θα βρείτε να ταυτίζονται με τα πρώτα χίλια δεκαδικά ψηφία του $\sqrt{4.00001}$;

6.137. Προσαρμόστε την άσκηση 6.136 στην προσέγγιση των $\sin 1^\circ$ και $\sin 31^\circ$ με ακρίβεια έως και χιλιοστού δεκαδικού ψηφίου.

Υπόδειξη: $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ και $31^\circ = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}$.

6.138. Στο Θεώρημα Taylor με σφάλμα τύπου Lagrange $\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} (x-\xi)^{n+1}$ το η εξαρτάται, φυσικά, από το x . Αυτό το δηλώνουμε γράφοντας $\eta = \eta(x)$. Αποδείξτε ότι, αν υπάρχει η παράγωγος τάξης $n+2$ της f στο διάστημα I και είναι συνεχής στο ξ , τότε $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{\eta(x) - \xi}{x - \xi} = \frac{1}{n+2}$ ή, με άλλα λόγια, $\eta(x) \approx \xi + \frac{x - \xi}{n+2}$.

6.139. (i) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν ισχύει $|f(x)| \leq M$ και $|f''(x)| \leq N$ για κάθε x , αποδείξτε ότι ισχύει $|f'(x)| \leq \sqrt{2MN}$ για κάθε x .

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το θεώρημα Taylor: $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\eta_1)}{2}h^2$ και $f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(\eta_2)}{2}h^2$ για $h > 0$. Βρείτε $f(x+h) - f(x-h) = 2f'(x)h + \frac{f''(\eta_1) - f''(\eta_2)}{2}h^2$, οπότε $|f'(x)| \leq \frac{Nh}{2} + \frac{M}{h}$ για κάθε $h > 0$. Ελαχιστοποιήστε το δεξιό μέλος της ανισότητας.

(ii) Έστω $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(a, +\infty)$. Αν ισχύει $|f(x)| \leq M$ και $|f''(x)| \leq N$ για κάθε $x \in (a, +\infty)$, αποδείξτε ότι ισχύει $|f'(x)| \leq 2\sqrt{MN}$ για κάθε $x \in (a, +\infty)$.

Υπόδειξη: Έστω $x \in (a, +\infty)$. Εφαρμόστε το θεώρημα Taylor: $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\eta)}{2}h^2$ με $h > 0$. Βρείτε $|f'(x)| \leq \frac{Nh}{2} + \frac{2M}{h}$ για κάθε $h > 0$ και ελαχιστοποιήστε το δεξιό μέλος της ανισότητας.

(iii) Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$. Αν η f'' είναι φραγμένη στο $(0, +\infty)$ και αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

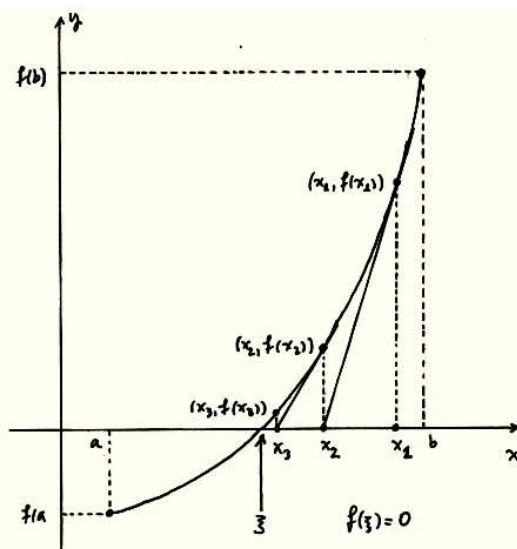
6.16 Προσεγγιστική επίλυση εξίσωσης

Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = 0$, όπου η f είναι ορισμένη στο διάστημα $[a, b]$, και έστω ότι γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι το $[a, b]$ περιέχει μία τουλάχιστον λύση ξ της εξίσωσης αυτής. Για παράδειγμα, αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και ισχύει $f(a)f(b) < 0$, τότε από το Θεώρημα Bolzano γνωρίζουμε ότι υπάρχει μία τουλάχιστον λύση της $f(x) = 0$ στο $[a, b]$. Το πρόβλημα το οποίο θα μελετήσουμε τώρα είναι πώς θα προσεγγίσουμε την άγνωστη λύση ξ .

Παρατηρήστε το σχήμα 6.15. Θεωρούμε $x_1 \in [a, b]$, το οποίο έχουμε λόγο να πιστεύουμε ότι είναι *αρκετά κοντά* στο ξ , δηλαδή $\xi \approx x_1$, και το σημείο $(x_1, f(x_1))$ στο γράφημα της f . Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_1 , τότε υπάρχει η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της f στο σημείο $(x_1, f(x_1))$ και η εξίσωσή της είναι $y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$. Θέτοντας $y = 0$, βλέπουμε ότι το σημείο τομής αυτής της εφαπτόμενης ευθείας και του x -άξονα είναι το $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$. Από το όριο $\lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(x_1)$ και από το $\xi \approx x_1$ έχουμε ότι $\frac{f(\xi) - f(x_1)}{\xi - x_1} \approx f'(x_1)$, οπότε $0 = f(\xi) \approx f(x_1) + f'(x_1)(\xi - x_1)$, οπότε

$$\xi \approx x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_2.$$

Από το x_1 , περίπου ίσο με το ξ , προέκυψε το x_2 , επίσης περίπου ίσο με το ξ . Αν επαναλάβουμε αυτήν την κατασκευή, από το x_2 προκύπτει το $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$, από το x_3 προκύπτει το $x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$ και ούτω καθεξής. Έτσι δημιουργείται η ακολουθία αριθμών (x_n) . Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **επαναληπτική διαδικασία του Newton**. Υπό ορισμένες προϋποθέσεις, η ακολουθία (x_n) συγκλίνει στη λύση ξ και, επιπλέον, μπορούμε να βρούμε εκτίμηση του σφάλματος $x_n - \xi$.



Σχήμα 6.15

Πρόταση 6.14. Έστω ότι η f έχει δεύτερη παράγωγο στο $[a, b]$, ότι $f(a) < 0 < f(b)$ και έστω ότι ισχύει $0 < m \leq f'(x)$ και $0 < f''(x) \leq M$ για κάθε $x \in [a, b]$.

(i) Τότε υπάρχει μοναδικό $\xi \in (a, b)$ ώστε $f(\xi) = 0$.

(ii) Ορίζουμε ακολουθία (x_n) , αρχίζοντας με οποιοδήποτε $x_1 \in (\xi, b]$, π.χ. με $x_1 = b$, και συνεχίζοντας με τον αναδρομικό τύπο

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

για κάθε n . Τότε η (x_n) είναι γνησίως φθίνουσα και $x_n \rightarrow \xi$.

(iii) Επίσης, ισχύει

$$0 < x_n - \xi \leq \frac{2m}{M} \left(\frac{M}{2m} (x_1 - \xi) \right)^{2^{n-1}}$$

για κάθε n .

Απόδειξη. (i) Από το Θεώρημα Bolzano συνεπάγεται ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f(\xi) = 0$. Το ξ είναι μοναδικό, διότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[a, b]$, αφού η f' είναι θετική στο $[a, b]$.

(ii) Έχουμε υποθέσει ότι $\xi < x_1 \leq b$.

Τώρα, έστω $\xi < x_n \leq b$ για κάποιο n . Τότε $f(x_n) > f(\xi) = 0$ και, επειδή $f'(x_n) > 0$, είναι

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < x_n.$$

Επίσης, υπάρχει $\eta \in (\xi, x_n)$ ώστε

$$\frac{f(x_n)}{x_n - \xi} = \frac{f(x_n) - f(\xi)}{x_n - \xi} = f'(\eta) < f'(x_n),$$

επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > \xi.$$

Αποδείξαμε ότι $\xi < x_{n+1} < x_n \leq b$.

Βλέπουμε, λοιπόν, επαγωγικά ότι η (x_n) είναι γνησίως φθίνουσα και περιέχεται στο διάστημα $(\xi, b]$. Συνεπάγεται ότι η (x_n) συγκλίνει σε κάποιο $\xi' \geq \xi$. Από τον αναδρομικό τύπο έχουμε ότι

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - x_{n+1} \rightarrow 0.$$

Επειδή η f' είναι συνεχής στο $[a, b]$, υπάρχει $N > 0$, ώστε να ισχύει $f'(x) \leq N$ για κάθε x στο $[a, b]$. Άρα ισχύει

$$0 < \frac{f(x_n)}{N} \leq \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

για κάθε n , οπότε $f(x_n) \rightarrow 0$. Λόγω του $x_n \rightarrow \xi'$ και της συνέχειας της f στο ξ' , συνεπάγεται $f(\xi') = 0$, οπότε $\xi' = \xi$. Άρα $x_n \rightarrow \xi$.

(iii) Σύμφωνα με το Θεώρημα Taylor, υπάρχει $\zeta \in (\xi, x_n)$, ώστε

$$0 = f(\xi) = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{f''(\zeta)}{2}(\xi - x_n)^2.$$

Από τον αναδρομικό τύπο ανάμεσα στα x_n, x_{n+1} συνεπάγεται

$$x_{n+1} - \xi = \frac{f''(\zeta)}{2f'(x_n)}(x_n - \xi)^2.$$

Άρα

$$0 < x_{n+1} - \xi \leq \frac{M}{2m}(x_n - \xi)^2$$

για κάθε n . Τώρα, με επαγωγή αποδεικνύεται πολύ εύκολα η σχέση

$$0 < x_n - \xi \leq \frac{2m}{M} \left(\frac{M}{2m} (x_1 - \xi) \right)^{2^{n-1}}$$

για κάθε n . □

Επιλέγουμε το $x_1 \in (\xi, b]$ ώστε να είναι σχετικά κοντά στο ξ και, συγκεκριμένα, ώστε να είναι

$$0 < x_1 - \xi < \frac{2m}{M}.$$

Τότε, όπως θα δούμε, η ακολουθία (x_n) συγκλίνει *εξαιρετικά γρήγορα* στο ξ . Πράγματι, τότε ισχύει $0 < \frac{M}{2m}(x_1 - \xi) < 1$, οπότε, επειδή $2^{n-1} \rightarrow +\infty$, συνεπάγεται ότι $(\frac{M}{2m}(x_1 - \xi))^{2^{n-1}} \rightarrow 0$, οπότε $x_n \rightarrow \xi$. Γενικά, αν $0 < \rho < 1$, τότε η γεωμετρική πρόοδος ρ^n τείνει γρήγορα στο 0, π.χ. πιο γρήγορα από την ακολουθία $\frac{1}{n^k}$ για οποιαδήποτε τιμή του $k > 0$. Στη συγκεκριμένη περίπτωση θεωρούμε $\rho = \frac{M}{2m}(x_1 - \xi)$. Επειδή το 2^{n-1} τείνει στο $+\infty$ πιο γρήγορα από το n , η ακολουθία $\rho^{2^{n-1}}$ τείνει στο 0 ακόμη πιο γρήγορα από τη ρ^n . Επομένως, αφού ισχύει

$$0 < x_n - \xi \leq \frac{2m}{M} \left(\frac{M}{2m}(x_1 - \xi) \right)^{2^{n-1}} = \frac{2m}{M} \rho^{2^{n-1}}$$

για κάθε n , έχουμε ότι $x_n \rightarrow \xi$ πολύ γρήγορα. Αυτό είναι ένα μεγάλο πλεονέκτημα της επαναληπτικής διαδικασίας του Newton, διότι σε σχετικά λίγα βήματα, δηλαδή με σχετικά μικρό n , πετυχαίνουμε πολύ καλή προσέγγιση του ξ .

Ασκήσεις

6.140. Εφαρμόστε την επαναληπτική διαδικασία του Newton στην εξίσωση $x^2 - 2 = 0$ στο διάστημα $[1, 2]$ για να προσεγγίσετε το $\sqrt{2}$. Ξεκινήστε με $x_1 = 2$ και βρείτε τα x_2, x_3, x_4 . Εκτιμήστε για καθένα από αυτά το σφάλμα σε σχέση με την αληθινή τιμή του $\sqrt{2}$. Ποιο πρέπει να είναι το n , ώστε το x_n να προσεγγίζει το $\sqrt{2}$ με ακρίβεια έως εκατοντάκις χιλιοστού δεκαδικού ψηφίου;

Υπόδειξη: Η εκτίμηση για το σφάλμα είναι $x_n - \sqrt{2} \leq \frac{2m}{M} \rho^{2^{n-1}}$, όπου $\rho = \frac{M}{2m}(2 - \sqrt{2})$. Υπολογίστε τα m, M στη συγκεκριμένη περίπτωση.

6.17 Βιβλιογραφία

Βασική βιβλιογραφία

- Anton, H. (1984). *Calculus with Analytic Geometry*. Wiley.
 Apostol, T. (1967). *Calculus, Vol I*. Wiley.
 Courant, R. (1988). *Differential and Integral Calculus, Vol I*. Wiley.
 Courant, R., John, F. (1989). *Introduction to Calculus and Analysis, Vol I*. Springer.
 Ghorpade, S., Limaye, B. (2006). *A Course in Calculus and Real Analysis*. Springer.
 Goldberg, R. (1976). *Methods of Real Analysis*. Wiley.
 Hardy, G. (2008). *A Course of Pure Mathematics*. Cambridge Univ. Press.
 Krantz, S. (2013). *Real Analysis and Foundations*. Chapman and Hall.
 Landau, E. (2001). *Differential and Integral Calculus*. American Math. Society & Chelsea.
 Nikolsky, S. (1977). *A Course of Mathematical Analysis, Vol I*. Mir Publishers.
 Smirnov, V. I. (1964). *A Course of Higher Mathematics, Vol I*. Pergamon Press.
 Spiegel, M. (1963). *Schaum's Outline of Advanced Calculus*. McGraw Hill.
 Spivak, M. (1994). *Calculus*. Cambridge Univ. Press.
 Thomas, G. (2018). *Calculus*. Pearson.
 Toeplitz, O. (2007). *The Calculus, A Genetic Approach*. The University of Chicago Press.

Εξειδικευμένη βιβλιογραφία

- Beckenbach, E., Bellman, R. (1961). *Inequalities*. Springer.
 Hardy, G., Littlewood, J., Polya, G. (1952). *Inequalities*. Cambridge Univ. Press.
 Mitrinović, D. (1964). *Elementary Inequalities*. Noordhoff.

- Mitrinović, D., Pečarić, J., Fink, A. (1993). *Classical and New Inequalities in Analysis*. Springer.
- Tikhomirov, V. (1991). *Stories about Maxima and Minima*. American Math. Society & Math. Association of America.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

7.1 Σύνοψη

Το κεφάλαιο αυτό αρχίζει με την περιγραφή μεθόδου –της ίδιας– για τον υπολογισμό του εμβαδού ανάμεσα στο γράφημα συνεχούς συνάρτησης και στον x -άξονα και για τον υπολογισμό της μάζας ευθύγραμμης ράβδου με μεταβλητή σημειακή πυκνότητα. Κατόπιν ορίζουμε την έννοια του ολοκληρώματος Riemann συνάρτησης βάσει των αθροισμάτων Riemann και υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα μερικών πολύ απλών συναρτήσεων. Μελετάμε τις ιδιότητες του ολοκληρώματος (αποδεικνύοντας μερικές από αυτές) σχετικά με αλγεβρικές πράξεις συναρτήσεων και ανισότητες ανάμεσα σε συναρτήσεις καθώς και σχετικά με ολοκληρώματα σε γειτονικά διαστήματα. Τέλος περιγράφουμε μερικές κλασικές μεθόδους προσεγγιστικού υπολογισμού ολοκληρωμάτων.

Προαπαιτούμενη γνώση: Τα προηγούμενα κεφάλαια.

7.2 Ένα γεωμετρικό και ένα φυσικό πρόβλημα

A. Το πρόβλημα του υπολογισμού του εμβαδού οποιασδήποτε επιφάνειας είναι γνωστό από την αρχαιότητα. Οι πιο απλές επιφάνειες, από αυτήν την άποψη, είναι οι επίπεδες επιφάνειες, και οι πιο απλές από όλες είναι οι τριγωνικές και οι παραλληλόγραμμες επιφάνειες για τα εμβαδά των οποίων υπάρχουν οι γνωστοί στοιχειώδεις τύποι υπολογισμού. Το ίδιο απλές είναι και οι επιφάνειες με πολυγωνικό σχήμα, τις οποίες μπορούμε, με κατάλληλες ευθείες, να χωρίσουμε σε τριγωνικές ή παραλληλόγραμμες επιφάνειες, οπότε ο προσδιορισμός των εμβαδών τους ανάγεται στην άθροιση των εμβαδών των επιμέρους επιφανειών, δηλαδή είναι «εννοιολογικά απλός».

Το ουσιαστικό πρόβλημα είναι ο υπολογισμός του εμβαδού επίπεδης επιφάνειας με καμπυλόγραμμα σύνορο: δίσκος, δακτύλιος, ελλειπτικό ή παραβολικό ή υπερβολικό χωρίο κ.τ.λ. Η μόνη μέθοδος για τον υπολογισμό εμβαδών καμπυλόγραμμων επιφανειών είναι η προσέγγισή τους με κατάλληλα πολυγωνικά σχήματα. Θα περιγράψουμε μία από τις παραλλαγές αυτής της μεθόδου.

Με κατάλληλες οριζόντιες και κατακόρυφες ευθείες, χωρίζουμε την επιφάνεια σε μικρότερες «στοιχειώδεις επιφάνειες», το σύνορο καθεμίας από τις οποίες αποτελείται από τέσσερις πλευρές: ένα οριζόντιο ή κατακόρυφο ευθύγραμμο τμήμα, δύο ευθύγραμμα τμήματα κάθετα προς το προηγούμενο στα άκρα του και μία καμπυλόγραμμη πλευρά. Αρκεί, λοιπόν, να περιγράψουμε τον υπολογισμό του εμβαδού οποιασδήποτε τέτοιας «στοιχειώδους επιφάνειας» και, ειδικότερα, όταν η καμπυλόγραμμη πλευρά είναι η πάνω πλευρά της «στοιχειώδους επιφάνειας». Κάθε άλλη «στοιχειώδης επιφάνεια» προκύπτει από μία τέτοια είτε με στροφή κατά ορθή γωνία είτε με ανάκλαση ως προς την πλευρά η οποία είναι απέναντι στην καμπυλόγραμμη πλευρά. Επιλέγοντας κατάλληλο σύστημα αξόνων, υποθέτουμε ότι η κάτω βάση της «στοιχειώδους επιφάνειας» είναι ένα διάστημα $[a, b]$ του x -άξονα, ότι η απέναντι πλευρά είναι το γράφημα συνάρτησης $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ και ότι οι δύο άλλες πλευρές είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $(a, 0)$ και $(a, f(a))$ και το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $(b, 0)$ και $(b, f(b))$. Φυσικά, ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Παπαδημητράκης, Μ. (2024) «Απειροστικός Λογισμός».

Αθήνα: Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. <http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-1011>

 Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Μη Εμπορική Χρήση - Παρόμοια Διανομή 4.0

Θα ασχοληθούμε στο εξής με τον υπολογισμό του εμβαδού μιας τέτοιας «στοιχειώδους επιφάνειας» με δεδομένα το διάστημα $[a, b]$ και τη συνάρτηση f . Για απλούστευση, θα θεωρήσουμε ότι η f είναι *συνεχής* στο $[a, b]$. Ας ονομάσουμε την επιφάνεια αυτή A και το εμβαδόν της E .

Η μέθοδος. Χωρίζουμε το $[a, b]$ σε *πολύ μικρά* διαδοχικά υποδιαστήματα επιλέγοντας διαδοχικά σημεία:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n = b.$$

Τα διαδοχικά υποδιαστήματα είναι τα

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{k-1}, x_k], \dots, [x_{n-2}, x_{n-1}], [x_{n-1}, x_n].$$

Είναι φανερό ότι όσο πιο μικρά είναι τα υποδιαστήματα αυτά, τόσο πιο μεγάλο είναι το πλήθος τους, n . Πράγματι, αν όλα τα υποδιαστήματα έχουν μήκος $< \delta$, όπου δ είναι ένας πολύ μικρός θετικός αριθμός, τότε το συνολικό μήκος των n διαδοχικών υποδιαστημάτων είναι $< n\delta$. Επειδή αυτό το συνολικό μήκος είναι $b - a$, έχουμε ότι $b - a < n\delta$, οπότε $n > \frac{b-a}{\delta}$. Επομένως, όσο πιο μικρό είναι το δ , τόσο πιο μεγάλο είναι το n .

Τα σημεία $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ ονομάζονται **διαιρετικά σημεία** και το σύνολό τους

$$\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$$

ονομάζεται **διαμέριση** του $[a, b]$. Φυσικά, αν $n = 1$, τότε το μοναδικό υποδιάστημα είναι το $[x_0, x_1] = [a, b]$. Γενικά, υπάρχουν άπειρες διαμερίσεις του $[a, b]$, διότι υπάρχουν άπειρες επιλογές του πλήθους n των υποδιαστημάτων τα οποία ορίζονται από τη διαμέριση και, για κάθε $n \geq 2$, υπάρχουν άπειρες επιλογές διαιρετικών σημείων $x_1, \dots, x_{n-1}$ (το $x_0 = a$ και το $x_n = b$ είναι δεδομένα).

Παράδειγμα 7.1. Μία πολύ απλή διαμέριση είναι εκείνη η οποία χωρίζει το $[a, b]$ σε n υποδιαστήματα *ίδιου* μήκους $\frac{b-a}{n}$. Συγκεκριμένα:

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \quad x_2 = a + 2\frac{b-a}{n}, \quad \dots, \quad x_{n-1} = a + (n-1)\frac{b-a}{n}, \quad x_n = a + n\frac{b-a}{n} = b.$$

Το k -οστό διαιρετικό σημείο είναι το $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$, $0 \leq k \leq n$. Και, φυσικά, το μήκος του k -οστού υποδιαστήματος είναι ίσο με

$$x_k - x_{k-1} = \left(a + k\frac{b-a}{n}\right) - \left(a + (k-1)\frac{b-a}{n}\right) = \frac{b-a}{n}.$$

Ονομάζουμε **πλάτος** μιας διαμερίσης Δ το μεγαλύτερο από τα μήκη των υποδιαστημάτων τα οποία ορίζονται από αυτήν, δηλαδή

$$\text{πλάτος}(\Delta) = \max\{x_k - x_{k-1} \mid 1 \leq k \leq n\}.$$

Όπως έχουμε πει, το πλάτος της Δ πρέπει να είναι πολύ μικρό.

Παράδειγμα 7.2. Αν δούμε πάλι τη διαμέριση του προηγούμενου παραδείγματος, επειδή όλα τα υποδιαστήματα τα οποία αυτή ορίζει έχουν το ίδιο μήκος $\frac{b-a}{n}$, το πλάτος της είναι ίσο με $\frac{b-a}{n}$.

Παρατηρήστε το σχήμα 7.1. Αφού επιλέξουμε μία διαμέριση Δ του $[a, b]$, παρατηρούμε ότι το εμβαδόν της αρχικής «στοιχειώδους επιφάνειας» είναι το άθροισμα των εμβαδών των n διαδοχικών «στοιχειωδών επιφανειών», από τις οποίες η k -οστή έχει ως κάτω βάση το διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$, ως άνω βάση το γράφημα της f στο $[x_{k-1}, x_k]$ και ως πλαϊνές πλευρές το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $(x_{k-1}, 0)$ και $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ και το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $(x_k, 0)$ και $(x_k, f(x_k))$. Ας ονομάσουμε την επιφάνεια αυτή A_k και το εμβαδόν της E_k . Είναι, λοιπόν,

$$E = E_1 + \dots + E_n.$$

Το πρόβλημα υπολογισμού των εμβαδών των επιφανειών $A_1, \dots, A_n$ παραμένει, διότι όλες είναι, εν γένει, καμπυλόγραμμες. Όμως, υπάρχει η εξής διαφορά: επειδή το πλάτος της Δ είναι

πολύ μικρό, κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ είναι πολύ μικρό και, όταν το x διατρέχει το $[x_{k-1}, x_k]$, τότε το αντίστοιχο ύψος $f(x)$, δεν είναι μεν σταθερό, οι διακυμάνσεις του, όμως, από σημείο σε σημείο είναι αμελητέες ή, με άλλα λόγια, είναι *περίπου σταθερό*. Αυτό οφείλεται στη *συνέχεια* της f . Άρα, αν πάρουμε οποιοδήποτε **ενδιάμεσο σημείο** $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, τότε οι τιμές του $f(x)$ στο $[x_{k-1}, x_k]$ είναι *περίπου ίσες* με το $f(\xi_k)$, οπότε η επιφάνεια A_k είναι *περίπου ίδια* με το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $\widetilde{A}_k$ το οποίο έχει κάτω πλευρά το $[x_{k-1}, x_k]$ και ύψος ίσο με $f(\xi_k)$. Επομένως, το εμβαδόν E_k της A_k είναι *περίπου ίσο* με το εμβαδόν $\widetilde{E}_k = f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ του ορθογώνιου παραλληλογράμμου $\widetilde{A}_k$ ή, συμβολικά,

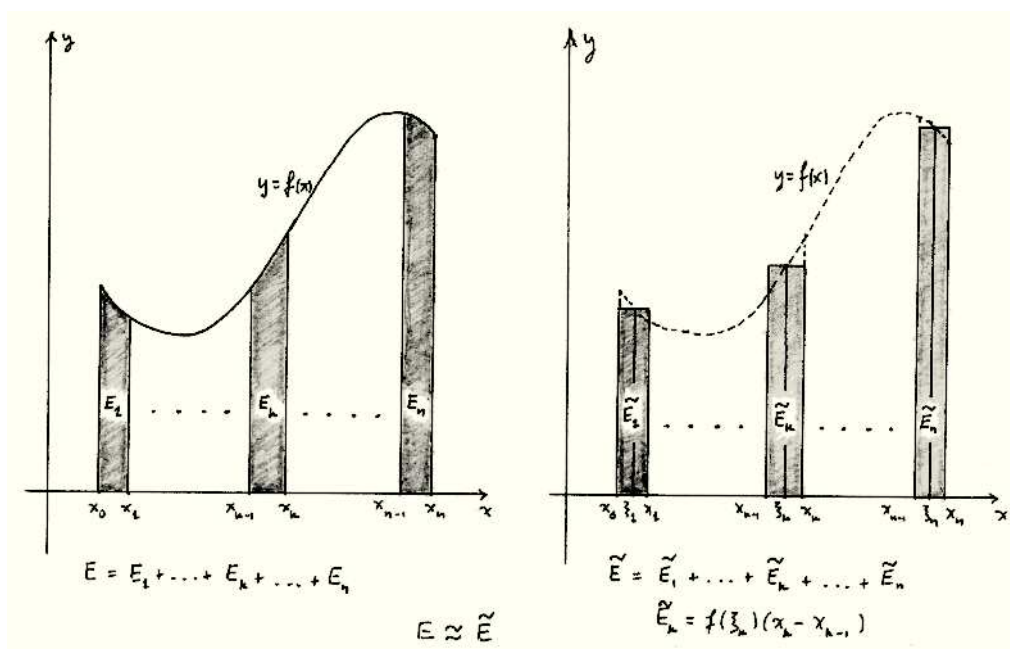
$$E_k \approx \widetilde{E}_k = f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Υπολογίζουμε, λοιπόν, για κάθε $k = 1, \dots, n$ το αντίστοιχο $\widetilde{E}_k$ και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$\widetilde{E} = \widetilde{E}_1 + \dots + \widetilde{E}_n = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \dots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}),$$

δηλαδή το εμβαδόν της ένωσης $\widetilde{A}$ των διαδοχικών ορθογώνιων παραλληλογράμμων $\widetilde{A}_1, \dots, \widetilde{A}_n$. Επειδή κάθε E_k είναι *περίπου* ίσο με το αντίστοιχο $\widetilde{E}_k$, αναμένουμε ότι και το $E = E_1 + \dots + E_n$ είναι *περίπου* ίσο με το $\widetilde{E} = \widetilde{E}_1 + \dots + \widetilde{E}_n$, δηλαδή¹

$$E \approx \widetilde{E} = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \dots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$



Σχήμα 7.1

¹Θα επιμείνουμε λίγο σε κάποιο σημείο της μεθόδου την οποία αναπτύξαμε. Είπαμε ότι, επειδή κάθε E_k είναι *περίπου* ίσο με το αντίστοιχο $\widetilde{E}_k$, το $E = E_1 + \dots + E_n$ είναι *περίπου* ίσο με το $\widetilde{E} = \widetilde{E}_1 + \dots + \widetilde{E}_n$. Όταν λέμε ότι το E_k είναι *περίπου* ίσο με το $\widetilde{E}_k$, εννοούμε ότι το σφάλμα ανάμεσα στην τιμή του E_k και στη προσεγγιστική τιμή $\widetilde{E}_k$, δηλαδή το $|E_k - \widetilde{E}_k|$, είναι πολύ μικρό. Και όταν λέμε ότι το $E = E_1 + \dots + E_n$ είναι *περίπου* ίσο με το $\widetilde{E} = \widetilde{E}_1 + \dots + \widetilde{E}_n$, τότε εννοούμε ότι το ανάλογο σφάλμα $|E - \widetilde{E}|$ είναι πολύ μικρό. Τώρα, το σφάλμα $|E - \widetilde{E}|$ συσχετίζεται με τα σφάλματα $|E_k - \widetilde{E}_k|$ για $k = 1, \dots, n$ μέσω της τριγωνικής ανισότητας:

$$|E - \widetilde{E}| = |(E_1 + \dots + E_n) - (\widetilde{E}_1 + \dots + \widetilde{E}_n)| \leq |E_1 - \widetilde{E}_1| + \dots + |E_n - \widetilde{E}_n|.$$

Επειδή κάθε $|E_k - \widetilde{E}_k|$ είναι πολύ μικρό, αγαμένομε ότι και το άθροισμα $|E_1 - \widetilde{E}_1| + \dots + |E_n - \widetilde{E}_n|$ των σφαλμάτων είναι, επίσης, πολύ μικρό, οπότε και το $|E - \widetilde{E}|$ είναι πολύ μικρό. Όμως, μπορεί κάποιος να προβάλει την εξής λογικότητα ένσταση. Για να είναι κάθε σφάλμα $|E_k - \widetilde{E}_k|$ πολύ μικρό πρέπει κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ να είναι αρκετά μικρό και, όπως είδαμε στην αρχή της περιγραφής της μεθόδου, αυτό συνεπάγεται ότι το πλήθος n των υποδιαστημάτων πρέπει να είναι αρκετά μεγάλο. Καταλήγουμε, λοιπόν, στο *άθροισμα μικρών αλλά πολλών* επιμέρους σφαλμάτων και δεν είναι καθόλου βέβαιο ότι το άθροισμα αυτό θα είναι μικρό. Για παράδειγμα, αν κάθε επιμέρους σφάλμα είναι ίσο με 10^{-5} αλλά το n είναι ίσο με 10^{13} , τότε το συνολικό σφάλμα είναι ίσο με $10^{13} \cdot 10^{-5} = 10^8$. Η απάντηση στην ένσταση αυτή θα δοθεί στο τέλος της ενότητας 11.14 του κεφαλαίου 11.

Επομένως, μπορούμε να προσεγγίσουμε το άγνωστο E με το γνωστό $\tilde{E}$. Αυτό θεωρείται γνωστό, διότι το υπολογίζουμε παίρνοντας οποιοδήποτε σημείο ξ_k στο αντίστοιχο $[x_{k-1}, x_k]$, υπολογίζοντας το $f(\xi_k)$, πολλαπλασιάζοντάς το με το μήκος $x_k - x_{k-1}$ και προσθέτοντας όλα αυτά τα γινόμενα για $k = 1, \dots, n$. Συμβολίζουμε

$$\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$$

το σύνολο όλων των ενδιάμεσων σημείων τα οποία επιλέξαμε, ένα σε κάθε υποδιάστημα. Παρατηρούμε ότι για κάθε Δ υπάρχουν άπειρες επιλογές συνόλων Ξ ενδιάμεσων σημείων. Τέλος, θα συμβολίζουμε

$$\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \dots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Παράδειγμα 7.3. Δύο απλές επιλογές ενδιάμεσων σημείων είναι εκείνη όπου κάθε ενδιάμεσο σημείο είναι το αριστερό άκρο του αντίστοιχου υποδιαστήματος, δηλαδή $\xi_k = x_{k-1}$, και εκείνη όπου κάθε ενδιάμεσο σημείο είναι το δεξιό άκρο του αντίστοιχου υποδιαστήματος, δηλαδή $\xi_k = x_k$. Μία ακόμη σχετικά απλή επιλογή ενδιάμεσων σημείων είναι εκείνη όπου κάθε ενδιάμεσο σημείο είναι το μέσο του αντίστοιχου υποδιαστήματος, δηλαδή $\xi_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$.

Συνοψίζουμε:

Θεωρούμε διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ του $[a, b]$ και σύνολο ενδιάμεσων σημείων $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ και βρίσκουμε το $\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi)$. Τότε το $\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi)$ προσεγγίζει το E , αν το πλάτος της Δ είναι πολύ μικρό. Συμβολικά:

$$E \approx \Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \dots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

B. Στην ενότητα 6.2 θεωρήσαμε μία πολύ λεπτή ευθύγραμμη ράβδο, την οποία ταυτίσαμε με το διάστημα $[a, b]$ ενός x -άξονα, και συμβολίσαμε $m(x)$ τη μάζα του τμήματος $[a, x]$ της ράβδου για $a \leq x \leq b$. Αν συμβολίσουμε $d(x)$ τη σημειακή γραμμική πυκνότητα του υλικού της ράβδου σε κάθε σημείο $x \in [a, b]$, τότε η συνάρτηση d προσδιορίζεται από τη συνάρτηση m μέσω του τύπου $d(x) = m'(x)$: η πυκνότητα είναι η παράγωγος της μάζας. Τώρα θα μελετήσουμε το αντίστροφο πρόβλημα, δηλαδή τον προσδιορισμό της μάζας της ράβδου από τη συνάρτηση της πυκνότητας.

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση d δεν παρουσιάζει απότομες αλλαγές σε κοντινά σημεία x , δηλαδή ότι είναι συνεχής στο $[a, b]$, και εφαρμόζουμε πάλι τη μέθοδο των διαμερίσεων. Επιλέγουμε οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ της ράβδου $[a, b]$ με πολύ μικρό πλάτος. Συμβολίζουμε m_k τη μάζα του υποδιαστήματος $[x_{k-1}, x_k]$, οπότε

$$m = m_1 + \dots + m_n.$$

Η πυκνότητα d είναι συνεχής, οπότε, όταν το x διατρέχει οποιοδήποτε από τα μικρά υποδιαστήματα $[x_{k-1}, x_k]$, τότε οι διακυμάνσεις του $d(x)$ είναι αμελητέες ή, με άλλα λόγια, η d είναι περίπου σταθερή. Επομένως, αν πάρουμε οποιοδήποτε ενδιάμεσο σημείο $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, τότε οι τιμές του $d(x)$ στο $[x_{k-1}, x_k]$ είναι περίπου ίσες με το $d(\xi_k)$, οπότε η μάζα m_k είναι περίπου ίση με τη μάζα $\widetilde{m}_k = d(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ την οποία θα είχε το υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$, αν το υλικό του ήταν ομοιογενές σταθερής σημειακής γραμμικής πυκνότητας $d(\xi_k)$. Συμβολικά:

$$m_k \approx \widetilde{m}_k = d(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Άρα η συνολική μάζα $m = m_1 + \dots + m_n$ της ράβδου $[a, b]$ είναι περίπου ίση με το $\widetilde{m} = \widetilde{m}_1 + \dots + \widetilde{m}_n$ ή, συμβολικά,

$$m \approx d(\xi_1)(x_1 - x_0) + \dots + d(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) = \sum_{k=1}^n d(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Χρησιμοποιώντας, όπως πριν, το σύμβολο $\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi)$, μπορούμε να γράψουμε

$$m \approx \Sigma(d; a, b; \Delta; \Xi) = d(\xi_1)(x_1 - x_0) + \dots + d(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) = \sum_{k=1}^n d(\xi_k)(x_k - x_{k-1}),$$

όπου $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ είναι οποιαδήποτε διαμέριση της ράβδου $[a, b]$ με πολύ μικρό πλάτος και το $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ είναι οποιοδήποτε αντίστοιχο σύνολο ενδιάμεσων σημείων.

7.3 Ολοκλήρωμα συνάρτησης

Με τον παρακάτω ορισμό γενικεύουμε τη μέθοδο την οποία αναπτύξαμε για τον υπολογισμό εμβαδών ή μαζών. Στη γενική περίπτωση δεν θα υποθέσουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ ούτε ότι είναι μη-αρνητική. Θα υποθέσουμε μόνο ότι η f είναι *φραγμένη*.

Ορισμός 7.1. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη στο $[a, b]$, διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ του $[a, b]$ και αντίστοιχο σύνολο $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων. Το άθροισμα

$$\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \dots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

ονομάζεται **άθροισμα Riemann** της f ως προς το $[a, b]$, ως προς τη διαμέριση Δ και ως προς το σύνολο Ξ ενδιάμεσων σημείων.

Αν υπάρχει αριθμός I ώστε το $\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi)$ να προσεγγίζει το I ή, ισοδύναμα, ώστε το $|\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) - I|$ να είναι μικρότερο από κάθε θετικό αριθμό όταν το πλάτος της Δ είναι αρκετά μικρό, τότε λέμε ότι η f είναι **Riemann ολοκληρώσιμη** στο $[a, b]$ και τον αριθμό I τον ονομάζουμε **ολοκλήρωμα Riemann** της f στο $[a, b]$ και τον συμβολίζουμε

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Αναλυτικά: η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ με ολοκλήρωμα Riemann $\int_a^b f(x) dx$, αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$, ώστε να ισχύει $|\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) - \int_a^b f(x) dx| < \epsilon$ για κάθε διαμέριση Δ του $[a, b]$ με πλάτος $(\Delta) < \delta$ και για κάθε αντίστοιχο σύνολο Ξ ενδιάμεσων σημείων. Με σύμβολα:

$$\text{πλάτος}(\Delta) < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) - \int_a^b f(x) dx \right| < \epsilon.$$

Από τώρα και στο εξής, χάριν συντομίας, αντί να λέμε «ολοκλήρωμα Riemann» ή «Riemann ολοκληρώσιμη» θα λέμε απλώς «ολοκλήρωμα» ή «ολοκληρώσιμη».

Η τιμή του ολοκληρώματος μιας συνάρτησης δεν εξαρτάται από το σύμβολο το οποίο χρησιμοποιούμε για την ανεξάρτητη μεταβλητή. Δηλαδή, τα σύμβολα

$$\int_a^b f(x) dx, \quad \int_a^b f(y) dy, \quad \int_a^b f(t) dt, \quad \int_a^b f(u) du$$

δηλώνουν όλα τον ίδιο αριθμό, το ολοκλήρωμα της f στο διάστημα $[a, b]$.

Σύμφωνα με τον ορισμό, το ολοκλήρωμα είναι το όριο του αθροίσματος Riemann όταν το πλάτος της διαμέρισης τείνει στο 0. Γράφουμε

$$\text{Συμβολικά :} \quad \lim_{\text{πλάτος}(\Delta) \rightarrow 0} \Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) = \int_a^b f(x) dx,$$

αν και ο συμβολισμός αυτός είναι κάπως ασαφής από αυστηρά μαθηματική σκοπιά και, σε ένα πλαίσιο πιο τυπικό από το πλαίσιο αυτών των σημειώσεων, χρειάζεται περαιτέρω διευκρίνιση.

Το σύμβολο $\int_a^b f(x) dx$ του ολοκληρώματος σχετίζεται με τον εξής μνημονικό κανόνα. Ένα άθροισμα Riemann $\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ μπορούμε να το δούμε «λιτά» ως $\Sigma f(x) \Delta x$, δηλαδή άθροισμα Σ γινομένων της μορφής: τιμή $f(x)$ της συνάρτησης σε κάποιο σημείο επί διαφορά Δx κοντινών σημείων. Αν χρησιμοποιήσουμε το πρώτο γράμμα της λατινικής λέξης Sum για το άθροισμα, τότε γράφουμε $S f(x) \Delta x$ για το άθροισμα Riemann και, παίρνοντας όριο, το Δx γίνεται dx , το απειροστό μέγεθος το οποίο συναντάμε στις παραγώγους, και το S «μακραίνει» και γίνεται $\int$.

Το σημαντικό Θεώρημα 7.1 εξασφαλίζει δύο συλλογές ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

Θεώρημα 7.1. Αν η $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής ή μονότονη, τότε είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 7.1 στην περίπτωση των συνεχών συναρτήσεων, η οποία είναι και η πιο σημαντική, βρίσκεται στην ενότητα 11.14 του κεφαλαίου 11.²

Επιστρέφοντας στο γεωμετρικό πρόβλημα του εμβαδού, ας υποθέσουμε ότι η $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ότι ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Στην ενότητα 7.2 αντιμετωπίσαμε το πρόβλημα υπολογισμού του εμβαδού E της επιφάνειας A η οποία περικλείεται ανάμεσα στο $[a, b]$, στο γράφημα της f , στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $(a, 0)$ και $(a, f(a))$ και στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $(b, 0)$ και $(b, f(b))$. Η απάντηση η οποία δόθηκε στην ενότητα 7.2 παίρνει τώρα τη μορφή

$$E = \int_a^b f(x) dx,$$

διότι, όπως είδαμε, το εμβαδόν E είναι, ακριβώς, ο αριθμός τον οποίο προσεγγίζουν τα αθροίσματα $\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$.

Με την ίδια λογική, βλέπουμε ότι η μάζα m μίας ράβδου $[a, b]$ προκύπτει από τη συνάρτηση πυκνότητας $d : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ του υλικού της, αν αυτή είναι συνεχής, μέσω του τύπου

$$m = \int_a^b d(x) dx.$$

Δηλαδή, η μάζα μίας ευθύγραμμης ράβδου ισούται με το ολοκλήρωμα της σημειακής γραμμικής πυκνότητάς της.

Παράδειγμα 7.4. Θεωρούμε τη σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$ στο διάστημα $[a, b]$. Παίρνουμε οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ του $[a, b]$ και οποιοδήποτε αντίστοιχο σύνολο ενδιάμεσων σημείων $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ και υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} \Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n c(x_k - x_{k-1}) = c \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \\ &= c((x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (x_n - x_{n-1})) \\ &= c(x_n - x_0) = c(b - a). \end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι όλα τα αθροίσματα Riemann έχουν την ίδια σταθερή τιμή $c(b-a)$, οπότε, προφανώς, τα αθροίσματα Riemann προσεγγίζουν τον αριθμό $c(b-a)$ όταν το πλάτος της Δ τείνει στο 0. Άρα η συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη και το ολοκλήρωμά της είναι ίσο με $c(b-a)$:

$$\int_a^b c dx = c(b-a).$$

Στην περίπτωση $c \geq 0$, η επιφάνεια η οποία βρίσκεται κάτω από το γράφημα της συνάρτησης είναι ένα απλό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο του οποίου το εμβαδόν είναι ίσο με $c(b-a)$, οπότε, τουλάχιστον σε αυτήν την ειδική περίπτωση, επιβεβαιώνουμε τα συμπεράσματά μας πάνω στη σχέση εμβαδού και ολοκληρώματος.

Παράδειγμα 7.5. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x$ στο διάστημα $[a, b]$ η οποία είναι συνεχής και μονότονη, οπότε από το Θεώρημα 7.1 συνεπάγεται ότι είναι ολοκληρώσιμη. Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_a^b x dx$ θα θεωρήσουμε κατάλληλες διαμερίσεις του $[a, b]$ και κατάλληλα αντίστοιχα σύνολα ενδιάμεσων σημείων ώστε τα πλάτη αυτών των διαμερίσεων να τείνουν στο 0, οπότε και τα αντίστοιχα αθροίσματα Riemann να προσεγγίζουν την τιμή του ολοκληρώματος και ώστε ο υπολογισμός των αντίστοιχων αθροισμάτων Riemann να είναι σχετικά απλός. Για κάθε n θεωρούμε τη διαμέριση του $[a, b]$ σε n υποδιαστήματα ίδιου μήκους $\frac{b-a}{n}$:

$$\Delta_n = \left\{ a, a + \frac{b-a}{n}, a + 2\frac{b-a}{n}, \dots, a + k\frac{b-a}{n}, \dots, a + (n-1)\frac{b-a}{n}, a + n\frac{b-a}{n} = b \right\}.$$

Το πλάτος της Δ_n είναι ίσο με $\frac{b-a}{n}$. Επίσης, επιλέγουμε το σύνολο ενδιάμεσων σημείων

$$\Xi_n = \left\{ a + \frac{b-a}{n}, a + 2\frac{b-a}{n}, \dots, a + k\frac{b-a}{n}, \dots, a + (n-1)\frac{b-a}{n}, a + n\frac{b-a}{n} = b \right\}.$$

² Δείτε και τις σημειώσεις «Ανάλυση» [1] τόσο για τις συνεχείς όσο και για τις μόνотονες συναρτήσεις.

Δηλαδή, σε κάθε υποδιάστημα επιλέγουμε το δεξιό άκρο του ως ενδιάμεσο σημείο. Τότε το αντίστοιχο άθροισμα $\Sigma(f; a, b; \Delta_n; \Xi_n)$ είναι ίσο με

$$\begin{aligned}\Sigma(f; a, b; \Delta_n; \Xi_n) &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \xi_k(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n (a + k \frac{b-a}{n})((a + k \frac{b-a}{n}) - (a + (k-1) \frac{b-a}{n})) \\ &= \sum_{k=1}^n (a + k \frac{b-a}{n}) \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n (a + k \frac{b-a}{n}) \\ &= \frac{b-a}{n} (\sum_{k=1}^n a + \sum_{k=1}^n k \frac{b-a}{n}) = \frac{b-a}{n} (na + \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n k) \\ &= \frac{b-a}{n} (na + \frac{b-a}{n} \frac{n(n+1)}{2}) = a(b-a) + \frac{n+1}{2n} (b-a)^2.\end{aligned}$$

Για την όγδοη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον τύπο $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ ο οποίος αποδείχθηκε στο παράδειγμα 1.16 με επαγωγή.

Τώρα, όταν $n \rightarrow +\infty$, τότε πλάτος $(\Delta_n) = \frac{b-a}{n} \rightarrow 0$, οπότε

$$\Sigma(f; a, b; \Delta_n; \Xi_n) \rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_a^b x dx.$$

Ομως,

$$\Sigma(f; a, b; \Delta_n; \Xi_n) = a(b-a) + \frac{n+1}{2n} (b-a)^2 \rightarrow a(b-a) + \frac{1}{2} (b-a)^2 = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

Παράδειγμα 7.6. Θα δούμε τώρα ένα πολύ απλό παράδειγμα συνάρτησης η οποία είναι ολοκληρώσιμη, παρά το ότι δεν είναι συνεχής ούτε μονότονη. Θεωρούμε οποιοδήποτε διάστημα $[a, b]$, οποιοδήποτε $\xi \in [a, b]$, και την

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x = \xi, \\ 0, & \text{αν } a \leq x \leq b \text{ και } x \neq \xi. \end{cases}$$

Παίρνουμε οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ του $[a, b]$ και οποιοδήποτε αντίστοιχο σύνολο ενδιάμεσων σημείων $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$. Τώρα διακρίνουμε τις εξής τρεις περιπτώσεις. Η πρώτη είναι όταν κανένα από τα ενδιάμεσα σημεία δεν είναι ίσο με το ξ , οπότε

$$\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \dots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) = 0(x_1 - x_0) + \dots + 0(x_n - x_{n-1}) = 0.$$

Η δεύτερη περίπτωση είναι όταν ακριβώς ένα από τα ενδιάμεσα σημεία είναι ίσο με ξ , για παράδειγμα $\xi_k = \xi$ για ακριβώς ένα k , οπότε

$$\begin{aligned}\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) &= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \dots + f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + \dots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) \\ &= 0(x_1 - x_0) + \dots + 1(x_k - x_{k-1}) + \dots + 0(x_n - x_{n-1}) = x_k - x_{k-1}.\end{aligned}$$

Η τρίτη περίπτωση είναι όταν ακριβώς δύο από τα ενδιάμεσα σημεία είναι ίσα με ξ , οπότε τα ενδιάμεσα αυτά σημεία είναι σε διαδοχικά υποδιαστήματα και ταυτίζονται με το κοινό τους άκρο, το κοινό διαιρετικό σημείο. Δηλαδή, $\xi_k = \xi_{k+1} = x_k = \xi$ για κάποιο k , οπότε

$$\begin{aligned}\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) &= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \dots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) \\ &= 0(x_1 - x_0) + \dots + f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + f(\xi_{k+1})(x_{k+1} - x_k) + \dots + 0(x_n - x_{n-1}) \\ &= 1(x_k - x_{k-1}) + 1(x_{k+1} - x_k) = x_{k+1} - x_{k-1}.\end{aligned}$$

Δεν υπάρχει άλλη περίπτωση, διότι το ξ δεν μπορεί να είναι ίσο με περισσότερα από δύο ενδιάμεσα σημεία. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι σε κάθε περίπτωση έχουμε

$$0 \leq \Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) \leq 2 \text{ πλάτος } (\Delta).$$

Άρα, όταν πλάτος $(\Delta) \rightarrow 0$, τότε $\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) \rightarrow 0$. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι η συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη και ότι

$$\int_a^b f(x) dx = 0.$$

Η επιφάνεια ανάμεσα στο γράφημα της συγκεκριμένης f και στο διάστημα $[a, b]$ του x -άξονα αποτελείται από δύο ευθύγραμμα τμήματα: το οριζόντιο με άκρα $(a, 0)$ και $(b, 0)$ και το κατακόρυφο με άκρα $(\xi, 0)$ και $(\xi, 1)$. Το πρώτο ευθύγραμμο τμήμα είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με ύψος ίσο με 0 και το δεύτερο ευθύγραμμο τμήμα είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκος βάσης ίσο με 0. Άρα το συνολικό εμβαδόν των δύο αυτών ευθύγραμμων τμημάτων είναι ίσο με $0 + 0 = 0$ και αυτό, όπως είναι αναμενόμενο, συμφωνεί με την τιμή του $\int_a^b f(x) dx$.

Στο σημείο αυτό θα τονίσουμε ότι τα μοναδικά παραδείγματα ολοκληρώσιμων συναρτήσεων των οποίων έχουμε υπολογίσει το ολοκλήρωμα βάσει του ορισμού, δηλαδή χρησιμοποιώντας αθροίσματα Riemann, είναι τα παραδείγματα 7.4, 7.5 και 7.6. Δηλαδή, (i) κάθε σταθερή συνάρτηση c με $\int_a^b c dx = c(b-a)$, (ii) η συνάρτηση x με $\int_a^b x dx = \frac{b^2-a^2}{2}$ και (iii) κάθε συνάρτηση f η οποία στο διάστημα $[a, b]$ στο οποίο ορίζεται έχει σταθερή τιμή 0, εκτός σε ένα μόνο σημείο στο οποίο έχει τιμή 1, και τότε $\int_a^b f(x) dx = 0$. Υπάρχουν κάποια ακόμη παραδείγματα συναρτήσεων στις ασκήσεις 7.1 και 7.2, αλλά ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων τους μέσω αθροισμάτων Riemann είναι σχετικά επίπονος. Θα γνωρίσουμε την πιο αποτελεσματική μέθοδο υπολογισμού ολοκληρωμάτων στο επόμενο κεφάλαιο, όπου θα συσχετίσουμε τις έννοιες του ολοκληρώματος και της παραγώγου.

Ασκήσεις

7.1. Θεωρήστε διαμέριση Δ_n με ισαπέχοντα διαιρετικά σημεία και σύνολο ενδιάμεσων σημείων Ξ_n , όπως στο παράδειγμα 7.5, για να αποδείξετε ότι:

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3-a^3}{3}, \quad \int_a^b x^3 dx = \frac{b^4-a^4}{4}, \quad \int_a^b e^x dx = e^b - e^a,$$

$$\int_a^b \cos x dx = \sin b - \sin a, \quad \int_a^b \sin x dx = \cos a - \cos b.$$

Για τα δύο πρώτα ολοκληρώματα θα χρειαστείτε τους τύπους για τα αθροίσματα στην άσκηση 1.46, ενώ για τα δύο τελευταία θα χρειαστείτε τους τύπους για τα τριγωνομετρικά αθροίσματα στην άσκηση 1.39.

7.2. Έστω $0 < a < b$. Θεωρήστε $n \in \mathbb{N}$ και το $\mu_n = (\frac{b}{a})^{\frac{1}{n}} > 1$. Κατόπιν, θεωρήστε τη διαμέριση $\Delta_n = \{a, a\mu_n, a\mu_n^2, \dots, a\mu_n^k, \dots, a\mu_n^{n-1}, a\mu_n^n\}$ του $[a, b]$ και την επιλογή ενδιάμεσων σημείων $\Xi_n = \{a\mu_n, a\mu_n^2, \dots, a\mu_n^k, \dots, a\mu_n^{n-1}, a\mu_n^n\}$.

(i) Αποδείξτε ότι πλάτος $(\Delta_n) = b(1 - (\frac{a}{b})^{\frac{1}{n}})$ και ότι πλάτος $(\Delta_n) \rightarrow 0$.

(ii) Αφού γράψετε και απλοποιήσετε το $\Sigma(x^p; a, b; \Delta_n; \Xi_n)$, αποδείξτε ότι

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \log \frac{b}{a}, \quad \int_a^b x^p dx = \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1} \text{ αν } p \neq -1.$$

7.3. Γράψτε καθένα από τα όρια ακολουθιών $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{n^2-k^2}}{n^2}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{n+k}}{n\sqrt{n}}$ με τη μορφή ολοκληρώματος. Δεν χρειάζεται να τα υπολογίσετε.

Υπόδειξη: Για το πρώτο, γράψτε τον k -οστό όρο $\frac{1}{n+k} = \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \frac{1}{n} = f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$, με κατάλληλη συνάρτηση f στο διάστημα $[0, 1]$, κατάλληλη διαμέριση $\Delta = \{x_0, \dots, x_n\}$ του $[0, 1]$ και κατάλληλο σύνολο $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων. Ομοίως για τα υπόλοιπα.

7.4. Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[a, b]$ με $A = f(a)$, $B = f(b)$. Γνωρίζουμε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[A, B]$ με $a = f^{-1}(A)$, $b = f^{-1}(B)$. Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b f(x) dx + \int_A^B f^{-1}(y) dy = Bb - Aa.$$

Υπόδειξη: Θεωρήστε οποιαδήποτε διαμέριση $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ του $[a, b]$ και την αντίστοιχη διαμέριση $\{y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n\}$ του $[A, B]$ με $y_k = f(x_k)$ για κάθε $k = 0, 1, \dots, n$. Τι είναι το $\sum_{k=1}^n y_k(x_k - x_{k-1})$ για το πρώτο ολοκλήρωμα και τι είναι το $\sum_{k=1}^n x_{k-1}(y_k - y_{k-1})$ για το δεύτερο ολοκλήρωμα; Γράψτε το άθροισμα των δύο αθροισμάτων και απλοποιήστε το.

Ποιο είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο αυτής της ισότητας, αν $0 \leq a < b$ και $0 \leq A < B$;

Υπόδειξη: Σχεδιάστε τα γραφήματα των f και f^{-1} στο ίδιο σχήμα.

7.4 Ολοκληρώματα και αλγεβρικές πράξεις

Στις διάφορες αποδείξεις παρακάτω, όσες γίνουν, θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό³

$$\lim_{\text{πλάτος}(\Delta) \rightarrow 0} \Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) = \int_a^b f(x) dx$$

για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και ότι το ολοκλήρωμά της είναι το όριο των αθροισμάτων Riemann της, όταν τα πλάτη των αντίστοιχων διαμερίσεων τείνουν στο 0.

Πρόταση 7.1. Έστω ότι η $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και έστω αριθμός λ . Τότε η λf είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ του $[a, b]$ και οποιοδήποτε αντίστοιχο σύνολο $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων και έχουμε ότι

$$\Sigma(\lambda f; a, b; \Delta; \Xi) = \sum_{k=1}^n \lambda f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \lambda \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \lambda \Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi).$$

Επίσης, επειδή η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, έχουμε ότι

$$\lim_{\text{πλάτος}(\Delta) \rightarrow 0} \Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) = \int_a^b f(x) dx.$$

Συνεπάγεται

$$\lim_{\text{πλάτος}(\Delta) \rightarrow 0} \Sigma(\lambda f; a, b; \Delta; \Xi) = \lambda \lim_{\text{πλάτος}(\Delta) \rightarrow 0} \Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) = \lambda \int_a^b f(x) dx.$$

Άρα η λf είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και $\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$. □

Ας δούμε το γεωμετρικό περιεχόμενο της Πρότασης 7.1. Έστω $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ και έστω A η επιφάνεια ανάμεσα στο γράφημα της f και στο διάστημα $[a, b]$ του x -άξονα. Αν $\lambda \geq 0$ και αν B είναι η επιφάνεια ανάμεσα στο γράφημα της λf και στο διάστημα $[a, b]$, τότε η B έχει την ίδια βάση με την A , το διάστημα $[a, b]$, ενώ τα ύψη της B , τα $\lambda f(x)$, είναι ίσα με τα αντίστοιχα ύψη της A , τα $f(x)$, πολλαπλασιασμένα όλα με τον ίδιο αριθμό λ . Η Πρόταση 7.1 λέει ότι το εμβαδόν της B είναι ίσο με το εμβαδόν της A πολλαπλασιασμένο με τον αριθμό λ .

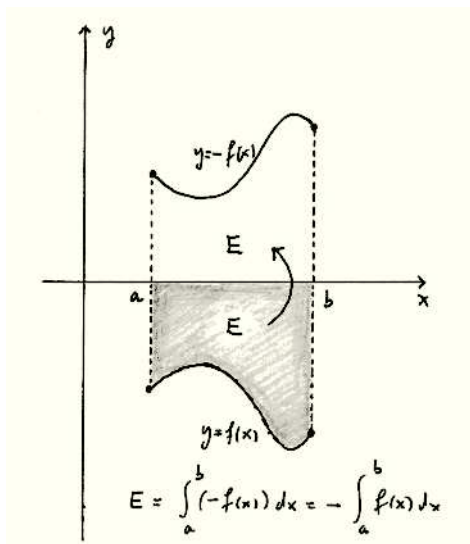
Ας δούμε ένα ακόμη συμπέρασμα για τη σχέση ανάμεσα σε ολοκληρώματα και σε εμβαδά. Παρατηρήστε το σχήμα 7.2. Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ και έστω A η επιφάνεια ανάμεσα στο γράφημα της f και στο διάστημα $[a, b]$ του x -άξονα και έστω E το εμβαδόν της επιφάνειας A . Η A είναι, προφανώς, κάτω από τον x -άξονα. Αν B είναι η επιφάνεια ανάμεσα στο γράφημα της $-f$ και στο διάστημα $[a, b]$, τότε η B είναι συμμετρική της A ως προς τον x -άξονα, οπότε η B έχει το ίδιο εμβαδόν E με την A . Επειδή ισχύει $-f(x) \geq 0$,

³Όπως τονίσαμε πιο πριν, ο συμβολισμός αυτός είναι ασαφής από αυστηρά μαθηματική σκοπιά. Δείτε τις σημειώσεις «Ανάλυση» [1] για σαφείς αλλά και πιο εκτενείς αποδείξεις.

το $\int_a^b (-f(x)) dx$ είναι ίσο με το εμβαδόν της B , δηλαδή ίσο με E . Η Πρόταση 7.1 λέει ότι το $-\int_a^b f(x) dx$ είναι ίσο με το $\int_a^b (-f(x)) dx$, οπότε ίσο με E . Δηλαδή,

$$E = -\int_a^b f(x) dx.$$

Από «κεκτημένη ταχύτητα» γίνεται πολύ συχνά το λάθος να γράφουμε $E = \int_a^b f(x) dx$. Όμως αυτό ισχύει μόνο όταν η συνάρτηση είναι *μη-αρνητική*. Αντιθέτως, όταν η συνάρτηση είναι *μη-θετική* ισχύει $E = -\int_a^b f(x) dx$.



Σχήμα 7.2

Θα δούμε σε λίγο τι ισχύει όταν η συνάρτηση δεν έχει σταθερό πρόσημο.

Πρόταση 7.2. Έστω ότι οι $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$. Τότε η $f + g$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ του $[a, b]$ και οποιοδήποτε αντίστοιχο σύνολο $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων και έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \Sigma(f + g; a, b; \Delta; \Xi) &= \sum_{k=1}^n (f(\xi_k) + g(\xi_k))(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n (f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + g(\xi_k)(x_k - x_{k-1})) \\ &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^n g(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) + \Sigma(g; a, b; \Delta; \Xi). \end{aligned}$$

Επίσης, επειδή οι f, g είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$, έχουμε ότι

$$\lim_{\text{πλάτος}(\Delta) \rightarrow 0} \Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) = \int_a^b f(x) dx, \quad \lim_{\text{πλάτος}(\Delta) \rightarrow 0} \Sigma(g; a, b; \Delta; \Xi) = \int_a^b g(x) dx.$$

Άρα

$$\begin{aligned} \lim_{\text{πλάτος}(\Delta) \rightarrow 0} \Sigma(f + g; a, b; \Delta; \Xi) &= \lim_{\text{πλάτος}(\Delta) \rightarrow 0} \Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) + \lim_{\text{πλάτος}(\Delta) \rightarrow 0} \Sigma(g; a, b; \Delta; \Xi) \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

Άρα η $f + g$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$. $\square$

Έστω ότι ισχύει $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αν A είναι η επιφάνεια ανάμεσα στο γράφημα της f και στο διάστημα $[a, b]$ του x -άξονα, αν B είναι η επιφάνεια ανάμεσα στο γράφημα της g και στο $[a, b]$ και αν C είναι η επιφάνεια ανάμεσα στο γράφημα της $f + g$ και στο $[a, b]$, τότε τα ύψη της C , τα $f(x) + g(x)$, είναι όλα ίσα με τα αθροίσματα των αντίστοιχων υψών της A , των $f(x)$, και της B , των $g(x)$. Η Πρόταση 7.2 λέει ότι το εμβαδόν της C είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών της A και της B .

Συνδυάζοντας τις Προτάσεις 7.1 και 7.2, έχουμε ότι αν οι $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$ και αν λ, μ είναι αριθμοί, τότε η $\lambda f + \mu g$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$$

Γενικότερα, αν οι $f_1, \dots, f_m$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$ και αν $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ είναι αριθμοί, τότε η $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_m f_m$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\int_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_m f_m(x)) dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x) dx + \dots + \lambda_m \int_a^b f_m(x) dx.$$

Παράδειγμα 7.7. Θα γενικεύσουμε ελαφρά το παράδειγμα 7.6.

Έστω διάστημα $[a, b]$, σημεία $\xi_1, \dots, \xi_m$ στο $[a, b]$ και οποιαδήποτε $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία έχει τιμή $f(x) = 0$ σε κάθε $x \in [a, b]$ εκτός από τα σημεία $\xi_1, \dots, \xi_m$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\int_a^b f(x) dx = 0.$$

Αυτό μπορούμε να το δούμε ως εξής. Έστω $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ οι τιμές της f στα σημεία $\xi_1, \dots, \xi_m$, αντίστοιχως. Για κάθε ξ_k θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x = \xi_k, \\ 0, & \text{αν } a \leq x \leq b \text{ και } x \neq \xi_k. \end{cases}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι τότε ισχύει

$$f(x) = \lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_m f_m(x) \quad (7.1)$$

για κάθε $x \in [a, b]$. Πράγματι, αν το x στο $[a, b]$ είναι διαφορετικό από κάθε $\xi_k, 1 \leq k \leq m$, τότε $f(x) = 0$ και $f_k(x) = 0$ για $1 \leq k \leq m$. Επομένως, και τα δύο μέλη της (7.1) είναι ίσα με 0. Ενώ, αν το x στο $[a, b]$ είναι ίσο με κάποιο ξ_k , τότε $f(x) = \lambda_k$ και $f_k(x) = 1$ και $f_j(x) = 0$ για $1 \leq j \leq m, j \neq k$. Επομένως, και τα δύο μέλη της (7.1) είναι ίσα με λ_k . Σε κάθε περίπτωση, τα δύο μέλη της (7.1) έχουν ίδιες τιμές.

Βάσει του παραδείγματος 7.6 κάθε f_k είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ με $\int_a^b f_k(x) dx = 0$. Άρα και η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\int_a^b f(x) dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x) dx + \dots + \lambda_m \int_a^b f_m(x) dx = \lambda_1 0 + \dots + \lambda_m 0 = 0.$$

Πρόταση 7.3. Έστω ότι οι $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ταυτίζονται στο διάστημα $[a, b]$, εκτός σε πεπερασμένους πλήθους σημεία του $[a, b]$. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, τότε και η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και $\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Η συνάρτηση $h = g - f$ έχει τιμή $h(x) = g(x) - f(x) = 0$ σε κάθε $x \in [a, b]$, εκτός σε πεπερασμένους πλήθους σημεία του $[a, b]$. Σύμφωνα με το τελευταίο παράδειγμα, η h είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και $\int_a^b h(x) dx = 0$. Άρα η $g = f + h$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και $\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b h(x) dx = \int_a^b f(x) dx$. $\square$

Η Πρόταση 7.3 μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής.

Αν μία συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη σε κάποιο διάστημα και αν δημιουργήσουμε μία νέα συνάρτηση αλλάζοντας τις τιμές της αρχικής σε πεπερασμένους πλήθους σημεία του διαστήματος, τότε η νέα συνάρτηση είναι και αυτή ολοκληρώσιμη στο ίδιο διάστημα και το ολοκλήρωμά της είναι το ίδιο με το ολοκλήρωμα της αρχικής συνάρτησης.

Πέρα από τις υποθέσεις της Πρότασης 7.3, έστω ότι ισχύει $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αν A είναι η επιφάνεια ανάμεσα στο γράφημα της f και στο $[a, b]$ και αν B είναι η επιφάνεια ανάμεσα στο γράφημα της g και στο $[a, b]$, τότε οι δύο επιφάνειες διαφέρουν κατά m κατακόρυφα ευθύγραμμα τμήματα. Επειδή κάθε ευθύγραμμο τμήμα έχει εμβαδόν 0, οι επιφάνειες A και B έχουν το ίδιο εμβαδόν. Αυτό είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο της Πρότασης 7.3.

Πρόταση 7.4. Έστω ότι οι $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$. Τότε η fg είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

Σε αντίθεση με την περίπτωση του αθροίσματος συναρτήσεων, δεν υπάρχει τύπος ο οποίος συνδέει το ολοκλήρωμα του γινομένου συναρτήσεων με τα ολοκλήρωμα των δύο συναρτήσεων ξεχωριστά. Για παράδειγμα, δεν ισχύει $\int_a^b f(x)g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx$. Αυτός, αν ίσχυε, θα ήταν τύπος ανάλογος του τύπου ο οποίος ισχύει για το άθροισμα συναρτήσεων.

Παράδειγμα 7.8. Για να δούμε ότι δεν ισχύει γενικά ο παραπάνω τύπος για το ολοκλήρωμα γινομένου συναρτήσεων, έχουμε το παράδειγμα με

$$\int_a^b 1 \cdot 1 dx = \int_a^b 1 dx = b - a, \quad \int_a^b 1 dx \int_a^b 1 dx = (b - a)(b - a) = (b - a)^2.$$

Η ισότητα $b - a = (b - a)^2$ δεν ισχύει γενικά.

Οι Προτάσεις 7.4 και 7.5 δεν θα αποδειχτούν σε αυτές τις σημειώσεις⁴.

Πρόταση 7.5. Έστω ότι η $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Αν για κάποιο $m > 0$ ισχύει $|f(x)| \geq m$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε η $\frac{1}{f}$ είναι και αυτή ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

Τονίζουμε ότι, όπως και με το γινόμενο συναρτήσεων, δεν υπάρχει γενικός τύπος ο οποίος συνδέει το ολοκλήρωμα του αντίστροφου μιας συνάρτησης με το ολοκλήρωμα της συνάρτησης. Για παράδειγμα, δεν ισχύει $\int_a^b \frac{1}{f(x)} dx = \frac{1}{\int_a^b f(x) dx}$.

Παράδειγμα 7.9. Για να δούμε ότι δεν ισχύει γενικά ο παραπάνω τύπος, θεωρούμε το παράδειγμα με

$$\int_a^b \frac{1}{1} dx = \int_a^b 1 dx = b - a, \quad \frac{1}{\int_a^b 1 dx} = \frac{1}{b - a}.$$

Η ισότητα $b - a = \frac{1}{b - a}$ δεν ισχύει γενικά.

Ασκήσεις

7.5. Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα των ασκήσεων 7.1 και 7.2 και τις Προτάσεις 7.1 και 7.2, υπολογίστε τα $\int_1^3 (\frac{2}{x} - x^2 + x^{\sqrt{2}} + 3e^x) dx$, $\int_{\pi}^{2\pi} (x^2 - 3 \cos x + 2 \sin x) dx$.

7.6. Υπολογίστε το $\int_1^2 f(x) dx$ για την $f(x) = \begin{cases} x - 2, & \text{αν } 1 < x < 2, \\ 0, & \text{αν } x = 1, \\ -2, & \text{αν } x = 2, \end{cases}$ χρησιμοποιώντας τις Προτάσεις 7.3 και 7.2.

⁴Δείτε τις σημειώσεις «Ανάλυση» [1].

7.5 Ολοκληρώματα σε υποδιαστήματα και σε γειτονικά διαστήματα

Πρόταση 7.6. Έστω ότι η $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε υποδιάστημα $[c, d]$ του $[a, b]$.

Η Πρόταση 7.6 δεν θα αποδειχτεί στο παρόν σύγγραμμα⁵.

Πρόταση 7.7. Έστω $a < b < c$ και έστω ότι η $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και στο $[b, c]$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, c]$ και

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

Μερική απόδειξη. Θεωρούμε διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ του $[a, c]$ και αντίστοιχο σύνολο $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων.

Έστω ότι η Δ περιέχει το b ως διαιρετικό σημείο, δηλαδή $b = x_m$ για κάποιο m με $1 \leq m \leq n-1$. Θεωρούμε τη διαμέριση $\Delta' = \{x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, x_m\}$ του $[a, b]$ και το αντίστοιχο σύνολο ενδιάμεσων σημείων $\Xi' = \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$ και τη διαμέριση $\Delta'' = \{x_m, x_{m+1}, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ του $[b, c]$ και το αντίστοιχο σύνολο ενδιάμεσων σημείων $\Xi'' = \{\xi_{m+1}, \dots, \xi_n\}$. Έτσι η Δ χωρίζεται στις διαμερίσεις Δ' του $[a, b]$ και Δ'' του $[b, c]$ και το Ξ χωρίζεται σε Ξ' και Ξ'' . Τώρα:

$$\begin{aligned} \Sigma(f; a, c; \Delta; \Xi) &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^m f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=m+1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \Sigma(f; a, b; \Delta'; \Xi') + \Sigma(f; b, c; \Delta''; \Xi''). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $\text{πλάτος}(\Delta') \leq \text{πλάτος}(\Delta)$ και $\text{πλάτος}(\Delta'') \leq \text{πλάτος}(\Delta)$. Συνεπάγεται ότι όταν $\text{πλάτος}(\Delta) \rightarrow 0$, τότε $\text{πλάτος}(\Delta') \rightarrow 0$ και $\text{πλάτος}(\Delta'') \rightarrow 0$. Άρα, επειδή η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και στο $[b, c]$, έχουμε ότι

$$\lim_{\text{πλάτος}(\Delta) \rightarrow 0} \Sigma(f; a, c; \Delta; \Xi) = \int_a^b f(x) dx, \quad \lim_{\text{πλάτος}(\Delta) \rightarrow 0} \Sigma(f; b, c; \Delta''; \Xi'') = \int_b^c f(x) dx.$$

Συνεπάγεται

$$\begin{aligned} \lim_{\text{πλάτος}(\Delta) \rightarrow 0} \Sigma(f; a, c; \Delta; \Xi) &= \lim_{\text{πλάτος}(\Delta) \rightarrow 0} \Sigma(f; a, b; \Delta'; \Xi') + \lim_{\text{πλάτος}(\Delta) \rightarrow 0} \Sigma(f; b, c; \Delta''; \Xi'') \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx. \end{aligned}$$

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε όταν $\text{πλάτος}(\Delta) \rightarrow 0$ και η διαμέριση Δ δεν περιέχει το b ως διαιρετικό σημείο. Αυτό, όμως, θα αποφύγουμε να το αποδείξουμε, διότι παρουσιάζει τεχνικές δυσκολίες οι οποίες δεν έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον⁶.

Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, c]$ και $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$. □

Έστω ότι ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, c]$. Αν A, B, C είναι οι επιφάνειες ανάμεσα στο γράφημα της f και στα διαστήματα $[a, b]$, $[b, c]$, $[a, c]$, αντιστοίχως, τότε η C είναι η ένωση των A και B , ενώ η τομή των A, B είναι το κατακόρυφο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $(b, 0)$ και $(b, f(b))$. Επειδή το ευθύγραμμο τμήμα έχει εμβαδόν 0, το εμβαδόν της C είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των A, B . Αυτό είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο της Πρότασης 7.7.

Προφανώς, το αποτέλεσμα της Πρότασης 7.7 γενικεύεται για οποιονδήποτε αριθμό διαδοχικών διαστημάτων. Δηλαδή, αν η f είναι ολοκληρώσιμη σε καθένα από τα διαδοχικά διαστήματα $[t_1, t_2], \dots, [t_{m-1}, t_m]$, τότε είναι ολοκληρώσιμη και στο συνολικό διάστημα $[t_1, t_m]$ και

$$\int_{t_1}^{t_m} f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} f(x) dx + \dots + \int_{t_{m-1}}^{t_m} f(x) dx. \quad (7.2)$$

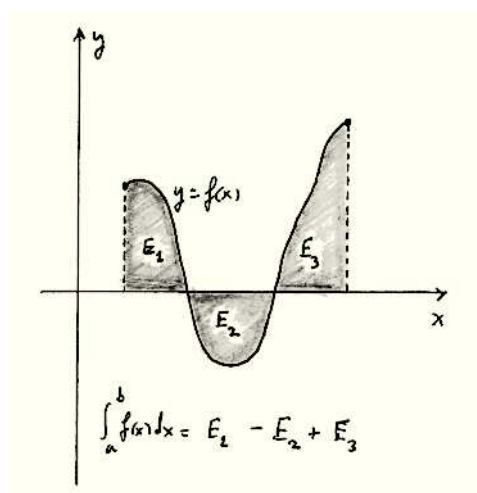
⁵Δείτε τις σημειώσεις «Ανάλυση» [1].

⁶Για την πλήρη απόδειξη δείτε τις σημειώσεις «Ανάλυση» [1].

Ειδικότερα, ας δούμε μία ακόμη σχέση ανάμεσα σε ολοκληρώματα και σε εμβαδά. Έστω ότι το $[a, b]$ μπορεί να χωριστεί σε πεπερασμένους πλήθους υποδιαστήματα $[t_1, t_2], \dots, [t_{m-1}, t_m]$ με $t_1 = a$ και $t_m = b$, σε καθένα από τα οποία η f είναι είτε μόνο ≥ 0 είτε μόνο ≤ 0 . Καθένα από τα $[t_{k-1}, t_k]$ ορίζει την αντίστοιχη επιφάνεια ανάμεσα σε αυτό και στο γράφημα της f η οποία έχει εμβαδόν E_k . Γνωρίζουμε ότι, αν $f \geq 0$ στο $[t_{k-1}, t_k]$, τότε $\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x) dx = E_k$, και, αν $f \leq 0$ στο $[t_{k-1}, t_k]$, τότε $\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x) dx = -E_k$. Επομένως, από την (7.2) συμπεραίνουμε ότι:

Το $\int_a^b f(x) dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των επιφανειών ανάμεσα στον x -άξονα και στο γράφημα της f οι οποίες αντιστοιχούν σε υποδιαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι ≥ 0 πλην το άθροισμα των εμβαδών των επιφανειών οι οποίες αντιστοιχούν σε υποδιαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι ≤ 0 .

Παρατηρήστε το σχήμα 7.3.



Σχήμα 7.3

Θα δούμε τώρα μία άμεση εφαρμογή της Πρότασης 7.7, αφού πρώτα ορίσουμε μία κατηγορία συναρτήσεων ευρύτερη της κατηγορίας των συνεχών συναρτήσεων.

Ορισμός 7.2. Η $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ χαρακτηρίζεται **τμηματικά συνεχής** στο $[a, b]$, αν υπάρχουν διαδοχικά σημεία $t_0 = a, t_1, \dots, t_{m-1}, t_m = b$, ώστε η f να είναι συνεχής σε καθένα από τα διαδοχικά ανοικτά διαστήματα $(t_0, t_1), \dots, (t_{m-1}, t_m)$, ώστε να υπάρχουν τα πλευρικά όρια της f σε καθένα από τα $t_0, t_1, \dots, t_{m-1}, t_m$ και ώστε αυτά τα πλευρικά όρια να είναι όλα αριθμοί.

Πρόταση 7.8. Αν η $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι τμηματικά συνεχής στο $[a, b]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι τμηματικά συνεχής στο $[a, b]$, οπότε ικανοποιεί τις υποθέσεις του παραπάνω ορισμού. Βάσει της Πρότασης 7.7 είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $[t_{k-1}, t_k]$. Ορίζουμε την $g : [t_{k-1}, t_k] \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε $g(x) = f(x)$ για κάθε $x \in (t_{k-1}, t_k)$ και ώστε

$$g(t_{k-1}) = \lim_{x \rightarrow t_{k-1}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow t_{k-1}^+} g(x), \quad g(t_k) = \lim_{x \rightarrow t_k^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow t_k^-} g(x).$$

Τότε η g είναι συνεχής στο $[t_{k-1}, t_k]$ και διαφέρει από την f το πολύ σε δύο σημεία: στα άκρα t_{k-1} και t_k . Η g , ως συνεχής, είναι ολοκληρώσιμη στο $[t_{k-1}, t_k]$, οπότε και η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[t_{k-1}, t_k]$. $\square$

Παράδειγμα 7.10. Έστω **τμηματικά σταθερή** $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Δηλαδή, υπάρχουν διαδοχικά σημεία $t_0 = a, t_1, \dots, t_{m-1}, t_m = b$, ώστε η f να είναι σταθερή σε καθένα από τα διαδοχικά ανοικτά

υποδιαστήματα $(t_0, t_1), \dots, (t_{m-1}, t_m)$. Έστω λ_k η σταθερή τιμή της f στο αντίστοιχο (t_{k-1}, t_k) . Οι τιμές της f στα σημεία $t_0, \dots, t_m$ δεν έχουν καμία σημασία. Η f είναι, προφανώς, τμηματικά συνεχής στο $[a, b]$, οπότε είναι ολοκληρώσιμη, και τώρα θα υπολογίσουμε το $\int_a^b f(x) dx$. Επειδή η f σε κάθε $[t_{k-1}, t_k]$ είναι σταθερή λ_k , εκτός σε δύο το πολύ σημεία, τα άκρα του διαστήματος, συνεπάγεται

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x) dx = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \lambda_k dx = \lambda_k(t_k - t_{k-1}).$$

Άρα

$$\int_a^b f(x) dx = \lambda_1(t_1 - t_0) + \dots + \lambda_m(t_m - t_{m-1}) = \sum_{k=1}^m \lambda_k(t_k - t_{k-1}).$$

Ασκήσεις

7.7. Υπολογίστε το $\int_{-2}^{\frac{7}{2}} [x] dx$.

Υπόδειξη: Η $[x]$ είναι τμηματικά σταθερή.

Είναι το ολοκλήρωμα ίσο με το εμβαδόν της επιφάνειας ανάμεσα στο γράφημα της $[x]$ και στο διάστημα $[-2, \frac{7}{2}]$; Ποια είναι η σχέση του ολοκληρώματος με εμβαδά σε αυτήν την περίπτωση;

7.8. Υπολογίστε το $\int_{-3}^4 x dx$.

Είναι το ολοκλήρωμα ίσο με το εμβαδόν της επιφάνειας ανάμεσα στο γράφημα της x και στο διάστημα $[-3, 4]$; Ποια είναι η σχέση του ολοκληρώματος με εμβαδά σε αυτήν την περίπτωση;

Μήπως το εμβαδόν της επιφάνειας ανάμεσα στο γράφημα της x και στο διάστημα $[-3, 4]$ είναι ίσο με το $\int_{-3}^4 |x| dx = \int_{-3}^0 (-x) dx + \int_0^4 x dx$;

7.9. Υπολογίστε το $\int_{-1}^5 f(x) dx$ για την τμηματικά συνεχή $f(x) = \begin{cases} x+5, & \text{αν } -1 \leq x < 0, \\ 2x, & \text{αν } 0 \leq x \leq 2, \\ x-1, & \text{αν } 2 < x \leq 5. \end{cases}$

7.6 Ολοκληρώματα και ανισότητες

Πρόταση 7.9. Έστω ότι οι $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$. Αν ισχύει $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Αν, επιπλέον, $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$, τότε ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ το οποίο είναι κοινό σημείο συνέχειας των δύο συναρτήσεων. Ειδικότερα, αν, επιπλέον, $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$ και οι f, g είναι συνεχείς στο $[a, b]$, τότε ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Απόδειξη. Θεωρούμε οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ του $[a, b]$ και οποιοδήποτε αντίστοιχο σύνολο ενδιάμεσων σημείων $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$. Τότε

$$\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n g(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \Sigma(g; a, b; \Delta; \Xi).$$

Τώρα, επειδή οι f, g είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$, έχουμε ότι

$$\lim_{\text{πλάτος}(\Delta) \rightarrow 0} \Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) = \int_a^b f(x) dx, \quad \lim_{\text{πλάτος}(\Delta) \rightarrow 0} \Sigma(g; a, b; \Delta; \Xi) = \int_a^b g(x) dx.$$

Άρα $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Τώρα, έστω $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$ και έστω $\xi \in [a, b]$ οποιοδήποτε κοινό σημείο συνέχειας των f, g . Υποθέτουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι $f(\xi) < g(\xi)$. Επειδή η $g - f$ είναι συνεχής

στο ξ , υπάρχει υποδιάστημα $[c, d]$ του $[a, b]$, με $c < d$, το οποίο περιέχει το ξ και ώστε να ισχύει $g(x) - f(x) > \frac{g(\xi) - f(\xi)}{2}$ για κάθε $x \in [c, d]$. Επίσης, στα υποδιαστήματα $[a, c]$ και $[d, b]$ ισχύει $g(x) - f(x) \geq 0$. Τότε

$$\begin{aligned} \int_a^b (g(x) - f(x)) dx &= \int_a^c (g(x) - f(x)) dx + \int_c^d (g(x) - f(x)) dx + \int_d^b (g(x) - f(x)) dx \\ &\geq \int_a^c 0 dx + \int_c^d \frac{g(\xi) - f(\xi)}{2} dx + \int_d^b 0 dx = \frac{g(\xi) - f(\xi)}{2}(d - c) > 0, \end{aligned}$$

οπότε $\int_a^b g(x) dx > \int_a^b f(x) dx$ και καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $f(\xi) = g(\xi)$. $\square$

Έστω ότι ισχύει $0 \leq f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αν A και B είναι οι επιφάνειες ανάμεσα στο $[a, b]$ και στα γραφήματα των f και g , αντιστοίχως, τότε η A είναι υποσύνολο της B . Η Πρόταση 7.9 λέει ότι το εμβαδόν της A δεν υπερβαίνει το εμβαδόν της B .

Πρόταση 7.10. Έστω ότι η $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

(i) Αν το u είναι άνω φράγμα της f στο $[a, b]$, δηλαδή αν ισχύει $f(x) \leq u$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε $\int_a^b f(x) dx \leq (b - a)u$.

Αν, επιπλέον, $\int_a^b f(x) dx = (b - a)u$, τότε ισχύει $f(x) = u$ για κάθε $x \in [a, b]$ το οποίο είναι σημείο συνέχειας της f . Ειδικότερα, αν, επιπλέον, $\int_a^b f(x) dx = (b - a)u$ και η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε ισχύει $f(x) = u$ για κάθε $x \in [a, b]$.

(ii) Αν το l είναι κάτω φράγμα της f στο $[a, b]$, δηλαδή αν ισχύει $f(x) \geq l$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε $\int_a^b f(x) dx \geq (b - a)l$.

Αν, επιπλέον, $\int_a^b f(x) dx = (b - a)l$, τότε ισχύει $f(x) = l$ για κάθε $x \in [a, b]$ το οποίο είναι σημείο συνέχειας της f . Ειδικότερα, αν, επιπλέον, $\int_a^b f(x) dx = (b - a)l$ και η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε ισχύει $f(x) = l$ για κάθε $x \in [a, b]$.

(iii) Αν ισχύει $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε $|\int_a^b f(x) dx| \leq M(b - a)$.

Απόδειξη. (i), (ii) Θεωρούμε τις σταθερές συναρτήσεις $h(x) = l$ και $g(x) = u$ για κάθε $x \in [a, b]$ και εφαρμόζουμε την Πρόταση 7.9, χρησιμοποιώντας το ότι $\int_a^b h(x) dx = \int_a^b l dx = (b - a)l$ και $\int_a^b g(x) dx = \int_a^b u dx = (b - a)u$, καθώς και το ότι $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$.
(iii) Από την $|f(x)| \leq M$ συνεπάγεται $-M \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [a, b]$. Άρα από τα (i), (ii) έχουμε ότι

$$-M(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a),$$

οπότε $|\int_a^b f(x) dx| \leq M(b - a)$. $\square$

Παράδειγμα 7.11. Η $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, \sqrt{2}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\sqrt{2}, 4]$, διότι $f'(x) > 0$ στο $(1, \sqrt{2})$ και $f'(x) < 0$ στο $(\sqrt{2}, 4)$. Άρα η μέγιστη τιμή της f στο διάστημα $[1, 4]$ είναι η $f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Επομένως,

$$\int_1^4 \frac{x}{x^2+2} dx \leq \frac{\sqrt{2}}{4}(4 - 1) = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Μάλιστα, επειδή η f είναι συνεχής στο $[1, 4]$ και επειδή, προφανώς, δεν ταυτίζεται στο $[1, 4]$ με τη μέγιστη τιμή της $\frac{\sqrt{2}}{4}$, συμπεραίνουμε ότι ισχύει η γνήσια ανισότητα

$$\int_1^4 \frac{x}{x^2+2} dx < \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Έστω ότι ισχύει $0 \leq l \leq f(x) \leq u$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αν A είναι η επιφάνεια ανάμεσα στο γράφημα της f και στο $[a, b]$ και αν B, C είναι τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με βάση το $[a, b]$ και ύψη l, u , αντιστοίχως, τότε η A περιέχει το B και περιέχεται στο C . Η Πρόταση 7.10

επιβεβαιώνει ότι το εμβαδόν της A δεν είναι μικρότερο από το εμβαδόν του B ούτε μεγαλύτερο από το εμβαδόν του C .

Πρόταση 7.11. Έστω ότι η $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Τότε η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Μερική απόδειξη. Δεν θα αποδείξουμε στο παρόν σύγγραμμα ότι η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ ⁷. Αν, όμως, το αποδεχτούμε, τότε από την $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ για κάθε $x \in [a, b]$ και από την Πρόταση 7.9 προκύπτει

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

$$\text{οπότε } \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad \square$$

Η ανισότητα της Πρότασης 7.11 ονομάζεται **τριγωνική ανισότητα** για ολοκληρώματα.

Παράδειγμα 7.12. Από την $|\sin x| \leq 1$ για κάθε x έχουμε, για οποιοδήποτε $x > 0$, ότι

$$\left| \int_0^x \sin t dt \right| \leq \int_0^x |\sin t| dt \leq \int_0^x 1 dt = x.$$

Επίσης, από την $|\sin x| \leq |x|$ για κάθε x έχουμε, για $x > 0$, ότι

$$\left| \int_0^x \sin t dt \right| \leq \int_0^x |\sin t| dt \leq \int_0^x |t| dt = \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2}.$$

$$\text{Άρα } \left| \int_0^x \sin t dt \right| \leq \min \left\{ x, \frac{x^2}{2} \right\} = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & \text{αν } 0 < x \leq 2, \\ x, & \text{αν } x \geq 2. \end{cases}$$

Ασκήσεις

7.10. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και έστω ότι ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αποδείξτε ότι $0 \leq \int_c^d f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$ για κάθε υποδιάστημα $[c, d]$ του $[a, b]$.

7.11. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Αν $\int_a^b f(x)^2 dx = 0$, αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ το οποίο είναι σημείο συνέχειας της f . Ειδικότερα, αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $\int_a^b f(x)^2 dx = 0$, αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

7.12. Χωρίς να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα, αποδείξτε ότι:

(i) $xe^{-2x} \leq \int_x^{2x} e^{-t} dt \leq xe^{-x}$ για κάθε $x > 0$.

(ii) $3e^{-2} \leq \int_{\frac{1}{2}}^2 xe^{-x} dx \leq \frac{3}{2}e^{-1}$.

7.13. Αποδείξτε ότι $0 \leq \frac{x}{1-x+x^2} \leq \frac{4x}{3}$ για κάθε $x \in [0, 1]$, καθώς και ότι $0 \leq \frac{x}{1-x+x^2} \leq \frac{4}{3x}$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$. Χωρίς να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα, να συμπεράνετε ότι:

(i) $0 \leq \int_0^x \frac{t}{1-t+t^2} dt \leq \frac{2x^2}{3}$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

(ii) $0 \leq \int_0^x \frac{t}{1-t+t^2} dt \leq \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \log x$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$. Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της άσκησης 7.2.

7.14. Αποδείξτε ότι $\int_0^\pi \sin^{n+1} x dx \leq \int_0^\pi \sin^n x dx$ και $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+1} x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ χωρίς να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα.

⁷Για την πλήρη απόδειξη δείτε τις σημειώσεις «Ανάλυση» [1].

7.15. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+\sqrt{x}} \frac{t}{1+t^2} dt = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0+} \int_{1-x}^{1+x} \frac{t}{1+t^2} dt = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{2x} \int_{1-x}^{1+x} \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{1}{2}$ χωρίς να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα.

Υπόδειξη: Υπολογίστε τις ελάχιστες και τις μέγιστες τιμές των συναρτήσεων στα διαστήματα.

7.16. Έστω ότι ισχύει $|f(x_2) - f(x_1)| \leq M|x_2 - x_1|$ για κάθε $x_1 \in [0, 1]$, $x_2 \in [0, 1]$.

(i) Αποδείξτε ότι $\left| \int_a^b f(x) dx - (b-a)f(b) \right| \leq M \frac{(b-a)^2}{2}$ για κάθε υποδιάστημα $[a, b]$ του $[0, 1]$.

Υπόδειξη: Γράψτε $(b-a)f(b) = \int_a^b f(b) dx$ και συνδυάστε τα δύο ολοκληρώματα σε ένα.

(ii) Αποδείξτε ότι $\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη: Θεωρήστε διαμέριση του $[0, 1]$ σε n υποδιαστήματα ίδιου μήκους και σε καθένα από αυτά εφαρμόστε το αποτέλεσμα του (i).

7.17. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$. Αποδείξτε ότι για κάθε t, s ισχύει

$$t^2 \int_a^b f^2(x) dx + 2ts \int_a^b f(x)g(x) dx + s^2 \int_a^b g^2(x) dx = \int_a^b (tf(x) + sg(x))^2 dx \geq 0.$$

Με βάση αυτό και μία πολύ απλή ιδιότητα των τριωνύμων $at^2 + bt + c$, αποδείξτε την **πολύ σημαντική ανισότητα του Schwarz**:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx.$$

7.18. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$.

(i) Αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{2} \int_a^b \left(\int_a^b (f(y) - f(x))(g(y) - g(x)) dy \right) dx = (b-a) \int_a^b f(x)g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx.$$

(ii) Αν οι f, g είναι είτε και οι δύο αύξουσες είτε και οι δύο φθίνουσες στο $[a, b]$, αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

(iii) Αν η μία από τις f, g είναι αύξουσα στο $[a, b]$ και η άλλη φθίνουσα στο $[a, b]$, αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

7.19. Έστω διάστημα I , συνεχής και κυρτή $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ και συνεχής $g : [a, b] \rightarrow I$. Αποδείξτε την **ανισότητα Jensen**:

$$f\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(g(x)) dx.$$

Υπόδειξη: Πάρτε οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ του $[a, b]$ και αντίστοιχη συλλογή $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων. Εφαρμόστε την ανισότητα της άσκησης 6.111(i) με $\mu_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{b-a}$ και $x_k = g(\xi_k)$. Παρατηρήστε ότι ο αριθμός $\frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx$ ανήκει στο I . Τέλος, θεωρήστε ότι το πλάτος (Δ) τείνει στο 0.

Πώς θα γίνει η παραπάνω ανισότητα, αν η f είναι *κοίλη* στο I ;

Αποδείξτε τις ανισότητες:

(i) $e^{\frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx} \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{g(x)} dx.$

(ii) $\log\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx\right) \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b \log g(x) dx$, αν $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

(iii) $\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx\right)^p \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)^p dx$, αν $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ και $p \geq 1$ ή $p \leq 0$.

(iv) $\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx\right)^p \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)^p dx$, αν $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ και $0 \leq p \leq 1$.

7.7 Προσεγγιστικός υπολογισμός ολοκληρώματος

Στην ενότητα αυτή θα δούμε μερικές μεθόδους προσεγγιστικού υπολογισμού ολοκληρωμάτων.

Έστω f ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, b]$. Διαμερίζουμε το $[a, b]$ σε n διαστήματα ίδιου μήκους με τα γνωστά διαιρετικά σημεία

$$x_k = a + k \frac{b-a}{n} \quad \text{για } 0 \leq k \leq n.$$

Φυσικά, κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ έχει μήκος $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$. Σε κάθε $[x_{k-1}, x_k]$ θεωρούμε και το αντίστοιχο μέσο του, το $\frac{x_{k-1}+x_k}{2}$, το οποίο συμβολίζουμε

$$x_{\frac{2k-1}{2}} = \frac{x_{k-1}+x_k}{2} = a + \frac{2k-1}{2} \frac{b-a}{n}.$$

Έχουμε, λοιπόν, τα διαδοχικά σημεία

$$x_0, x_{\frac{1}{2}}, x_1, \dots, x_{k-1}, x_{\frac{2k-1}{2}}, x_k, \dots, x_{n-1}, x_{\frac{2n-1}{2}}, x_n,$$

και υπολογίζουμε τις αντίστοιχες τιμές $y_i = f(x_i)$ της f σε όλα αυτά τα σημεία:

$$y_0, y_{\frac{1}{2}}, y_1, \dots, y_{k-1}, y_{\frac{2k-1}{2}}, y_k, \dots, y_{n-1}, y_{\frac{2n-1}{2}}, y_n.$$

Όλες οι μέθοδοι τις οποίες θα αναπτύξουμε προσεγγίζουν το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x) dx$ με κάποιες συγκεκριμένες απλές παραστάσεις των παραπάνω τιμών της f και, συγχρόνως, παρέχουν αντίστοιχες εκτιμήσεις για τα σφάλματα των προσεγγίσεων. Η ουσία όλων αυτών των μεθόδων είναι η προσέγγιση της f σε κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ με κατάλληλη πολυωνυμική συνάρτηση και η συνεπαγόμενη προσέγγιση του $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx$ με το αντίστοιχο ολοκλήρωμα της πολυωνυμικής συνάρτησης. Κάθε μέθοδος χρησιμοποιεί τον δικό της τύπο πολυωνυμικής συνάρτησης, τον ίδιο σε κάθε υποδιάστημα: η μέθοδος των ορθογωνίων χρησιμοποιεί σταθερές συναρτήσεις, η μέθοδος των τραπεζίων και η μέθοδος των εφαπτομένων χρησιμοποιούν πολυώνυμα πρώτου βαθμού και, τέλος, η μέθοδος του Simpson χρησιμοποιεί πολυώνυμα τρίτου βαθμού σε κάθε υποδιάστημα.

Όσο μεγαλύτερο είναι το πλήθος n των υποδιαστημάτων του $[a, b]$ τόσο καλύτερη είναι η προσέγγιση του ολοκληρώματος $\int_a^b f(x) dx$, δηλαδή τόσο μικρότερο είναι το σφάλμα το οποίο κάνουμε προσεγγίζοντας το ολοκλήρωμα με την παράσταση η οποία προκύπτει από την αντίστοιχη μέθοδο. Κάθε μέθοδος δίνει μία εκτίμηση για το σφάλμα, η οποία έχει τη μορφή

$$|\text{σφάλμα}| \leq c \frac{(b-a)^{m+2} M_{m+1}}{n^{m+1}} = c(b-a) M_{m+1} h_n^{m+1},$$

όπου $h_n = \frac{b-a}{n}$ είναι το κοινό μήκος των υποδιαστημάτων, c είναι κάποιος συγκεκριμένος αριθμός, m είναι ο βαθμός των πολυωνύμων τα οποία χρησιμοποιούνται από τη μέθοδο και M_{m+1} είναι ένα φράγμα της παραγώγου τάξης $m+1$ της f στο διάστημα $[a, b]$. Είναι φανερό ότι το σφάλμα συγκλίνει στο 0 όταν $n \rightarrow +\infty$ ή, ισοδύναμα, όταν $h_n = \frac{b-a}{n} \rightarrow 0$. Είναι, επίσης, φανερό, λόγω της αντίστοιχης τιμής του εκθέτη $m+1$ στο h_n^{m+1} , ότι τα μεγαλύτερα σφάλματα προκύπτουν από τη μέθοδο των ορθογωνίων, τα μικρότερα από τη μέθοδο του Simpson και ότι από τις άλλες δύο μεθόδους προκύπτουν ενδιάμεσα σφάλματα. Βέβαια, αυτή η ιεράρχηση των μεθόδων αντισταθμίζεται, εν μέρει, από τον αριθμό των παραγώγων της f τις οποίες η κάθε μέθοδος χρησιμοποιεί.

A. Η μέθοδος των ορθογωνίων

Λήμμα 7.1. Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και ότι ισχύει $|f'(x)| \leq M_1$ για κάθε $x \in [a, b]$. Τότε

$$\left| \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \right| \leq \frac{(b-a)^2 M_1}{4}.$$

Απόδειξη. Προσεγγίζουμε την f με τη σταθερή συνάρτηση, δηλαδή πολωνυμική συνάρτηση βαθμού 0, $p(x) = f(\frac{a+b}{2})$. Αυτό γίνεται ως εξής. Για κάθε $x \in [a, b]$ υπάρχει ξ ανάμεσα στα x και $\frac{a+b}{2}$ ώστε

$$f(x) - p(x) = f(x) - f(\frac{a+b}{2}) = f'(\xi)(x - \frac{a+b}{2}).$$

Άρα $|f(x) - p(x)| \leq M_1 |x - \frac{a+b}{2}|$ για κάθε $x \in [a, b]$. Επειδή $\int_a^b p(x) dx = f(\frac{a+b}{2})(b-a)$, έχουμε

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - f(\frac{a+b}{2})(b-a) \right| &= \left| \int_a^b (f(x) - p(x)) dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - p(x)| dx \\ &\leq M_1 \int_a^b |x - \frac{a+b}{2}| dx = \frac{(b-a)^2 M_1}{4}. \end{aligned}$$

□

Πρόταση 7.12. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και αν ισχύει $|f'(x)| \leq M_1$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε

$$\int_a^b f(x) dx \approx (y_{\frac{1}{2}} + \dots + y_{\frac{2n-1}{2}}) \frac{b-a}{n}.$$

Για το σφάλμα της προσέγγισης αυτής ισχύει: $|\sigma\acute{\sigma}\alpha\lambda\mu\alpha| \leq \frac{1}{4} \frac{(b-a)^2 M_1}{n}$.

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 7.1 σε κάθε $[x_{k-1}, x_k]$, βρίσκουμε

$$\left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx - y_{\frac{2k-1}{2}} \frac{b-a}{n} \right| \leq \frac{(b-a)^2 M_1}{4n^2}.$$

Από την ισότητα $\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx$ και από την τριγωνική ανισότητα των απόλυτων τιμών βρίσκουμε

$$\left| \int_a^b f(x) dx - (y_{\frac{1}{2}} + \dots + y_{\frac{2n-1}{2}}) \frac{b-a}{n} \right| \leq n \frac{(b-a)^2 M_1}{4n^2} = \frac{(b-a)^2 M_1}{4n}.$$

□

B. Η μέθοδος των τραπεζίων

Λήμμα 7.2. Έστω ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και ότι ισχύει $|f''(x)| \leq M_2$ για κάθε $x \in [a, b]$. Τότε

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \right| \leq \frac{(b-a)^3 M_2}{12}.$$

Απόδειξη. Προσεγγίζουμε την f με την πολωνυμική συνάρτηση βαθμού 1 η οποία ταυτίζεται με την f στα άκρα του $[a, b]$. Ο τύπος της συνάρτησης αυτής είναι $p(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ και η προσέγγιση γίνεται ως εξής. Για κάθε $x \in (a, b)$ προσδιορίζουμε τον αριθμό c από την ισότητα $f(x) - p(x) = c(x-a)(x-b)$. Ορίζουμε την

$$g(t) = f(t) - p(t) - c(t-a)(t-b)$$

για $t \in [a, b]$. Τότε $g(a) = g(x) = g(b) = 0$, οπότε υπάρχουν $\xi \in (a, x)$ και $\eta \in (x, b)$, ώστε $g'(\xi) = g'(\eta) = 0$. Άρα υπάρχει $\zeta \in (\xi, \eta)$, οπότε $\zeta \in (a, b)$, ώστε $g''(\zeta) = 0$. Όμως, $g''(t) = f''(t) - 2c$, οπότε $c = \frac{f''(\zeta)}{2}$. Έχουμε, λοιπόν, ότι για κάθε $x \in (a, b)$ υπάρχει $\zeta \in (a, b)$, ώστε

$$f(x) - p(x) = \frac{f''(\zeta)}{2}(x-a)(x-b).$$

Άρα για κάθε $x \in (a, b)$ ισχύει $|f(x) - p(x)| \leq \frac{M_2}{2}(x-a)(b-x)$. Αυτή η ανισότητα ισχύει, φυσικά, και για $x = a$ και $x = b$. Επειδή $\int_a^b p(x) dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$, έχουμε

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \right| &= \left| \int_a^b (f(x) - p(x)) dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - p(x)| dx \\ &\leq \frac{M_2}{2} \int_a^b (x-a)(b-x) dx = \frac{(b-a)^3 M_2}{12}. \end{aligned}$$

□

Πρόταση 7.13. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και αν ισχύει $|f''(x)| \leq M_2$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε

$$\int_a^b f(x) dx \approx \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + \cdots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right) \frac{b-a}{n}.$$

Για το σφάλμα της προσέγγισης αυτής ισχύει: $|\sigma\phi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha| \leq \frac{1}{12} \frac{(b-a)^3 M_2}{n^2}$.

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 7.2 σε κάθε $[x_{k-1}, x_k]$, βρίσκουμε

$$\left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx - \frac{y_{k-1} + y_k}{2} \frac{b-a}{n} \right| \leq \frac{(b-a)^3 M_2}{12n^3}.$$

Αθροίζοντας τα ολοκληρώματα σε όλα τα υποδιαστήματα και χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα των απόλυτων τιμών, βρίσκουμε

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \left(\frac{y_0 + y_1}{2} + \cdots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}\right) \frac{b-a}{n} \right| \leq n \frac{(b-a)^3 M_2}{12n^3} = \frac{(b-a)^3 M_2}{12n^2}.$$

□

Γ. Η μέθοδος των εφαπτομένων

Λήμμα 7.3. Έστω ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και ότι ισχύει $|f''(x)| \leq M_2$ για κάθε $x \in [a, b]$. Τότε

$$\left| \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \right| \leq \frac{(b-a)^3 M_2}{24}.$$

Απόδειξη. Τώρα προσεγγίζουμε την f με την πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού 1 η οποία ταυτίζεται με την f στο σημείο $\frac{a+b}{2}$ και έχει την ίδια παράγωγο με την f στο ίδιο σημείο. Η συνάρτηση αυτή έχει τύπο $p(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(x - \frac{a+b}{2})$ και η προσέγγιση γίνεται μέσω του τύπου του Taylor. Πράγματι, για κάθε $x \in [a, b]$ υπάρχει ξ ανάμεσα στα x και $\frac{a+b}{2}$ ώστε

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(x - \frac{a+b}{2}) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - \frac{a+b}{2})^2,$$

οπότε $|f(x) - p(x)| \leq \frac{M_2}{2}(x - \frac{a+b}{2})^2$. Επειδή $\int_a^b p(x) dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$, συνεπάγεται

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \right| &= \left| \int_a^b (f(x) - p(x)) dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - p(x)| dx \\ &\leq \frac{M_2}{2} \int_a^b (x - \frac{a+b}{2})^2 dx = \frac{(b-a)^3 M_2}{24}. \end{aligned}$$

□

Πρόταση 7.14. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και αν ισχύει $|f''(x)| \leq M_2$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε

$$\int_a^b f(x) dx \approx (y_{\frac{1}{2}} + \cdots + y_{\frac{2n-1}{2}}) \frac{b-a}{n}.$$

Για το σφάλμα της προσέγγισης αυτής ισχύει: $|\sigma\phi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha| \leq \frac{1}{24} \frac{(b-a)^3 M_2}{n^2}$.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 7.3 σε κάθε $[x_{k-1}, x_k]$ και βρίσκουμε

$$\left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx - y_{\frac{2k-1}{2}} \frac{b-a}{n} \right| \leq \frac{(b-a)^3 M_2}{24n^3}.$$

Τέλος, από την τριγωνική ανισότητα των απόλυτων τιμών έχουμε ότι

$$\left| \int_a^b f(x) dx - (y_{\frac{1}{2}} + \cdots + y_{\frac{2n-1}{2}}) \frac{b-a}{n} \right| \leq n \frac{(b-a)^3 M_2}{24n^3} = \frac{(b-a)^3 M_2}{24n^2}.$$

□

Δ. Η μέθοδος του Simpson

Λήμμα 7.4. Έστω ότι η f είναι τέσσερις φορές παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και ότι ισχύει $|f^{(4)}(x)| \leq M_4$ για κάθε $x \in [a, b]$. Τότε

$$\left| \int_a^b f(x) dx - (f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)) \frac{b-a}{6} \right| \leq \frac{(b-a)^5 M_4}{2880}.$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε την πολυωνυμική συνάρτηση τρίτου βαθμού η οποία ταυτίζεται με την f στα σημεία $a, \frac{a+b}{2}, b$, και η παράγωγός της στο $\frac{a+b}{2}$ ταυτίζεται με την παράγωγο της f στο ίδιο σημείο. Ο τύπος της είναι

$$p(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)(x-\frac{a+b}{2}) + c_3(x-a)(x-\frac{a+b}{2})(x-b),$$

όπου οι αριθμοί c_0, c_1, c_2, c_3 υπολογίζονται διαδοχικά από τις ισότητες

$$c_0 = f(a), \quad c_0 + c_1(\frac{a+b}{2} - a) = f(\frac{a+b}{2}), \quad c_0 + c_1(b-a) + c_2(b-a)(b-\frac{a+b}{2}) = f(b),$$

$$c_1 + c_2(\frac{a+b}{2} - a) + c_3(\frac{a+b}{2} - a)(\frac{a+b}{2} - b) = f'(\frac{a+b}{2}).$$

Τώρα προσεγγίζουμε την f με την p ως εξής. Θεωρούμε $x \in (a, b)$, $x \neq \frac{a+b}{2}$ και ορίζουμε τον αριθμό c μέσω της

$$f(x) - p(x) = c(x-a)(x-\frac{a+b}{2})^2(x-b).$$

Ορίζουμε την

$$g(t) = f(t) - p(t) - c(t-a)(t-\frac{a+b}{2})^2(t-b)$$

για $t \in [a, b]$. Τότε $g(a) = g(\frac{a+b}{2}) = g(b) = 0$ και $g'(\frac{a+b}{2}) = 0$. Επομένως, αν $a < x < \frac{a+b}{2}$, τότε υπάρχουν $\xi \in (a, x)$, $\eta \in (x, \frac{a+b}{2})$ και $\zeta \in (\frac{a+b}{2}, b)$ ώστε $g'(\xi) = g'(\eta) = g'(\zeta) = 0$. Αυτά μαζί με την $g'(\frac{a+b}{2}) = 0$ συνεπάγονται ότι υπάρχουν $\kappa \in (\xi, \eta)$, $\lambda \in (\eta, \frac{a+b}{2})$ και $\mu \in (\frac{a+b}{2}, \zeta)$ ώστε $g''(\kappa) = g''(\lambda) = g''(\mu) = 0$. Άρα υπάρχουν $\nu \in (\kappa, \lambda)$ και $\rho \in (\lambda, \mu)$ ώστε $g^{(3)}(\nu) = g^{(3)}(\rho) = 0$. Τέλος (!), υπάρχει $\sigma \in (\nu, \rho)$ ώστε $g^{(4)}(\sigma) = 0$. Όμως, ένας απλός υπολογισμός δίνει ότι $g^{(4)}(\sigma) = f^{(4)}(\sigma) - 24c$, οπότε $c = \frac{f^{(4)}(\sigma)}{24}$.

Τα ίδια ακριβώς ισχύουν, αν $\frac{a+b}{2} < x < b$ και συμπεραίνουμε ότι για κάθε $x \in (a, b)$, $x \neq \frac{a+b}{2}$, υπάρχει $\sigma \in (a, b)$ ώστε

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\sigma)}{24}(x-a)(x-\frac{a+b}{2})^2(x-b),$$

οπότε

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{M_4}{24}(x-a)(x-\frac{a+b}{2})^2(b-x).$$

Αυτό ισχύει και για $x = a$, $x = \frac{a+b}{2}$, $x = b$. Με λίγες (;;;) πράξεις βρίσκουμε ότι

$$\int_a^b p(x) dx = \frac{f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)}{6}(b-a).$$

Μελετήστε και την άσκηση 7.20. Επομένως,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - \frac{f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)}{6}(b-a) \right| &= \left| \int_a^b (f(x) - p(x)) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) - p(x)| dx \leq \frac{M_4}{24} \int_a^b (x-a)(x-\frac{a+b}{2})^2(b-x) dx = \frac{(b-a)^5 M_4}{2880}. \end{aligned}$$

□

Πρόταση 7.15. Αν η f είναι τέσσερις φορές παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και αν ισχύει $|f^{(4)}(x)| \leq M_4$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{y_0 + y_n + 2(y_1 + \dots + y_{n-1}) + 4(y_{\frac{1}{2}} + \dots + y_{\frac{2n-1}{2}})}{6} \frac{b-a}{n}.$$

Για το σφάλμα της προσέγγισης αυτής ισχύει: $|\sigmaφάλμα| \leq \frac{1}{2880} \frac{(b-a)^5 M_4}{n^4}$.

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Λήμμα 7.4, σε κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ είναι

$$\left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx - \frac{y_{k-1} + 4y_{\frac{2k-1}{2}} + y_k}{6} \frac{b-a}{n} \right| \leq \frac{(b-a)^5 M_4}{2880n^5}.$$

Προσθέτοντας και χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα, έχουμε

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \left(\frac{y_0 + 4y_{\frac{1}{2}} + y_1}{6} + \cdots + \frac{y_{n-1} + 4y_{\frac{2n-1}{2}} + y_n}{6} \right) \frac{b-a}{n} \right| \leq n \frac{(b-a)^5 M_4}{2880n^5} = \frac{(b-a)^5 M_4}{2880n^4}.$$

□

Ασκήσεις

7.20. Αποδείξτε ότι $\int_a^b p(x) dx = (p(a) + 4p(\frac{a+b}{2}) + p(b)) \frac{b-a}{6}$ για κάθε πολυωνυμική συνάρτηση p βαθμού ≤ 3 .

7.21. (i) Προσεγγίστε το $\log 2$ με ακρίβεια έως και πέμπτου δεκαδικού ψηφίου, χρησιμοποιώντας την ισότητα $\log 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$ και τις τέσσερις προσεγγιστικές μεθόδους. Η ισότητα αυτή βρίσκεται στην άσκηση 7.2, αλλά θα την αποδείξουμε στο επόμενο κεφάλαιο ως εφαρμογή του Θεμελιώδους Θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού.

(ii) Προσεγγίστε το π με ακρίβεια έως και πέμπτου δεκαδικού ψηφίου, χρησιμοποιώντας την ισότητα $\pi = 4 \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx$ και τις τέσσερις προσεγγιστικές μεθόδους. Κι αυτή η ισότητα θα αποδειχθεί στο επόμενο κεφάλαιο ως εφαρμογή του Θεμελιώδους Θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού.

7.8 Βιβλιογραφία

Βασική βιβλιογραφία

- Anton, H. (1984). *Calculus with Analytic Geometry*. Wiley.
 Apostol, T. (1967). *Calculus, Vol I*. Wiley.
 Courant, R. (1988). *Differential and Integral Calculus, Vol I*. Wiley.
 Courant, R., John, F. (1989). *Introduction to Calculus and Analysis, Vol I*. Springer.
 Goursat, E. (2006). *A Course in Mathematical Analysis, Vol I*. Dover.
 Landau, E. (2001). *Differential and Integral Calculus*. American Math. Society & Chelsea.
 Smirnov, V. I. (1964). *A Course of Higher Mathematics, Vol I*. Pergamon Press.
 Spiegel, M. (1963). *Schaum's Outline of Advanced Calculus*. McGraw Hill.
 Thomas, G. (2018). *Calculus*. Pearson.
 Toeplitz, O. (2007). *The Calculus, A Genetic Approach*. The University of Chicago Press.

Εξειδικευμένη βιβλιογραφία

- Beckenbach, E., Bellman, R. (1961). *Inequalities*. Springer.
 Hardy, G., Littlewood, J., Polya, G. (1952). *Inequalities*. Cambridge Univ. Press.
 Mitrinović, D. (1964). *Elementary Inequalities*. Noordhoff.
 Mitrinović, D., Pečarić, J., Fink, A. (1993). *Classical and New Inequalities in Analysis*. Springer.
 Tikhomirov, V. (1991). *Stories about Maxima and Minima*. American Math. Society & Math. Association of America.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΣΧΕΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

8.1 Σύνοψη

Το κεφάλαιο αυτό αρχίζει με την έννοια της παράγουσας συνάρτησης και με την έννοια του αόριστου ολοκληρώματος συνάρτησης: οι δύο αυτές έννοιες είναι φαινομενικά άσχετες μεταξύ τους. Αποδεικνύουμε το Θεμελιώδες Θεώρημα βάσει του οποίου βλέπουμε ότι τα αόριστα ολοκληρώματα συνεχούς συνάρτησης ταυτίζονται με τις παράγουσές της. Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε –μέσω της γνώσης παραγώγων συναρτήσεων– τα ολοκληρώματα πολλών βασικών συναρτήσεων: δυνάμεων, εκθετικών, τριγωνομετρικών. Κατόπιν περιγράφουμε τις βασικές μεθόδους υπολογισμού ολοκληρωμάτων με πολλά παραδείγματα: μέθοδος αντικατάστασης, μέθοδος κατά παράγοντες, ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων, ολοκλήρωση σύνθετων τριγωνομετρικών συναρτήσεων και ολοκλήρωση αλγεβρικών συναρτήσεων. Ορίζουμε την έννοια της μέσης τιμής συνάρτησης και αποδεικνύουμε το αντίστοιχο Θεώρημα Μέσης Τιμής. Κατόπιν αποδεικνύουμε το δεύτερο Θεώρημα Taylor. Ορίζουμε την έννοια του γενικευμένου ολοκληρώματος και της σύγκλισης ή απόκλισης του γενικευμένου ολοκληρώματος, δίνοντας έμφαση στο υπολογισμό γενικευμένου ολοκληρώματος σε μερικές απλές περιπτώσεις. Τέλος, περιγράφουμε μερικές εφαρμογές των ολοκληρωμάτων: υπολογισμός μήκους καμπύλης, μάζας καμπυλόγραμμης ράβδου, έργου δύναμης και εμβαδού επίπεδης επιφάνειας (με παράλληλες, με ακτινικές και με κυκλικές διατομές).

Προαπαιτούμενη γνώση: Τα προηγούμενα κεφάλαια.

8.2 Παράγουσες και αόριστα ολοκληρώματα

8.2.1 Παράγουσες

Ορισμός 8.1. Έστω διάστημα I και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $F : I \rightarrow \mathbb{R}$. Αν ισχύει $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in I$, τότε η F χαρακτηρίζεται *παράγουσα* ή *αντιπαράγωγος* ή *πρωτεύουσα συνάρτηση* ή *αρχική συνάρτηση* της f στο διάστημα I .

Παράδειγμα 8.1. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ είναι παράγουσα της x^n στο $(-\infty, +\infty)$.

Παράδειγμα 8.2. Η x είναι παράγουσα της σταθερής 1 στο $(-\infty, +\infty)$.

Παράδειγμα 8.3. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, $n \leq -2$, η $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ είναι παράγουσα της x^n στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$.

Παράδειγμα 8.4. Για κάθε $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ η $\frac{x^{a+1}}{a+1}$ είναι παράγουσα της x^a στο $(0, +\infty)$.

Παράδειγμα 8.5. Η $\log |x|$ είναι παράγουσα της $\frac{1}{x}$ στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$.

Παπαδημητράκης, Μ. (2024) «Απειροστικός Λογισμός».

Αθήνα: Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. <http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-1011>

 Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Μη Εμπορική Χρήση - Παρόμοια Διανομή 4.0

Παράδειγμα 8.6. Αν $a > 0, a \neq 1$, τότε η $\frac{a^x}{\log a}$ είναι παράγουσα της a^x στο $(-\infty, +\infty)$. Ειδικότερα, η e^x είναι παράγουσα της e^x στο $(-\infty, +\infty)$.

Παράδειγμα 8.7. Η $\sin x$ είναι παράγουσα της $\cos x$ και η $-\cos x$ είναι παράγουσα της $\sin x$ στο $(-\infty, +\infty)$.

Παράδειγμα 8.8. Η $\tan x$ είναι παράγουσα της $\frac{1}{\cos^2 x}$ στο $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z}$. Επίσης, η $-\cot x$ είναι παράγουσα της $\frac{1}{\sin^2 x}$ στο $(k\pi, \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

Παράδειγμα 8.9. Η $\arcsin x$ είναι παράγουσα της $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ στο $(-1, 1)$.

Παράδειγμα 8.10. Η $\arctan x$ είναι παράγουσα της $\frac{1}{1+x^2}$ στο $(-\infty, +\infty)$.

Πρόταση 8.1. Έστω διάστημα I και $f : I \rightarrow \mathbb{R}, F_1 : I \rightarrow \mathbb{R}, F_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$.

(i) Αν η $F_2 - F_1$ είναι σταθερή συνάρτηση στο I και η μία από τις F_1, F_2 είναι παράγουσα της f στο I , τότε και η άλλη είναι παράγουσα της f στο I .

(ii) Αν οι F_1, F_2 είναι παράγουσες της f στο I , τότε η $F_2 - F_1$ είναι σταθερή συνάρτηση στο I .

Απόδειξη. (i) Έστω ότι ισχύει $F_2(x) - F_1(x) = c$ για κάθε x στο I , όπου c είναι ένας σταθερός αριθμός, δηλαδή ανεξάρτητος του $x \in I$, και έστω ότι η F_1 είναι παράγουσα της f στο I . Τότε ισχύει $F_2'(x) = F_1'(x) + 0 = f(x)$ για κάθε $x \in I$, οπότε η F_2 είναι παράγουσα της f στο I .

(ii) Έστω ότι οι F_1, F_2 είναι παράγουσες της f στο I και ας συμβολίσουμε $h = F_2 - F_1$ τη διαφορά τους στο I . Τότε ισχύει $h'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0$ για κάθε $x \in I$, οπότε από την Πρόταση 6.6 συνεπάγεται ότι η h είναι σταθερή στο I . $\square$

Η Πρόταση 8.1 μπορεί να διατυπωθεί και με τον εξής τρόπο.

Αν μία συνάρτηση έχει τουλάχιστον μία παράγουσα σε κάποιο διάστημα, τότε η συνάρτηση έχει άπειρες παράγουσες στο ίδιο διάστημα: αυτές οι παράγουσες είναι μία οποιαδήποτε από τις παράγουσες συν αυθαίρετη σταθερά, και καμία άλλη συνάρτηση.

Παράδειγμα 8.11. Οι παράγουσες της x στο $(-\infty, +\infty)$ είναι οι συναρτήσεις $\frac{x^2}{2} + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά.

Γενικότερα, για κάθε συνάρτηση στα αρχικά παραδείγματα μπορούμε να περιγράψουμε όλες τις παράγουσές της, αν επισυνάψουμε το σύμβολο c στην αναφερόμενη παράγουσα. Π.χ. οι παράγουσες της $\cos x$ στο $(-\infty, +\infty)$ είναι όλες οι συναρτήσεις $\sin x + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά.

Πρέπει να προσεχτεί το εξής. Αν μία συνάρτηση g έχει παράγωγο ίση με 0 σε κάθε σημείο της ένωσης δύο ξένων διαστημάτων, τότε δεν συνεπάγεται ότι η g είναι σταθερή στην ένωση των δύο αυτών διαστημάτων.

Παράδειγμα 8.12. Η $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } 0 < x < 1, \\ 2, & \text{αν } 1 < x < 3, \end{cases}$ έχει παράγωγο ίση με 0 σε κάθε σημείο της ένωσης $(0, 1) \cup (1, 3)$, διότι είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $(0, 1)$ και $(1, 3)$. Όμως, η g δεν είναι σταθερή στην ένωση $(0, 1) \cup (1, 3)$.

Μετά από την τελευταία παρατήρηση καταλαβαίνουμε γιατί στην Πρόταση 8.1 και στις αναδιατυπώσεις της αναφέρεται «διάστημα» και όχι «ένωση περισσοτέρων του ενός διαστημάτων» ή γενικό «σύνολο».

Παράδειγμα 8.13. Οι παράγουσες της $\frac{1}{x}$ στο $(-\infty, 0)$ είναι όλες οι συναρτήσεις $\log |x| + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά. Ομοίως, και στο $(0, +\infty)$ οι παράγουσες της $\frac{1}{x}$ είναι όλες οι συναρτήσεις $\log |x| + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά. Όμως, οι παράγουσες της $\frac{1}{x}$ στην ένωση $(-\infty, 0) \cup$

$(0, +\infty)$ είναι όλες οι συναρτήσεις $\begin{cases} \log |x| + c_1, & \text{αν } x < 0, \\ \log |x| + c_2, & \text{αν } x > 0, \end{cases}$ όπου c_1 και c_2 είναι δύο αυθαίρετες σταθερές όχι απαραίτητως ίσες.

Ασκήσεις

8.1. (i) Βρείτε μία παράγουσα της $2x + \sin x$ στο $(-\infty, +\infty)$. Ποιες είναι όλες οι παράγουσες της $2x + \sin x$ στο $(-\infty, +\infty)$;

(ii) Βρείτε μία παράγουσα της $2x + \sin x$ στο $(-\infty, +\infty)$ ώστε η τιμή της στο $x = \pi$ να είναι -2 . Πόσες τέτοιες παράγουσες υπάρχουν;

8.2. Βρείτε συνάρτηση $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $F'(x^2) = \frac{1}{x}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και ώστε $F(1) = 1$.

8.3. Αποδείξτε ότι η $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x < 0, \\ 1, & \text{αν } x \geq 0, \end{cases}$ δεν έχει παράγουσα στο $(-\infty, +\infty)$.

Υπόδειξη: Κατ' αρχάς, εργαστείτε στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

8.2.2 Αόριστα ολοκληρώματα

Ορισμός 8.2. (i) Έστω ότι η $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, οπότε ορίζεται το $\int_a^b f(x) dx$. Τότε ορίζουμε το σύμβολο $\int_b^a f(x) dx$ μέσω του τύπου:

$$\int_b^a f(x) dx := - \int_a^b f(x) dx.$$

(ii) Αν ορίζεται η f στο σημείο a , τότε ορίζουμε το σύμβολο $\int_a^a f(x) dx$ να έχει την τιμή 0. Δηλαδή:

$$\int_a^a f(x) dx := 0.$$

Έχουμε, λοιπόν, ορίσει το σύμβολο $\int_a^b f(x) dx$ για οποιαδήποτε a, b με την προϋπόθεση ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, b]$, αν $b > a$, και ολοκληρώσιμη στο $[b, a]$, αν $b < a$, και ορισμένη στο σημείο a , αν $b = a$. Έτσι επιτρέπεται να γράφουμε το μεγαλύτερο άκρο του διαστήματος στην κάτω μεριά και το μικρότερο άκρο στην πάνω μεριά του συμβόλου του ολοκληρώματος.

Η γνωστή ιδιότητα

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx,$$

η οποία ισχύει, αν $a < b < c$, επεκτείνεται για όλες τις περιπτώσεις σχετικής διάταξης των a, b, c , αρκεί η f να είναι ολοκληρώσιμη στο κλειστό διάστημα από το μικρότερο μέχρι το μεγαλύτερο από τα τρία αυτά σημεία. Αυτό είναι πολύ εύκολο να αποδειχτεί, διακρίνοντας περιπτώσεις. Για παράδειγμα, αν $c < b < a$, τότε η ισότητα αυτή γράφεται

$$- \int_c^a f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$$

ή, ισοδύναμα,

$$\int_c^a f(x) dx = \int_c^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx$$

και αυτή είναι η ήδη γνωστή μας ισότητα. Επίσης, αν $a = c < b$, τότε η ισότητα γράφεται

$$0 = \int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx,$$

η οποία ισχύει λόγω του ορισμού του $\int_b^a f(x) dx$. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις η απόδειξη είναι παρόμοια.

Μία ακόμη γνωστή ιδιότητα η οποία επεκτείνεται είναι η εξής. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα από το μικρότερο μέχρι το μεγαλύτερο από τα a, b και αν για κάποιο M ισχύει $|f(x)| \leq M$ για κάθε x στο ίδιο διάστημα, τότε συνεπάγεται

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M|b - a|.$$

Πράγματι, αν $a < b$, τότε $|b - a| = b - a$, τότε το αποτέλεσμα είναι ήδη γνωστό. Αν $b < a$, τότε

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| = \left| - \int_b^a f(x) dx \right| = \left| \int_b^a f(x) dx \right| \leq M(a - b) = M|b - a|.$$

Τέλος, αν $a = b$, τότε η ανισότητα $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M|b - a|$ ισχύει ως ισότητα $0 = 0$.

Ορισμός 8.3. Έστω διάστημα I έστω ότι η $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I και έστω σταθερό σημείο $a \in I$ και αυθαίρετη σταθερά c . Ορίζουμε τη συνάρτηση $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt + c \quad \text{για κάθε } x \in I.$$

Κάθε τέτοια συνάρτηση F χαρακτηρίζεται **αόριστο ολοκλήρωμα** της f στο διάστημα I . Το a ονομάζεται **αρχικό σημείο** του αόριστου ολοκληρώματος.

Αν θέλουμε να αντικαταστήσουμε το αρχικό σημείο a με ένα άλλο a' στο ίδιο διάστημα I , τότε κάνουμε το εξής απλό:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt + c = \int_{a'}^x f(t) dt + \int_a^{a'} f(t) dt + c = \int_{a'}^x f(t) dt + c',$$

όπου c' είναι μία νέα σταθερά, η $c' = \int_a^{a'} f(t) dt + c$. Δηλαδή, η αντικατάσταση ενός αρχικού σημείου a με ένα άλλο a' ισοδυναμεί με την αντικατάσταση μίας σταθεράς c με μία άλλη c' . Γι αυτό, αν θέλουμε να υπολογίσουμε ένα αόριστο ολοκλήρωμα, τότε επιλέγουμε κατάλληλο αρχικό σημείο a τέτοιο ώστε είτε να είναι βολικότερες οι πράξεις για τον υπολογισμό του $\int_a^x f(t) dt$ είτε να είναι πιο απλός ο τύπος ο οποίος θα προκύψει.

Παράδειγμα 8.14. Για να βρούμε ένα αόριστο ολοκλήρωμα της x στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$ παίρνουμε $a = 0$ και έχουμε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int_0^x t dt = \frac{x^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{x^2}{2}.$$

Ένα οποιοδήποτε άλλο αόριστο ολοκλήρωμα της x είναι το $\frac{x^2}{2} + c$, όπου c είναι οποιαδήποτε σταθερά. Αν, για παράδειγμα, επιλέξουμε κάποιο άλλο a ως αρχικό σημείο, τότε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int_a^x t dt$ είναι το

$$\int_a^x t dt = \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2},$$

και η διαφορά του σε σχέση με το προηγούμενο αόριστο ολοκλήρωμα είναι η σταθερά $c = -\frac{a^2}{2}$.

Πρόταση 8.2. Έστω διάστημα I και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $F_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$, $F_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$.

(i) Αν η $F_2 - F_1$ είναι σταθερή συνάρτηση στο I και η μία από τις F_1, F_2 είναι αόριστο ολοκλήρωμα της f στο I , τότε και η άλλη είναι αόριστο ολοκλήρωμα της f στο I .

(ii) Αν οι F_1, F_2 είναι αόριστα ολοκληρώματα της f στο I , τότε η $F_2 - F_1$ είναι σταθερή συνάρτηση στο I .

Απόδειξη. (i) Έστω ότι ισχύει $F_2(x) - F_1(x) = c$ για κάθε $x \in I$, όπου c είναι μία σταθερά ανεξάρτητη του x , και έστω ότι η F_1 είναι αόριστο ολοκλήρωμα της f στο I . Δηλαδή, υπάρχουν $a_1 \in I$ και σταθερά c_1 ώστε να ισχύει

$$F_1(x) = \int_{a_1}^x f(t) dt + c_1$$

για κάθε $x \in I$. Συνεπάγεται ότι ισχύει

$$F_2(x) = F_1(x) + c = \int_{a_1}^x f(t) dt + (c_1 + c) = \int_{a_2}^x f(t) dt + c_2$$

για κάθε $x \in I$, όπου $a_2 = a_1$ και $c_2 = c_1 + c$. Άρα η F_2 είναι αόριστο ολοκλήρωμα της f στο I .

(ii) Έστω ότι οι F_1, F_2 είναι αόριστα ολοκληρώματα της f στο I , οπότε υπάρχουν $a_1 \in I, a_2 \in I$ και σταθερές c_1, c_2 ώστε να ισχύει

$$F_1(x) = \int_{a_1}^x f(t) dt + c_1, \quad F_2(x) = \int_{a_2}^x f(t) dt + c_2$$

για κάθε $x \in I$. Συνεπάζεται ότι ισχύει

$$F_2(x) - F_1(x) = \int_{a_2}^x f(t) dt + c_2 - \int_{a_1}^x f(t) dt - c_1 = \int_{a_2}^{a_1} f(t) dt + c_2 - c_1$$

για κάθε $x \in I$, οπότε η $F_2 - F_1$ είναι σταθερή συνάρτηση στο I . $\square$

Από την Πρόταση 8.2 συνεπάζεται:

Αν μία συνάρτηση έχει τουλάχιστον ένα αόριστο ολοκλήρωμα σε κάποιο διάστημα, τότε η συνάρτηση έχει άπειρα αόριστα ολοκληρώματα στο ίδιο διάστημα: αυτά είναι ένα οποιοδήποτε από τα αόριστα ολοκληρώματα συν αυθαίρετη σταθερά, και καμία άλλη συνάρτηση.

Ορισμός 8.4. Έστω διάστημα I και έστω ότι η $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I . Χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\int f(x) dx$ για να δηλώσουμε ταυτόχρονα όλα τα αόριστα ολοκληρώματα της συνάρτησης f στο διάστημα I ή, ισοδύναμα, ταυτόχρονα όλες τις συναρτήσεις $\int_a^x f(t) dt + c$ στο I , όπου a είναι οποιοδήποτε σημείο του I και c είναι αυθαίρετη σταθερά. Δηλαδή, γράφουμε

$$\int f(x) dx = \int_a^x f(t) dt + c.$$

Παράδειγμα 8.15. Τα αόριστα ολοκληρώματα της x στο $(-\infty, +\infty)$ είναι, βάσει του παραδείγματος 8.14, όλες οι συναρτήσεις $\frac{x^2}{2} + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά. Άρα με το σύμβολο $\int x dx$ δηλώνουμε όλες μαζί αυτές τις συναρτήσεις, οπότε γράφουμε

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + c,$$

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά.

Πρέπει να τονιστεί ότι με το σύμβολο $\int f(x) dx$ περιγράφουμε, ταυτόχρονα, άπειρες συναρτήσεις.

Παρατηρήστε ότι, όπως είδαμε στα παραδείγματα 8.11 και 8.15, οι παράγουσες της x είναι ίδιες με τα αόριστα ολοκληρώματά της: κάθε παράγουσα είναι αόριστο ολοκλήρωμα και κάθε αόριστο ολοκλήρωμα είναι παράγουσα. Στην επόμενη ενότητα αυτό θα γενικευτεί.

Πριν προχωρήσουμε, ας δούμε δύο απλές ιδιότητες του συμβόλου $\int f(x) dx$. Η πρώτη είναι:

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

Η ισότητα αυτή είναι άμεση συνέπεια της αντίστοιχης ισότητας ανάμεσα σε ολοκληρώματα με συγκεκριμένα άκρα. Θεωρούμε ένα αρχικό σημείο a στο διάστημα I και παίρνουμε τα συγκεκριμένα αόριστα ολοκληρώματα $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ και $G(x) = \int_a^x g(t) dt$ στο I . Αυτό σημαίνει ότι

$$\int f(x) dx = F(x) + c_1, \quad \int g(x) dx = G(x) + c_2,$$

όπου οι c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές οι οποίες παίρνουν όλες τις πραγματικές τιμές. Τώρα, έχουμε

$$\begin{aligned} \int f(x) dx + \int g(x) dx &= F(x) + c_1 + G(x) + c_2 = F(x) + G(x) + (c_1 + c_2) \\ &= \int_a^x (f(t) + g(t)) dt + (c_1 + c_2). \end{aligned}$$

Το $\int_a^x (f(t) + g(t)) dt$ είναι ένα από τα αόριστα ολοκληρώματα της $f + g$ στο I και, επειδή η σταθερά $c_1 + c_2$ παίρνει όλες τις πραγματικές τιμές, συμπεραίνουμε ότι

$$\int_a^x (f(t) + g(t)) dt + (c_1 + c_2) = \int (f(x) + g(x)) dx.$$

Άρα $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$.

Η δεύτερη ιδιότητα είναι:

$$\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx \quad \text{αν } \lambda \neq 0.$$

Θεωρούμε, όπως πριν, το συγκεκριμένο αόριστο ολοκλήρωμα $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, οπότε

$$\int f(x) dx = F(x) + c,$$

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά η οποία παίρνει κάθε πραγματική τιμή. Τώρα

$$\lambda \int f(x) dx = \lambda F(x) + \lambda c = \int_a^x \lambda f(t) dt + \lambda c.$$

Το $\int_a^x \lambda f(t) dt$ είναι ένα από τα αόριστα ολοκληρώματα της λf στο I και, επειδή $\lambda \neq 0$, η σταθερά λc παίρνει όλες τις πραγματικές τιμές, οπότε

$$\int_a^x \lambda f(t) dt + \lambda c = \int \lambda f(x) dx.$$

Άρα $\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx$.

Όπως φάνηκε σε αυτές τις δύο αποδείξεις, όταν προσθέτουμε δύο γενικά αόριστα ολοκληρώματα, τότε μπορούμε να αντικαθιστούμε το άθροισμα των δύο αυθαίρετων σταθερών οι οποίες εμφανίζονται με *μία* αυθαίρετη σταθερά. Ομοίως, όταν πολλαπλασιάζουμε ένα γενικό αόριστο ολοκλήρωμα με έναν αριθμό $\neq 0$, τότε μπορούμε να αντικαθιστούμε το γινόμενο της αυθαίρετης σταθεράς και του πολλαπλασιαστή αριθμού με *μία* αυθαίρετη σταθερά.

Παράδειγμα 8.16. Γράφουμε

$$\int (1 + x) dx = \int 1 dx + \int x dx = x + \frac{x^2}{2} + c.$$

Αποφεύγουμε να γράψουμε $\int (1 + x) dx = \int 1 dx + \int x dx = x + c_1 + \frac{x^2}{2} + c_2$.

Παράδειγμα 8.17. Γράφουμε

$$\int 7x dx = 7 \int x dx = 7 \frac{x^2}{2} + c.$$

Αποφεύγουμε να γράψουμε $\int 7x dx = 7 \int x dx = 7 \frac{x^2}{2} + 7c$.

Παράδειγμα 8.18. Γράφουμε

$$\int (x + g(x)) dx = \int x dx + \int g(x) dx = \frac{x^2}{2} + \int g(x) dx.$$

Αποφεύγουμε να γράψουμε $\int (x + g(x)) dx = \int x dx + \int g(x) dx = \frac{x^2}{2} + c + \int g(x) dx$, διότι η αυθαίρετη σταθερά c μπορεί να απορροφηθεί στο $\int g(x) dx$, το οποίο περιέχει αφ' εαυτού μία αυθαίρετη σταθερά.

Παράδειγμα 8.19. Προσέζτε: Γράφουμε

$$\int x dx - \int x dx = c,$$

και όχι $= 0$. Διότι:

$$\int x dx - \int x dx = \int (x - x) dx = \int 0 dx = c$$

ή, με άλλο τρόπο,

$$\int x dx - \int x dx = \frac{x^2}{2} + c_1 - \frac{x^2}{2} - c_2 = c_1 - c_2 = c.$$

Πρόταση 8.3. Έστω διάστημα I και έστω ότι η $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I . Τότε κάθε αόριστο ολοκλήρωμα της f στο I είναι συνεχής συνάρτηση στο I .

Απόδειξη. Έστω σταθερό σημείο a στο I , σταθερά c και το αόριστο ολοκλήρωμα $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt + c \quad \text{για κάθε } x \in I.$$

Θεωρούμε οποιοδήποτε $\xi \in I$ και θα δούμε ότι η F είναι συνεχής στο ξ .

Υπάρχει υποδιάστημα $[b, c]$ του I ώστε $a \in [b, c]$ και $\xi \in [b, c]$. Αν το ξ είναι εσωτερικό σημείο του I , τότε μπορούμε να επιλέξουμε το $[b, c]$ ώστε το ξ να είναι εσωτερικό σημείο και του $[b, c]$. Αλλιώς, δηλαδή αν το ξ είναι άκρο του I , τότε το ξ είναι άκρο και του $[b, c]$.

Επειδή η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[b, c]$, είναι φραγμένη στο $[b, c]$, οπότε υπάρχει $M \geq 0$ ώστε να ισχύει $|f(t)| \leq M$ για κάθε $t \in [b, c]$. Τότε για κάθε $x \in [b, c]$ έχουμε ότι

$$|F(x) - F(\xi)| = \left| \left(\int_a^x f(t) dt + c \right) - \left(\int_a^\xi f(t) dt + c \right) \right| = \left| \int_\xi^x f(t) dt \right| \leq M|x - \xi|.$$

Επομένως, $\lim_{x \rightarrow \xi} F(x) = F(\xi)$, οπότε η F είναι συνεχής στο ξ . □

Ασκήσεις

8.4. (i) Βρείτε ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $1 - x$ στο $(-\infty, +\infty)$. Ποια είναι όλα τα αόριστα ολοκληρώματα της $1 - x$ στο $(-\infty, +\infty)$; Με άλλα λόγια, ποιο είναι το $\int (1 - x) dx$;

(ii) Βρείτε ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $1 - x$ στο $(-\infty, +\infty)$ ώστε η τιμή του στο $x = 2$ να είναι -1 . Πόσα τέτοια αόριστα ολοκληρώματα υπάρχουν;

8.5. Έστω διάστημα I και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I και έστω $a \in I$ και σταθερά κ . Πόσα αόριστα ολοκληρώματα της f στο I υπάρχουν τα οποία έχουν τιμή κ στο $x = a$;

8.6. Έστω $\int f(x) dx = \int g(x) dx + x^2 - 3$. Με τι είναι ίση η παράσταση $\int f(x) dx - \int g(x) dx$;

Υπόδειξη: Όχι με $x^2 - 3$.

8.3 Το Θεμελιώδες Θεώρημα

Το θεώρημα το οποίο ακολουθεί είναι το σημαντικότερο αποτέλεσμα του Απειροστικού Λογισμού. Το θεώρημα αυτό συνδέει τις φαινομενικά άσχετες έννοιες της παραγώγου και του ολοκληρώματος.

Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού. Έστω διάστημα I και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I και έστω σταθερό σημείο a στο I και σταθερά c . Θεωρούμε το αόριστο ολοκλήρωμα $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt + c \quad \text{για } x \in I.$$

Αν η f είναι συνεχής σε κάποιο $\xi \in I$, τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο ξ και

$$F'(\xi) = f(\xi).$$

Ειδικότερα, αν η f είναι συνεχής στο I , τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο I και ισχύει $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in I$.

Απόδειξη. Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο ξ , υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in I$ το οποίο ικανοποιεί την $|x - \xi| < \delta$. Έστω, λοιπόν, οποιοδήποτε $x \in I$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Τότε για κάθε $t \in [\xi, x]$ ή $[x, \xi]$ ισχύει $|t - \xi| < \delta$, οπότε $|f(t) - f(\xi)| < \epsilon$. Τότε, όμως,

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(\xi)}{x - \xi} - f(\xi) \right| &= \left| \frac{\int_a^x f(t) dt - \int_a^\xi f(t) dt}{x - \xi} - f(\xi) \right| = \left| \frac{\int_\xi^x f(t) dt - f(\xi)(x - \xi)}{x - \xi} \right| \\ &= \left| \frac{\int_\xi^x f(t) dt - \int_\xi^x f(\xi) dt}{x - \xi} \right| = \left| \frac{\int_\xi^x (f(t) - f(\xi)) dt}{|x - \xi|} \right| \leq \frac{|x - \xi| \epsilon}{|x - \xi|} = \epsilon. \end{aligned}$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{F(x) - F(\xi)}{x - \xi} = f(\xi)$, οπότε $F'(\xi) = f(\xi)$. □

Επομένως, έχουμε το εξής άμεσο πόρισμα.

Πρόταση 8.4. Έστω διάστημα I και συνεχής $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Τότε κάθε αόριστο ολοκλήρωμα της f στο I είναι και παράγουσα της f στο I , και αντιστρόφως.

Απόδειξη. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα συνεπάγεται ότι το αόριστο ολοκλήρωμα F της f στο διάστημα I , με τύπο $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ για $x \in I$, είναι και παράγουσα της f στο I . Γνωρίζουμε, όμως, ότι τα αόριστα ολοκληρώματα της f στο I είναι όλες οι συναρτήσεις $F + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά: ένα αόριστο ολοκλήρωμα συν αυθαίρετη σταθερά. Επίσης, γνωρίζουμε ότι οι παράγουσες της f στο I είναι όλες οι συναρτήσεις $F + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά: μία παράγουσα συν αυθαίρετη σταθερά. Δηλαδή, τα αόριστα ολοκληρώματα της f στο I και οι παράγουσες της f στο I είναι οι ίδιες συναρτήσεις. □

Παρατηρήστε ότι το αποτέλεσμα του Θεμελιώδους Θεωρήματος γράφεται συνοπτικά:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt + c \right) = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in I$$

και ισχύει όταν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα I .

Η Πρόταση η οποία ακολουθεί, άμεση συνέπεια του Θεμελιώδους Θεωρήματος, έχει σπουδαία πρακτική αξία.

Πρόταση 8.5. Έστω διάστημα I , συνεχής $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ και παράγουσα F της f στο I .

(i) Τα αόριστα ολοκληρώματα της f στο I είναι όλες οι συναρτήσεις $F + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά. Δηλαδή,

$$\int f(x) dx = F(x) + c \quad \text{για } x \in I.$$

(ii) Το ολοκλήρωμα της f σε οποιοδήποτε υποδιάστημα $[a, b]$ του I είναι ίσο με τη διαφορά των τιμών της F στα άκρα του $[a, b]$. Δηλαδή,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \text{για } a, b \in I.$$

Απόδειξη. (i) Το αριστερό μέλος της ισότητας $\int f(x) dx = F(x) + c$ περιγράφει όλα τα αόριστα ολοκληρώματα της f , ενώ το δεξιό μέλος περιγράφει όλες τις παράγουσες της f στο διάστημα I . Η Πρόταση 8.4 λέει ότι πρόκειται για τις ίδιες συναρτήσεις.

(ii) Έστω $a \in I$. Σύμφωνα με το Θεμελιώδες Θεώρημα η $G : I \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ για $x \in I$ είναι παράγουσα της f στο I . Επομένως, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε να ισχύει

$$\int_a^x f(t) dt - F(x) = G(x) - F(x) = c \quad \text{για κάθε } x \in I.$$

Αν θέσουμε $x = a$, τότε βρίσκουμε $0 - F(a) = c$, οπότε ισχύει

$$\int_a^x f(t) dt - F(x) = -F(a) \quad \text{για κάθε } x \in I.$$

Τέλος, με $x = b$ βρίσκουμε ότι $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$. □

Παρατηρήστε ότι οι δύο ισότητες της Πρότασης 8.5 γράφονται

$$\int F'(x) dx = F(x) + c \text{ για } x \in I, \quad \int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a) \text{ για } a, b \in I.$$

αφού ισχύει $F'(x) = f(x)$ για $x \in I$.

Πρώτο πόρισμα. Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα I και αν γνωρίζουμε μία παράγουσα F της f στο I , τότε γνωρίζουμε όλα τα αόριστα ολοκληρώματά της στο I .

Ακολουθούν μερικά σημαντικά αόριστα ολοκληρώματα.

Παράδειγμα 8.20.

$$\int 1 dx = x + c$$

στο $(-\infty, +\infty)$.

Παράδειγμα 8.21. Αν $p \neq -1$, $p \neq 0$, τότε

$$\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + c.$$

Ο τύπος αυτός ισχύει: (i) στο $(-\infty, +\infty)$, αν $p \in \mathbb{N}$, (ii) στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, αν $p \in \mathbb{Z}$, $p \leq -2$, (iii) στο $[0, +\infty)$, αν $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $p > 0$, (iv) στο $(0, +\infty)$, αν $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $p < 0$.

Παράδειγμα 8.22.

$$\int \frac{1}{x} dx = \log |x| + c$$

στο $(-\infty, 0)$, καθώς και στο $(0, +\infty)$.

Παράδειγμα 8.23. Αν $a > 0$, $a \neq 1$, τότε

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + c$$

στο $(-\infty, +\infty)$. Ειδικότερα,

$$\int e^x dx = e^x + c$$

στο $(-\infty, +\infty)$.

Παράδειγμα 8.24.

$$\int \cos x dx = \sin x + c, \quad \int \sin x dx = -\cos x + c$$

στο $(-\infty, +\infty)$.

Παράδειγμα 8.25. Ο πρώτος από τους τύπους

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c, \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

ισχύει σε κάθε διάστημα $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, και ο δεύτερος σε κάθε $(k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Παράδειγμα 8.26.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

στο $(-1, 1)$.

Παράδειγμα 8.27.

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$$

στο $(-\infty, +\infty)$.

Δεύτερο πόρισμα. Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα I και αν γνωρίζουμε μία παράγουσα F της f στο I , τότε γνωρίζουμε το ολοκλήρωμά της σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I .

Ας δούμε τα αντίστοιχα των αόριστων ολοκληρωμάτων στα προηγούμενα παραδείγματα.

Παράδειγμα 8.28.

$$\int_a^b 1 \, dx = b - a$$

για κάθε a, b .

Παράδειγμα 8.29. Αν $p \neq -1$, $p \neq 0$, τότε

$$\int_a^b x^p \, dx = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}.$$

Αυτό ισχύει: (i) για κάθε a, b , αν $p \in \mathbb{N}$, (ii) για κάθε $a > 0$, $b > 0$ και κάθε $a < 0$, $b < 0$, αν $p \in \mathbb{Z}$, $p \leq -2$, (iii) για κάθε $a \geq 0$, $b \geq 0$, αν $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $p > 0$, (iv) για κάθε $a > 0$, $b > 0$, αν $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $p < 0$.

Παράδειγμα 8.30.

$$\int_a^b \frac{1}{x} \, dx = \log |b| - \log |a| = \log \frac{b}{a}$$

για κάθε $a < 0$, $b < 0$ και για κάθε $a > 0$, $b > 0$.

Παράδειγμα 8.31. Αν $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, τότε

$$\int_a^b \alpha^x \, dx = \frac{\alpha^b - \alpha^a}{\log \alpha}$$

για κάθε a, b . Ειδικότερα,

$$\int_a^b e^x \, dx = e^b - e^a$$

για κάθε a, b .

Παράδειγμα 8.32.

$$\int_a^b \cos x \, dx = \sin b - \sin a, \quad \int_a^b \sin x \, dx = \cos a - \cos b$$

για κάθε a, b .

Παράδειγμα 8.33. Το πρώτο από τα

$$\int_a^b \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan b - \tan a, \quad \int_a^b \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = \cot a - \cot b$$

ισχύει για a, b στο $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, και το δεύτερο για a, b στο $(k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Παράδειγμα 8.34.

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin b - \arcsin a$$

για κάθε a, b στο $(-1, 1)$.

Παράδειγμα 8.35.

$$\int_a^b \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan b - \arctan a$$

για κάθε a, b .

Η Πρόταση 8.6 είναι χρήσιμη.

Πρόταση 8.6. Έστω διαστήματα I, J , συναρτήσεις $g : J \rightarrow I$, $h : J \rightarrow I$ και συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I . Ορίζουμε την $F : J \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt$ για $x \in J$. Αν οι g, h είναι παραγωγίσιμες στο $\xi \in J$ και αν η f είναι συνεχής στο $g(\xi)$ και στο $h(\xi)$, τότε $F'(\xi) = f(h(\xi))h'(\xi) - f(g(\xi))g'(\xi)$.

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in J$ έχει νόημα το $F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt$. Πράγματι, τα $g(x), h(x)$ ανήκουν στο I και, επειδή το I είναι διάστημα, το κλειστό και φραγμένο διάστημα με άκρα $g(x)$ και $h(x)$ είναι υποδιάστημα του I , οπότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα αυτό.

Τώρα θεωρούμε ένα $a \in I$ και βλέπουμε ότι

$$F(x) = \int_a^{h(x)} f(t) dt - \int_a^{g(x)} f(t) dt \quad \text{για κάθε } x \in J.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$\Phi(y) = \int_a^y f(t) dt \quad \text{για κάθε } y \in I.$$

Η Φ είναι αόριστο ολοκλήρωμα της f στο I , οπότε ισχύει $\Phi'(y) = f(y)$ για κάθε σημείο συνέχειας y της f . Τώρα έχουμε $F(x) = \Phi(h(x)) - \Phi(g(x))$ για κάθε $x \in J$. Άρα ισχύει

$$F'(\xi) = \Phi'(h(\xi))h'(\xi) - \Phi'(g(\xi))g'(\xi) = f(h(\xi))h'(\xi) - f(g(\xi))g'(\xi),$$

αν οι g, h είναι παραγωγίσιμες στο $\xi \in J$ και αν η f είναι συνεχής στα $g(\xi)$ και $h(\xi)$. □

Παράδειγμα 8.36. Η παράγωγος της $F(x) = \int_{2x}^{x^2+e^x} \sin t dt$ είναι

$$F'(x) = (2x + e^x) \sin(x^2 + e^x) - 2 \sin(2x)$$

για κάθε x .

Ασκήσεις

8.7. Χωρίς να υπολογίσετε κανένα από τα παρακάτω ολοκληρώματα, αποδείξτε ότι:

$$\begin{aligned} \int \cos(ax) dx &= \frac{1}{a} \sin(ax) + c, & \int \sin(ax) dx &= -\frac{1}{a} \cos(ax) + c, \\ \int \frac{1}{x \log x} dx &= \log(\log x) + c, & \int \frac{1}{x \log x \log(\log x)} dx &= \log(\log(\log x)) + c, \\ \int x^n e^{-x} dx &= n! e^{-x} (e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \dots - \frac{x^n}{n!}) + c, \\ \int x^n e^x dx &= (-1)^{n-1} n! e^x (e^{-x} - 1 + x - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!}) + c. \end{aligned}$$

Η τρίτη ισότητα ισχύει για $x > 1$ και η τέταρτη ισχύει για $x > e$.

Υπόδειξη: Για την πρώτη ισότητα παρατηρήστε ότι η $\frac{1}{a} \sin(ax)$ είναι παράγουσα της $\cos(ax)$ στο $(-\infty, +\infty)$. Σκεφτείτε με τον ίδιο τρόπο για τις υπόλοιπες ισότητες.

8.8. Βρείτε συνεχή $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και αριθμό a , ώστε να ισχύει $\int_a^x f(t) dt = \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}$ για κάθε x . Πόσες λύσεις υπάρχουν;

8.9. Υπάρχει συνεχής $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\int_0^x f(t) dt = e^x$ για κάθε x ; Ίδια ερώτηση για την $\int_0^x f(t) dt = e^x - 1$.

8.10. Χωρίς να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα, βρείτε την παράγωγο καθεμιάς από τις συναρτήσεις $\int_0^x \frac{\sin t}{1+t^2} dt$, $\int_x^2 \frac{\sin t + e^t}{t^2+1} dt$, $\int_1^{x^2-x} \frac{t^2-2t}{e^t+2t^2} dt$, $\int_{\sin x}^{x+\cos x} te^t dt$ του x .

8.11. Βρείτε συνεχή $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $\int_0^{x^2} f(t) dt = 1 - 2x^2$ για κάθε x .

8.12. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x e^{t-x}(2t+1) dt = 2$ χωρίς να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα.

8.13. Βρείτε $a > 0$ και b , ώστε $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{bx - \sin x} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}} dt = 1$.

8.14. Υπολογίστε τα όρια της άσκησης 7.3, καθώς και το $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^p}{n^{p+1}}$.

8.15. Αν τα k, n, m είναι ακέραιοι, αποδείξτε ότι:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin(kx) dx &= 0, & \int_0^{2\pi} \cos(kx) dx &= \begin{cases} 0, & \text{αν } k \neq 0, \\ 2\pi, & \text{αν } k = 0, \end{cases} \\ \int_0^{2\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx &= 0, & \int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx &= \begin{cases} 0, & \text{αν } n \neq m, \\ \pi, & \text{αν } n = m, \end{cases} \\ \int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx &= \begin{cases} 0, & \text{αν } n \neq m \text{ ή } n = m = 0, \\ \pi, & \text{αν } n = m \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

8.16. Κάθε συνάρτηση

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

ονομάζεται **τριγωνομετρικό πολυώνυμο**. Αν ένα τουλάχιστον από τα a_n, b_n είναι $\neq 0$, τότε λέμε ότι το τριγωνομετρικό πολυώνυμο έχει **βαθμό** n .

Έστω τριγωνομετρικά πολυώνυμα

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \quad g(x) = c_0 + \sum_{k=1}^n (c_k \cos(kx) + d_k \sin(kx)).$$

Βάσει της άσκησης 8.15, αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx = a_0c_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_kc_k + b_kd_k).$$

8.17. Αν $n \in \mathbb{N}$, τότε, χρησιμοποιώντας τους τύπους της άσκησης 1.39, καθώς και τις ασκήσεις 8.15 και 8.16, αποδείξτε ότι:

$$\int_0^\pi \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin \frac{x}{2}} dx = \pi, \quad \int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{\sin x} dx = \begin{cases} \pi, & \text{αν } n \text{ περιττό,} \\ 0, & \text{αν } n \text{ άρτιο,} \end{cases} \quad \int_0^\pi \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2 x} dx = n\pi.$$

8.18. (i) Αποδείξτε ότι $\frac{1}{n+1} < \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx < \frac{1}{n}$, οπότε $\frac{1}{n+1} < \log \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Ανατρέξτε στην άσκηση 3.68. Αποδείξτε πάλι, με δεύτερο τρόπο, ότι $(1 + \frac{1}{n})^n < e < (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Ανατρέξτε στην άσκηση 3.69. Αποδείξτε πάλι, με δεύτερο τρόπο, ότι η ακολουθία (x_n) με τύπο $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n$ για κάθε n είναι γνησίως φθίνουσα με κάτω φράγμα το 0, οπότε συγκλίνει σε αριθμό.

8.19. Βρείτε τις συναρτήσεις $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(x) = 1 + \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt$ για κάθε $x > 0$.

8.20. Έστω συνεχής $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$ και $f(x)^2 = 2 \int_0^x f(t) dt$ για κάθε $x \geq 0$.

(i) Αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

(ii) Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

(iii) Αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) = x$ για κάθε $x \geq 0$.

8.21. Η ακολουθία των **πολυνόμων Bernoulli** $P_m(x)$ ορίζεται επαγωγικά από τις σχέσεις:

$$P_0(x) = 1, \quad P'_m(x) = mP_{m-1}(x), \quad \int_0^1 P_m(x) dx = 0.$$

- (i) Βρείτε τα πολώνυμα $P_m(x)$ για $m = 1, 2, 3, 4$.
- (ii) Αποδείξτε με επαγωγή ότι το $P_m(x)$ είναι πολώνυμο βαθμού m με μεγιστοβάθμιο όρο x^m .
- (iii) Αποδείξτε ότι ισχύει $P_m(0) = P_m(1)$ για κάθε $m \geq 2$.
- (iv) Αποδείξτε ότι ισχύει $P_m(x+1) - P_m(x) = mx^{m-1}$ για κάθε $m \geq 1$.
- (v) Αποδείξτε ότι

$$1^m + 2^m + \cdots + n^m = \int_0^{n+1} P_m(x) dx = \frac{P_{m+1}(n+1) - P_{m+1}(0)}{m+1}$$

και επαληθεύστε τους γνωστούς τύπους με $m = 1$ στο παράδειγμα 1.16, και με $m = 2, m = 3$ στην άσκηση 1.46.

- (vi) Αποδείξτε ότι ισχύει $P_m(1-x) = (-1)^m P_m(x)$ για κάθε $m \geq 1$.
- (v) Αποδείξτε ότι ισχύει $P_{2m+1}(0) = 0$ και $P_{2m-1}(\frac{1}{2}) = 0$ για κάθε $m \geq 1$.

8.4 Υπολογισμοί ολοκληρωμάτων

8.4.1 Μέθοδος αντικατάστασης ή αλλαγής μεταβλητής

Πρόταση 8.7. Έστω διαστήματα I, J , συναρτήσεις $\phi : I \rightarrow J$ και $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω ότι η ϕ έχει συνεχή παράγωγο στο I και η f είναι συνεχής στο J . Τότε

$$\int f(\phi(x))\phi'(x) dx = \int f(y) dy \Big|_{y=\phi(x)} \quad \text{για } x \in I,$$

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x) dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(y) dy \quad \text{για } a, b \in I.$$

Κατ' αρχάς, ας κατανοήσουμε τα δύο μέλη της πρώτης ισότητας στην πρόταση. Η συνάρτηση $f(\phi(x))\phi'(x)$ είναι συνεχής στο I και το σύμβολο $\int f(\phi(x))\phi'(x) dx$ δηλώνει όλα τα αόριστα ολοκληρώματά της ή, ισοδύναμα, όλες τις παράγουσές της. Βλέπουμε, ειδικότερα, ότι το αριστερό μέλος της ισότητας δηλώνει συναρτήσεις του x στο I . Από την άλλη μεριά, το $\int f(y) dy$ στο δεξιό μέλος της ισότητας δηλώνει όλα τα αόριστα ολοκληρώματα ή, ισοδύναμα, όλες τις παράγουσες της συνεχούς συνάρτησης $f(y)$, οπότε δηλώνει συναρτήσεις του y στο J . Η αντικατάσταση $y = \phi(x)$ στο δεξιό μέλος μετατρέπει τις συναρτήσεις του y στο J σε συναρτήσεις του x στο I , οπότε και τα δύο μέλη της ισότητας δηλώνουν συναρτήσεις του x στο I . Επομένως, έχει κατ' αρχήν νόημα να αποδείξουμε την ισότητα αυτή.

Απόδειξη. Θεωρούμε οποιαδήποτε παράγουσα $F(y)$ της $f(y)$ στο διάστημα J . Δηλαδή, ισχύει $F'(y) = f(y)$ για κάθε $y \in J$. Θεωρούμε και τη συνάρτηση $G(x) = F(\phi(x))$ στο διάστημα I . Τότε ισχύει

$$G'(x) = F'(\phi(x))\phi'(x) = f(\phi(x))\phi'(x) \quad \text{για κάθε } x \in I,$$

οπότε η $G(x)$ είναι παράγουσα της $f(\phi(x))\phi'(x)$ στο διάστημα I . Άρα

$$\int f(\phi(x))\phi'(x) dx = G(x) + c = F(\phi(x)) + c = (F(y) + c)|_{y=\phi(x)} = \int f(y) dy \Big|_{y=\phi(x)}.$$

Επίσης,

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x) dx = G(b) - G(a) = F(\phi(b)) - F(\phi(a)) = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(y) dy,$$

διότι $\int_c^d f(y) dy = F(d) - F(c)$ για κάθε $c \in J, d \in J$. □

Με την ευκαιρία της Πρότασης 8.7, ας ξαναθυμηθούμε κάποιο σχόλιο το οποίο είχαμε κάνει για το σύμβολο του ολοκληρώματος. Είχαμε πει ότι το $\int f(y) dy$ προκύπτει παίρνοντας όριο του αθροίσματος Riemann το οποίο σε «λιτή γραφή» έχει τη μορφή $\Sigma f(y) \Delta y$, δηλαδή άθροισμα Σ γινομένων της μορφής: τιμή $f(y)$ της συνάρτησης σε κάποιο σημείο επί διαφορά Δy κοντινών σημείων. Όταν κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής, το σημείο y γράφεται $\phi(x)$, οπότε η τιμή $f(y)$ γράφεται $f(\phi(x))$. Επίσης, επειδή $\phi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ και επειδή στα αθροίσματα Riemann οι διαφορές Δy και Δx είναι απειροελάχιστα μικρές, έχουμε τις προσεγγιστικές ισότητες $\phi'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$ και $\Delta y \approx \phi'(x) \Delta x$. Επομένως, το άθροισμα Riemann $\Sigma f(y) \Delta y$ γράφεται *προσεγγιστικά* $\Sigma f(\phi(x)) \phi'(x) \Delta x$ το οποίο είναι άθροισμα Riemann από το οποίο προκύπτει το ολοκλήρωμα $\int f(\phi(x)) \phi'(x) dx$. Έτσι, λοιπόν, «δικαιολογείται» η ισότητα $\int f(y) dy = \int f(\phi(x)) \phi'(x) dx$. Μπορούμε, μάλιστα, να πούμε κάτι παραπάνω: επειδή το όριο $\phi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ γράφεται, συμβολικά, $\phi'(x) = \frac{dy}{dx}$, μπορούμε να γράψουμε την προσεγγιστική ισότητα

$$\Delta y \approx \phi'(x) \Delta x$$

ως εξής:

$$\text{Συμβολικά: } dy = \phi'(x) dx.$$

Επομένως:

Όταν κάνουμε αλλαγή μεταβλητής:

είτε ξεκινάμε από το $\int f(y) dy$ και αντικαθιστούμε το y με το $\phi(x)$ και το dy με το $\phi'(x) dx$ και καταλήγουμε στο $\int f(\phi(x)) \phi'(x) dx$,

είτε, αντιστρόφως, ξεκινάμε από το $\int f(\phi(x)) \phi'(x) dx$ και αντικαθιστούμε το $\phi(x)$ με το y και το $\phi'(x) dx$ με το dy και καταλήγουμε στο $\int f(y) dy$.

Φυσικά, αν υπάρχουν άκρα ολοκλήρωσης, τότε αντικαθιστούμε τα $\phi(a), \phi(b)$ με τα a, b ή, αντιστρόφως, τα a, b με τα $\phi(a), \phi(b)$.

Παράδειγμα 8.37. Θα βρούμε το $\int \sin^n x \cos x dx$ με $n \in \mathbb{N}$. Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $y = \sin x$ και, χρησιμοποιώντας την αντίστοιχη συμβολική ισότητα $dy = \cos x dx$, έχουμε

$$\int \sin^n x \cos x dx = \int y^n dy \Big|_{y=\sin x} = \left(\frac{y^{n+1}}{n+1} + c \right) \Big|_{y=\sin x} = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + c.$$

Παράδειγμα 8.38. Για να βρούμε το $\int \frac{2x}{x^2+1} dx$, χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής $y = x^2 + 1$ και την αντίστοιχη συμβολική ισότητα $dy = 2x dx$ και βρίσκουμε

$$\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \int \frac{1}{y} dy \Big|_{y=x^2+1} = (\log |y| + c) \Big|_{y=x^2+1} = \log(x^2 + 1) + c.$$

Παράδειγμα 8.39. Για να βρούμε το $\int_a^b \frac{1}{x \log x} dx$, χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής $y = \log x$ και την αντίστοιχη συμβολική ισότητα $dy = \frac{1}{x} dx$ και έχουμε

$$\int_a^b \frac{1}{x \log x} dx = \int_{\log a}^{\log b} \frac{1}{y} dy = \log |\log b| - \log |\log a| = \log \left| \frac{\log b}{\log a} \right|.$$

Πρέπει να προσέξουμε ώστε τα a, b να είναι τέτοια ώστε το σύνολο τιμών της $y = \log x$ το οποίο αντιστοιχεί στο διάστημα με άκρα a, b να περιέχεται στο ίδιο διάστημα του πεδίου ορισμού της $z = \frac{1}{y}$, δηλαδή είτε στο $(-\infty, 0)$ είτε στο $(0, +\infty)$. Αυτό το σύνολο τιμών της $y = \log x$ είναι το διάστημα με άκρα $\log a, \log b$. Άρα πρέπει: είτε (i) $\log a > 0, \log b > 0$, δηλαδή $a > 1, b > 1$, είτε (ii) $\log a < 0, \log b < 0$, δηλαδή $0 < a < 1, 0 < b < 1$. Ειδικότερα, παρατηρούμε ότι και στις δύο περιπτώσεις οι αριθμοί $\log a, \log b$ έχουν το ίδιο πρόσημο, οπότε

$$\int_a^b \frac{1}{x \log x} dx = \log \frac{\log b}{\log a}.$$

Ασκήσεις

8.22. Με αλλαγές μεταβλητής βρείτε τα $\int x^3 \cos(x^4) dx$, $\int \cos^2 x \sin x dx$, $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$, $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$, $\int \sqrt{2x+1} dx$, $\int \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx$, $\int x \sqrt{x+1} dx$, $\int x^2 \sqrt{2x+1} dx$, $\int \frac{x+1}{(x^2+2x+5)^2} dx$, $\int \sqrt{4-\sin x} \cos x dx$, $\int \frac{\sin x + \cos x}{(\sin x - \cos x)^3} dx$, $\int \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$, $\int x \sqrt[3]{x-1} dx$, $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^6}} dx$, $\int \frac{1}{1+e^x} dx$, $\int \frac{\sin x}{(2+\cos x)^3} dx$, $\int e^{3 \sin x} \cos x dx$, $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$, $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$, $\int x^2 e^{x^3} dx$, $\int \tan x dx$, $\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$, $\int \sqrt{1+3 \cos^2 x} \sin(2x) dx$, $\int \frac{1}{4+x^2} dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{1-x-x^2}} dx$, $\int \frac{1}{x^2-x+2} dx$, $\int \frac{1}{x(x^4+1)} dx$, $\int \sin^3 x dx$, $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx$, $\int \frac{1}{\sin^3 x} dx$, $\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}} dx$, $\int \sin^4 x dx$, $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$, $\int \frac{1}{2+\cos^2 x} dx$, $\int \frac{1}{1+\cos x} dx$, $\int \frac{\log x}{x \sqrt{1+\log x}} dx$.

8.23. Αποδείξτε τις παρακάτω ιδιότητες με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής.

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x-c) dx = \int_a^b f(x) dx, \quad \int_{\lambda a}^{\lambda b} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx.$$

Σχολιάστε το γεωμετρικό περιεχόμενο αυτών των ιδιοτήτων αν, επιπλέον, ισχύει $a < b$, $\lambda > 0$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

8.24. (i) Αν η $f : [-b, -a] \cup [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι άρτια, αποδείξτε ότι $\int_{-b}^{-a} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.

(ii) Αν η $f : [-b, -a] \cup [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή, αποδείξτε ότι $\int_{-b}^{-a} f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$.

(iii) Αν η $f : [-b, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι άρτια, αποδείξτε ότι $\int_{-b}^b f(x) dx = 2 \int_0^b f(x) dx$.

(iv) Αν η $f : [-b, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή, αποδείξτε ότι $\int_{-b}^b f(x) dx = 0$.

Ποιο είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο αυτών των ιδιοτήτων;

8.25. Αν η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιοδική με περίοδο $T > 0$, αποδείξτε ότι:

$$\int_{a+T}^{b+T} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx, \quad \int_a^{a+T} f(x) dx = \int_b^{b+T} f(x) dx.$$

Ποιο είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο αυτών των ιδιοτήτων;

8.26. Θεωρήστε την $f(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$ στο $(-\infty, +\infty)$.

(i) Αποδείξτε ότι f είναι περιοδική με περίοδο 1.

Σχεδιάστε το γράφημα της f και αποδείξτε με γεωμετρικό αλλά και με αναλυτικό τρόπο ότι:

(ii) $\int_k^{k+1} f(x) dx = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

(iii) $\int_k^{k+\frac{1}{2}} f(x) dx = -\frac{1}{8}$ και $\int_{k+\frac{1}{2}}^{k+1} f(x) dx = \frac{1}{8}$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

(iv) $-\frac{1}{8} \leq \int_a^b f(x) dx \leq \frac{1}{8}$ για κάθε a, b .

Θεωρήστε το αόριστο ολοκλήρωμα $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ στο $(-\infty, +\infty)$.

(v) Αποδείξτε ότι η F είναι περιοδική με περίοδο 1 και βρείτε τον τύπο της στο $[0, 1]$.

Θεωρήστε το αόριστο ολοκλήρωμα $G(x) = \int_0^x (F(t) + \frac{1}{12}) dt$ στο $(-\infty, +\infty)$.

(vi) Αποδείξτε ότι η G είναι περιοδική με περίοδο 1 και βρείτε τον τύπο της στο $[0, 1]$.

8.4.2 Μέθοδος ολοκλήρωσης κατά μέρη ή κατά παράγοντες

Πρόταση 8.8. Έστω διάστημα I και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχείς παραγώγους στο I . Τότε

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx \quad \text{για } x \in I,$$

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x) dx \quad \text{για } a \in I, b \in I.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε οποιαδήποτε παράγουσα $H(x)$ της $f'(x)g(x)$ στο διάστημα I , οπότε ισχύει $H'(x) = f'(x)g(x)$ για κάθε $x \in I$. Θεωρούμε και τη συνάρτηση $K(x) = f(x)g(x) - H(x)$ στο I . Τότε ισχύει

$$K'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - H'(x) = f(x)g'(x) \quad \text{για κάθε } x \in I,$$

οπότε η $K(x)$ είναι παράγουσα της $f(x)g'(x)$ στο I . Επομένως,

$$\begin{aligned} \int f(x)g'(x) dx &= K(x) + c = f(x)g(x) - H(x) + c = f(x)g(x) - (H(x) - c) \\ &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx \quad \text{για κάθε } x \in I. \end{aligned}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g'(x) dx &= K(b) - K(a) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - H(b) + H(a) \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x) dx \quad \text{για } a \in I, b \in I. \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 8.40.

$$\begin{aligned} \int \log x dx &= \int x' \log x dx = x \log x - \int x(\log x)' dx = x \log x - \int x \frac{1}{x} dx \\ &= x \log x - \int 1 dx = x \log x - x + c. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 8.41. Αν $a \neq 0$, τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \sin(bx) dx &= \frac{1}{a} \int (e^{ax})' \sin(bx) dx = \frac{1}{a} e^{ax} \sin(bx) - \frac{1}{a} \int e^{ax} (\sin(bx))' dx \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos(bx) dx \quad (\text{ολοκλήρωμα παρόμοιο με το αρχικό}) \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b}{a^2} \int (e^{ax})' \cos(bx) dx \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b}{a^2} e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a^2} \int e^{ax} (\cos(bx))' dx \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b}{a^2} e^{ax} \cos(bx) - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \sin(bx) dx. \end{aligned}$$

Άρα

$$(1 + \frac{b^2}{a^2}) \int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{1}{a^2} e^{ax} (a \sin(bx) - b \cos(bx)) + c,$$

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά, οπότε

$$\int e^{ax} \sin(bx) dx = e^{ax} \left(\frac{a}{a^2+b^2} \sin(bx) - \frac{b}{a^2+b^2} \cos(bx) \right) + c.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι ο τύπος αυτός ισχύει και στην περίπτωση κατά την οποία είναι $a = 0$ και $b \neq 0$, αφού τότε γράφεται $\int \sin(bx) dx = -\frac{1}{b} \cos(bx) + c$. Άρα έχουμε τον τύπο:

$$\int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{a}{a^2+b^2} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b}{a^2+b^2} e^{ax} \cos(bx) + c$$

για κάθε a, b με $a^2 + b^2 \neq 0$. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται και ο τύπος:

$$\int e^{ax} \cos(bx) dx = \frac{a}{a^2+b^2} e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a^2+b^2} e^{ax} \sin(bx) + c.$$

Παράδειγμα 8.42.

$$\begin{aligned} \int_0^2 x e^x dx &= \int_0^2 x(e^x)' dx = 2e^2 - 0e^0 - \int_0^2 x' e^x dx = 2e^2 - \int_0^2 e^x dx \\ &= 2e^2 - (e^2 - e^0) = e^2 + 1. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 8.43.

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x \sin x dx &= - \int_0^\pi x(\cos x)' dx = -\pi \cos \pi + 0 \cos 0 + \int_0^\pi x' \cos x dx \\ &= \pi + \int_0^\pi \cos x dx = \pi + (\sin \pi - \sin 0) = \pi. \end{aligned}$$

Ασκήσεις

8.27. Με ολοκληρώσεις κατά μέρη και αλλαγές μεταβλητής βρείτε τα $\int e^{-2x} \sin(3x) dx$, $\int x^3 e^{2x} dx$, $\int x^3 e^{-x^2} dx$, $\int e^{\sqrt{x}} dx$, $\int x^2 \sin x dx$, $\int x \log x dx$, $\int x^2 \log^4 x dx$, $\int \arcsin x dx$, $\int \sin^3 x \sin(5x) dx$, $\int x^2 \arcsin x dx$, $\int \arctan x dx$, $\int x \arctan^2 x dx$, $\int \arctan \sqrt{x} dx$, $\int \cos^2 x dx$, $\int \sin^4 x dx$, $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$, $\int \tan^2 x dx$, $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx$, $\int \frac{\arctan(e^x)}{e^x} dx$, $\int \frac{x e^{\arctan x}}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} dx$, $\int \log(x + \sqrt{1+x^2}) dx$.

8.28. Έστω συνεχής $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ορίζουμε τις $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αρχίζοντας από την $f_1(x) = \int_0^x f(t) dt$ και συνεχίζοντας με τον αναδρομικό τύπο $f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t) dt$. Αποδείξτε ότι ισχύει $f_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x f(t)(x-t)^{n-1} dt$ για κάθε n .

8.29. Αν $J_n(x) = \int \cos^n x dx$ και $I_n(x) = \int \sin^n x dx$ για $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, αποδείξτε ότι:

(i) $J_n(x) = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} J_{n-2}(x)$ για κάθε $n \geq 2$.

(ii) $I_n(x) = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}(x)$ για κάθε $n \geq 2$.

Βρείτε τις συναρτήσεις $J_1, \dots, J_6$ και $I_1, \dots, I_6$. Γενικεύστε.

8.30. Ορίζουμε $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ για $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$. Εφαρμόστε το αποτέλεσμα της άσκησης 8.29 και αποδείξτε ότι ισχύει $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ για κάθε $n \geq 2$.

Είναι προφανές ότι $I_0 = \frac{\pi}{2}$ και $I_1 = 1$. Αποδείξτε ότι:

(i) $I_{2n} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)(2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)(2n)} \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2}$.

(ii) $I_{2n+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)(2n)}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)(2n+1)} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$.

(iii) $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \left(\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \right)^2 (2n+1) \frac{\pi}{2}$.

(iv) $(n+1)I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.

(v) Δείτε ότι $I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1} = \frac{2n+1}{2n} I_{2n+1}$, οπότε $1 \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq 1 + \frac{1}{2n}$, οπότε $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \rightarrow 1$. Βάσει αυτού αποδείξτε τον **τύπο του Wallis**

$$\left(\frac{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)(2n)}{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)(2n-1)} \right)^2 \frac{1}{2n+1} \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

Αποδείξτε και το όριο

$$\frac{(2n)! \sqrt{n}}{4^n (n!)^2} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

όπου με τύπο $x_n = \frac{(2n)! \sqrt{n}}{4^n (n!)^2}$ είναι μία από τις ακολουθίες στην άσκηση 3.72.

8.31. Αν $I_n(x) = \int x^n e^{-x} dx$ και $J_n(x) = \int x^n e^x dx$ για $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, αποδείξτε ότι:

(i) $I_n(x) = -x^n e^{-x} + n I_{n-1}(x)$ για κάθε $n \geq 1$.

(ii) $J_n(x) = x^n e^x - n J_{n-1}(x)$ για κάθε $n \geq 1$.

Βρείτε τις συναρτήσεις I_n και J_n και να αντιπαραβάλετε με την άσκηση 8.7.

8.32. Αποδείξτε ότι:

(i) $\int x^n e^{-x^2} dx = p_{n-1}(x) e^{-x^2} + c$ για κάθε περιττό $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $\int x^n e^{-x^2} dx = p_{n-1}(x) e^{-x^2} + \int e^{-x^2} dx$ για κάθε άρτιο $n \in \mathbb{N}$,

όπου $p_{n-1}(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $n-1$ και c είναι αυθαίρετη σταθερά.

Παραεμπιπτόντως, το $\int e^{-x^2} dx$ δεν υπολογίζεται βάσει των γνωστών στοιχειωδών συναρτήσεων. Το αόριστο ολοκλήρωμα $\int_0^x e^{-t^2} dt$ θεωρείται πολύ σημαντική συνάρτηση ειδικά για την περιοχή της Στατιστικής και των Πιθανοτήτων.

8.33. Αν $I_{m,n}(x) = \int x^m (1-x)^n dx$ για $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$, αποδείξτε ότι:

(i) $I_{m,n}(x) = \frac{x^{m+1}(1-x)^n}{m+1} + \frac{n}{m+1} I_{m+1,n-1}(x)$ για κάθε $m \neq -1$, $n \neq 0$.

(ii) $I_{m,n}(x) = -\frac{x^m(1-x)^{n+1}}{n+1} + \frac{m}{n+1}I_{m-1,n+1}(x)$ για κάθε $m \neq 0, n \neq -1$.

Αποδείξτε ότι

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

για κάθε $m \geq 0, n \geq 0$.

8.34. Αν $I_{m,n}(x) = \int \cos^m x \sin^n x dx$ για $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, m \geq 0, n \geq 0$, αποδείξτε ότι:

(i) $I_{m,n}(x) = \frac{\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}I_{m-2,n}(x)$ για κάθε $m \geq 2$.

(ii) $I_{m,n}(x) = -\frac{\cos^{m+1} x \sin^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}I_{m,n-2}(x)$ για κάθε $n \geq 2$.

Αν $I_{m,n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin^n x dx$ για $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, m \geq 0, n \geq 0$, αποδείξτε ότι:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin^n x dx = \begin{cases} \frac{(m-1)(m-3)\cdots 1 \cdot (n-1)(n-3)\cdots 1}{(m+n)(m+n-2)\cdots 2} \frac{\pi}{2}, & \text{αν } m, n \text{ άρτια,} \\ \frac{(m-1)(m-3)\cdots (1 \text{ ή } 2) \cdot (n-1)(n-3)\cdots (1 \text{ ή } 2)}{(m+n)(m+n-2)\cdots (1 \text{ ή } 2)}, & \text{αν } m \text{ περιττό ή } n \text{ περιττό.} \end{cases}$$

8.35. (i) Έστω $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε η ϕ'' να είναι συνεχής στο $[a, b]$, ώστε η ϕ' να είναι μονότονη στο $[a, b]$ και ώστε να ισχύει $\phi'(x) \geq m$ για κάθε $x \in [a, b]$ και για κάποια σταθερά $m > 0$. Αποδείξτε ότι $\left| \int_a^b \sin(\phi(x)) dx \right| \leq \frac{2}{m}$.

Υπόδειξη: Πολλαπλασιάστε και διαιρέστε με το $\phi'(x)$.

(ii) Αποδείξτε ότι ισχύει $\left| \int_a^b \sin(x^2) dx \right| \leq \frac{1}{a}$ για κάθε a, b με $0 < a < b$.

8.36. Έστω $P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$ για $n \in \mathbb{N}$.

(i) Αποδείξτε ότι το $P_n(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n .

(ii) Αποδείξτε ότι $\int_{-1}^1 p(x)P_n(x) dx = 0$ για κάθε πολυώνυμο $p(x)$ βαθμού μικρότερου από n .

(iii) Αποδείξτε ότι $\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{αν } n \neq m, \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{αν } n = m. \end{cases}$

8.4.3 Ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων

Θα περιγράψουμε μία γενική μέθοδο υπολογισμού του

$$\int r(x) dx = \int \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} dx,$$

όπου $r(x) = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$ είναι οποιαδήποτε ρητή συνάρτηση.

Πρώτο βήμα. Αναγώμαστε στην περίπτωση κατά την οποία ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος από τον βαθμό του παρονομαστή. Αν $m < n$ εξαρχής, τότε παραλείπουμε το πρώτο βήμα. Αν, όμως, $m \geq n$, τότε διαιρούμε τα πολυώνυμα και βρίσκουμε πολυώνυμα $p(x)$ και $q(x)$ ώστε ο βαθμός του $q(x)$ να είναι $< n$ και να ισχύει

$$a_m x^m + \cdots + a_0 = p(x)(b_n x^n + \cdots + b_0) + q(x)$$

για κάθε x . Τότε

$$\int r(x) dx = \int p(x) dx + \int \frac{q(x)}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} dx.$$

Το $\int p(x) dx$ υπολογίζεται εύκολα, οπότε στο εξής μπορούμε να υποθέσουμε ότι $m < n$.

Δεύτερο βήμα. Αναλύουμε τον παρονομαστή σε γινόμενο πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων παραγόντων. Αυτό ισοδυναμεί με το να βρούμε τις ρίζες του παρονομαστή και είναι, εν γένει, πολύ δύσκολο ή και αδύνατο, αλλά σε μερικές περιπτώσεις είναι εφικτό. Το γενικό συμπέρασμα είναι το εξής.

Κάθε πολυώνυμο $b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$ μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων

$$\begin{aligned} b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0 &= b_n (x - \alpha)^k \dots (x - \gamma)^l ((x - \mu)^2 + \nu^2)^p \dots ((x - \epsilon)^2 + \delta^2)^t \\ &= b_n (x - \alpha)^k \dots (x - \gamma)^l (x - \mu - i\nu)^p (x - \mu + i\nu)^p \dots (x - \epsilon - i\delta)^t (x - \epsilon + i\delta)^t, \end{aligned}$$

όπου $\kappa, \dots, \lambda, \rho, \dots, \tau$ είναι φυσικοί με $\kappa + \dots + \lambda + 2\rho + \dots + 2\tau = n$ και όπου $\nu > 0, \dots, \delta > 0$.

Στην παραπάνω ανάλυση η ύπαρξη των πρωτοβάθμιων όρων $x - \alpha, \dots, x - \gamma$ ισοδυναμεί με το ότι τα αντίστοιχα $\alpha, \dots, \gamma$ είναι όλες οι πραγματικές ρίζες του πολυωνύμου και οι αντίστοιχοι εκθέτες $\kappa, \dots, \lambda$ είναι οι πολλαπλότητες αυτών των ριζών. Επίσης, η ύπαρξη των δευτεροβάθμιων όρων $(x - \mu)^2 + \nu^2, \dots, (x - \epsilon)^2 + \delta^2$ ισοδυναμεί με το ότι οι αντίστοιχοι μιγαδικοί αριθμοί $\mu \pm i\nu, \dots, \epsilon \pm i\delta$ είναι όλες οι μιγαδικές ρίζες του πολυωνύμου και οι αντίστοιχοι εκθέτες $\rho, \dots, \tau$ είναι οι πολλαπλότητες αυτών των ριζών. Επίσης, οι πραγματικές ρίζες $\alpha, \dots, \gamma$ καθορίζουν τα διαστήματα στα οποία ορίζεται το αόριστο ολοκλήρωμά μας: είναι τα διαδοχικά ανοικτά διαστήματα με άκρα τα $-\infty, \alpha, \dots, \gamma, +\infty$.

Τρίτο βήμα. Αναλύουμε τη ρητή συνάρτηση σε απλούς λόγους:

$$\begin{aligned} r(x) &= \left(\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \dots + \frac{A_\kappa}{(x-\alpha)^\kappa} \right) + \dots + \left(\frac{\Gamma_1}{x-\gamma} + \frac{\Gamma_2}{(x-\gamma)^2} + \dots + \frac{\Gamma_\lambda}{(x-\gamma)^\lambda} \right) \\ &\quad + \left(\frac{M_1(x-\mu)+N_1}{(x-\mu)^2+\nu^2} + \frac{M_2(x-\mu)+N_2}{((x-\mu)^2+\nu^2)^2} + \dots + \frac{M_\rho(x-\mu)+N_\rho}{((x-\mu)^2+\nu^2)^\rho} \right) + \dots \\ &\quad \dots + \left(\frac{E_1(x-\epsilon)+\Delta_1}{(x-\epsilon)^2+\delta^2} + \frac{E_2(x-\epsilon)+\Delta_2}{((x-\epsilon)^2+\delta^2)^2} + \dots + \frac{E_\tau(x-\epsilon)+\Delta_\tau}{((x-\epsilon)^2+\delta^2)^\tau} \right). \end{aligned}$$

Η «λογική» είναι απλή. Κάθε παράγων $x - \alpha, \dots, x - \gamma$ του παρονομαστή καθορίζει μία ομάδα λόγων, με αριθμούς ως αριθμητές και δυνάμεις του ίδιου παράγοντα με εκθέτες από 1 έως $\kappa, \dots$, από 1 έως λ , αντιστοίχως, ως παρονομαστές. Επίσης, κάθε παράγων $(x - \mu)^2 + \nu^2, \dots, (x - \epsilon)^2 + \delta^2$ καθορίζει μία ομάδα λόγων, με πρωτοβάθμιους όρους ως αριθμητές και δυνάμεις του ίδιου παράγοντα με εκθέτες από 1 έως $\rho, \dots$, από 1 έως τ , αντιστοίχως, ως παρονομαστές. Οι αριθμοί $A_1, A_2, \dots, E_\tau, \Delta_\tau$ είναι άγνωστοι και πρέπει να υπολογιστούν. Αυτό επιτυγχάνεται με απαλοιφή των παρονομαστών αν πολλαπλασιάσουμε με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιό τους, δηλαδή το $b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0$. Κατόπιν, εξισώνουμε τους αντίστοιχους συντελεστές των δύο πολυωνύμων τα οποία προκύπτουν, βρίσκουμε ένα σύστημα n εξισώσεων με τους n αγνώστους $A_1, A_2, \dots, E_\tau, \Delta_\tau$, και το λύνουμε. (Μην ανησυχείτε! Θα δούμε παραδείγματα σε πολύ λίγο.)

Τέταρτο βήμα. Το πρόβλημα, λοιπόν, ανάγεται στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων των εξής τριών τύπων:

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^k} dx, \quad \int \frac{x-\mu}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k} dx, \quad \int \frac{1}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k} dx,$$

όπου $k \in \mathbb{N}$. Εξετάζουμε καθέναν από τους τρεις τύπους ξεχωριστά.

(i) Για το $\int \frac{1}{(x-\alpha)^k} dx$, είτε στο διάστημα $(-\infty, \alpha)$ είτε στο $(\alpha, +\infty)$, χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής $y = x - \alpha$ και τη συμβολική ισότητα $dy = dx$ και βρίσκουμε

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^k} dx = \int \frac{1}{y^k} dy \Big|_{y=x-\alpha}.$$

Αν $k \geq 2$, τότε

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^k} dx = \left(-\frac{1}{k-1} \frac{1}{y^{k-1}} + c \right) \Big|_{y=x-\alpha} = -\frac{1}{k-1} \frac{1}{(x-\alpha)^{k-1}} + c.$$

Αν $k = 1$, τότε

$$\int \frac{1}{x-\alpha} dx = (\log |y| + c) \Big|_{y=x-\alpha} = \log |x - \alpha| + c.$$

(ii) Για το $\int \frac{x-\mu}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k} dx$, με αλλαγή μεταβλητής $y = (x - \mu)^2 + \nu^2$ και $dy = 2(x - \mu) dx$ βρίσκουμε

$$\int \frac{x-\mu}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{y^k} dy \Big|_{y=(x-\mu)^2+\nu^2}.$$

Αν $k \geq 2$, τότε

$$\int \frac{x-\mu}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k} dx = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{k-1} \frac{1}{y^{k-1}} + c \right) \Big|_{y=(x-\mu)^2+\nu^2} = -\frac{1}{2(k-1)} \frac{1}{((x-\mu)^2+\nu^2)^{k-1}} + c.$$

Αν $k = 1$, τότε

$$\int \frac{x-\mu}{(x-\mu)^2+\nu^2} dx = \frac{1}{2}(\log |y| + c) \Big|_{y=(x-\mu)^2+\nu^2} = \frac{1}{2} \log((x-\mu)^2 + \nu^2) + c.$$

(iii) Τέλος, για το $\int \frac{1}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k} dx$, με την αλλαγή μεταβλητής $x - \mu = \nu y$ και την $dx = \nu dy$ βρίσκουμε

$$\int \frac{1}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k} dx = \frac{1}{\nu^{2k-1}} \int \frac{1}{(y^2+1)^k} dy \Big|_{y=\frac{x-\mu}{\nu}}.$$

Έτσι αναγόμεν στο ολοκλήρωμα

$$I_k = \int \frac{1}{(y^2+1)^k} dy,$$

όπου $k \in \mathbb{N}$. Αυτό είναι πιο περίπλοκο από τα προηγούμενα και υπολογίζεται με *αναδρομικό τύπο*.

Κατ' αρχάς, αν $k = 1$, τότε

$$I_1 = \int \frac{1}{y^2+1} dy = \arctan y + c.$$

Αν $k > 1$, τότε

$$\begin{aligned} I_k &= \int \frac{1}{(y^2+1)^k} dy = \int \frac{y^2+1}{(y^2+1)^k} dy - \int \frac{y^2}{(y^2+1)^k} dy \\ &= \int \frac{1}{(y^2+1)^{k-1}} dy - \int y \frac{y}{(y^2+1)^k} dy = I_{k-1} + \frac{1}{2(k-1)} \int y \left(\frac{1}{(y^2+1)^{k-1}} \right)' dy \\ &= I_{k-1} + \frac{1}{2(k-1)} \frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} - \frac{1}{2(k-1)} \int \frac{1}{(y^2+1)^{k-1}} dy \\ &= \frac{1}{2k-2} \frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2k-2} I_{k-1}. \end{aligned}$$

Ο αναδρομικός αυτός τύπος ανάγει τον υπολογισμό του I_k στον υπολογισμό του I_{k-1} και, επαγωγικά, στο I_1 .

Επιστρέφοντας στο $\int r(x) dx$, καταλήγουμε στο ότι:

(i) Κάθε ομάδα όρων $\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k}$ θα συνεισφέρει στο ολοκλήρωμα μία αντίστοιχη ομάδα

$$A_1 \log |x - \alpha| - \frac{A_2}{x-\alpha} - \dots - \frac{A_k}{(k-1)(x-\alpha)^{k-1}}.$$

(ii) Κάθε ομάδα $\frac{M_1(x-\mu)}{(x-\mu)^2+\nu^2} + \frac{M_2(x-\mu)}{((x-\mu)^2+\nu^2)^2} + \dots + \frac{M_\rho(x-\mu)}{((x-\mu)^2+\nu^2)^\rho}$ θα συνεισφέρει μία αντίστοιχη ομάδα

$$\frac{M_1}{2} \log((x-\mu)^2 + \nu^2) - \frac{M_2}{2((x-\mu)^2+\nu^2)} - \dots - \frac{M_\rho}{2(\rho-1)((x-\mu)^2+\nu^2)^{\rho-1}}.$$

(iii) Κάθε ομάδα $\frac{N_1}{(x-\mu)^2+\nu^2} + \frac{N_2}{((x-\mu)^2+\nu^2)^2} + \dots + \frac{N_\rho}{((x-\mu)^2+\nu^2)^\rho}$ θα συνεισφέρει μία αντίστοιχη ομάδα

$$N'_1 \arctan \frac{x-\mu}{\nu} + \frac{N'_2(x-\mu)}{(x-\mu)^2+\nu^2} + \dots + \frac{N'_\rho(x-\mu)}{((x-\mu)^2+\nu^2)^{\rho-1}},$$

όπου οι συντελεστές $N'_1, \dots, N'_\rho$ είναι διαφορετικοί από τους $N_1, \dots, N_\rho$.

Παράδειγμα 8.44. $\int \frac{2}{x-3} dx = 2 \log |x-3| + c.$

Παράδειγμα 8.45. $\int \frac{-5}{(x+2)^3} dx = \frac{5}{2} \frac{1}{(x+2)^2} + c.$

Παράδειγμα 8.46. Για το $\int \frac{1}{(x+1)^2+9} dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $x+1 = 3y$ και $dx = 3dy$, οπότε

$$\int \frac{1}{(x+1)^2+9} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{y^2+1} dy \Big|_{y=\frac{x+1}{3}} = \left(\frac{1}{3} \arctan y + c \right) \Big|_{y=\frac{x+1}{3}} = \frac{1}{3} \arctan \frac{x+1}{3} + c.$$

Παράδειγμα 8.47. Για το $\int \frac{x}{x^2+4} dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = x^2 + 4$, οπότε

$$\int \frac{x}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{y} dy \Big|_{y=x^2+4} = \frac{1}{2} (\log |y| + c) \Big|_{y=x^2+4} = \frac{1}{2} \log(x^2 + 4) + c.$$

Παράδειγμα 8.48. Για το $\int \frac{x}{(x^2+4)^4} dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = x^2 + 4$:

$$\int \frac{x}{(x^2+4)^4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{y^4} dy \Big|_{y=x^2+4} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3y^3} + c \right) \Big|_{y=x^2+4} = -\frac{1}{6(x^2+4)^3} + c.$$

Παράδειγμα 8.49. Για να υπολογίσουμε το $\int \frac{x^3-2x^2+2}{x^2-3x+2} dx$, κατ' αρχάς διαιρούμε το $x^3 - 2x^2 + 2$ με το $x^2 - 3x + 2$ και βρίσκουμε

$$x^3 - 2x^2 + 2 = (x^2 - 3x + 2)(x + 1) + x$$

ή, ισοδύναμα,

$$\frac{x^3-2x^2+2}{x^2-3x+2} = x + 1 + \frac{x}{x^2-3x+2}.$$

Άρα

$$\int \frac{x^3-2x^2+2}{x^2-3x+2} dx = \int (x + 1) dx + \int \frac{x}{x^2-3x+2} dx = \frac{1}{2}x^2 + x + \int \frac{x}{x^2-3x+2} dx.$$

Για να υπολογίσουμε το $\int \frac{x}{x^2-3x+2} dx$, αναλύουμε τον λόγο $\frac{x}{x^2-3x+2}$ σε απλούς λόγους. Οι ρίζες του $x^2 - 3x + 2$ είναι οι 1 και 2, οπότε

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2).$$

Άρα ο λόγος $\frac{x}{x^2-3x+2}$ γράφεται:

$$\frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2},$$

όπου οι αριθμοί A, B πρέπει να προσδιοριστούν. Πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη της τελευταίας ισότητας με το $(x - 1)(x - 2)$ και προκύπτει

$$x = (A + B)x + (-2A - B).$$

Εξισώνουμε τους συντελεστές των ομοιόβαθμων μονωνύμων των δύο μελών της τελευταίας ισότητας και βρίσκουμε

$$A + B = 1, \quad -2A - B = 0.$$

Το σύστημα αυτό έχει λύση $A = -1, B = 2$. Άρα

$$\frac{x}{x^2-3x+2} = -\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2}.$$

Επομένως,

$$\int \frac{x}{x^2-3x+2} dx = -\int \frac{1}{x-1} dx + 2 \int \frac{1}{x-2} dx = -\log|x-1| + 2 \log|x-2| + c$$

και, τέλος,

$$\int \frac{x^3-2x^2+2}{x^2-3x+2} dx = \frac{1}{2}x^2 + x - \log|x-1| + 2 \log|x-2| + c.$$

Παράδειγμα 8.50. Για να υπολογίσουμε το $\int \frac{2x^2+1}{x^3+x^2-x-1} dx$, αναλύουμε το $\frac{2x^2+1}{x^3+x^2-x-1}$ σε απλούς λόγους. Παραγοντοποιούμε το $x^3 + x^2 - x - 1$ ως εξής:

$$x^3 + x^2 - x - 1 = x^2(x + 1) - (x + 1) = (x^2 - 1)(x + 1) = (x - 1)(x + 1)^2.$$

Δηλαδή, το $x^3 + x^2 - x - 1$ έχει απλή ρίζα το 1 και διπλή ρίζα το -1 . Άρα ο λόγος $\frac{2x^2+1}{x^3+x^2-x-1}$ γράφεται:

$$\frac{2x^2+1}{x^3+x^2-x-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}.$$

Πολλαπλασιάζουμε με το $(x - 1)(x + 1)^2$, εξισώνουμε συντελεστές και βρίσκουμε

$$A + B = 2, \quad 2A + C = 0, \quad A - B - C = 1.$$

Το σύστημα αυτό έχει λύση $A = \frac{3}{4}, B = \frac{5}{4}, C = -\frac{3}{2}$. Άρα

$$\frac{2x^2+1}{x^3+x^2-x-1} = \frac{3}{4} \frac{1}{x-1} + \frac{5}{4} \frac{1}{x+1} - \frac{3}{2} \frac{1}{(x+1)^2},$$

οπότε

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2+1}{x^3+x^2-x-1} dx &= \frac{3}{4} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{5}{4} \int \frac{1}{x+1} dx - \frac{3}{2} \int \frac{1}{(x+1)^2} dx \\ &= \frac{3}{4} \log|x-1| + \frac{5}{4} \log|x+1| + \frac{3}{2} \frac{1}{x+1} + c. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 8.51. Για να βρούμε το $\int \frac{x}{x^4-x^2-2x+2} dx$, αναλύουμε το $\frac{x}{x^4-x^2-2x+2}$ σε απλούς λόγους. Παραγοντοποιούμε:

$$\begin{aligned} x^4 - x^2 - 2x + 2 &= x^2(x^2 - 1) - 2(x - 1) = (x - 1)(x^3 + x^2 - 2) \\ &= (x - 1)(x^3 - 1 + x^2 - 1) = (x - 1)^2(x^2 + 2x + 2). \end{aligned}$$

Δηλαδή, το $x^4 - x^2 - 2x + 2$ έχει διπλή ρίζα το 1 και καμία άλλη ρίζα, διότι το $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1$ δεν έχει πραγματικές ρίζες. Άρα ο λόγος $\frac{x}{x^4-x^2-2x+2}$ γράφεται:

$$\frac{x}{x^4-x^2-2x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C(x+1)+D}{(x+1)^2+1}.$$

Πολλαπλασιάζουμε με το $(x - 1)^2((x + 1)^2 + 1)$, εξισώνουμε συντελεστές και βρίσκουμε

$$A + C = 0, \quad A + B - C + D = 0, \quad 2B - C - 2D = 1, \quad -2A + 2B + C + D = 0.$$

Το σύστημα έχει λύση $A = \frac{1}{25}$, $B = \frac{1}{5}$, $C = -\frac{1}{25}$, $D = -\frac{7}{25}$. Άρα

$$\frac{x}{x^4-x^2-2x+2} = \frac{1}{25} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{5} \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{25} \frac{x+1}{(x+1)^2+1} - \frac{7}{25} \frac{1}{(x+1)^2+1},$$

οπότε

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^4-x^2-2x+2} dx &= \frac{1}{25} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{1}{5} \int \frac{1}{(x-1)^2} dx - \frac{1}{25} \int \frac{x+1}{(x+1)^2+1} dx - \frac{7}{25} \int \frac{1}{(x+1)^2+1} dx \\ &= \frac{1}{25} \log |x-1| - \frac{1}{5} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{50} \log((x+1)^2+1) - \frac{7}{25} \arctan(x+1) + c. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 8.52. Θα υπολογίσουμε το $\int \frac{x^7+6x^6-x}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1} dx$. Διαιρώντας, βρίσκουμε

$$\frac{x^7+6x^6-x}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1} = x^2 + 7x + 5 + \frac{-7x^4+3x^3+4x^2+x+5}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}.$$

Άρα

$$\int \frac{x^7+6x^6-x}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1} dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 5x + \int \frac{-7x^4+3x^3+4x^2+x+5}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1} dx.$$

Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή:

$$\begin{aligned} x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1 &= x^4(x - 1) + 2x^2(x - 1) + (x - 1) \\ &= (x^4 + 2x^2 + 1)(x - 1) = (x^2 + 1)^2(x - 1) \end{aligned}$$

Αναλύουμε το $\frac{-7x^4+3x^3+4x^2+x+5}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1} = \frac{-7x^4+3x^3+4x^2+x+5}{(x^2+1)^2(x-1)}$ σε απλούς λόγους:

$$\frac{-7x^4+3x^3+4x^2+x+5}{(x^2+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Πολλαπλασιάζουμε με το $(x^2 + 1)^2(x - 1)$, εξισώνουμε συντελεστές και βρίσκουμε

$$A + B = -7, \quad -B + C = 3, \quad 2A + B - C + D = 4, \quad -B + C - D + E = 1, \quad A - C - E = 5.$$

Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε $A = \frac{3}{2}$, $B = -\frac{17}{2}$, $C = -\frac{11}{2}$, $D = 4$ και $E = 2$. Άρα

$$\begin{aligned} \int \frac{-7x^4+3x^3+4x^2+x+5}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1} dx &= \frac{3}{2} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{17x+11}{x^2+1} dx + 2 \int \frac{2x+1}{(x^2+1)^2} dx \\ &= \frac{3}{2} \log |x-1| - \frac{17}{4} \log(x^2+1) - \frac{11}{2} \arctan x - \frac{2}{x^2+1} + 2 \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx. \end{aligned}$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx &= \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2} dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{1}{x^2+1} dx - \int x \frac{x}{(x^2+1)^2} dx \\ &= \arctan x + \frac{1}{2} \int x \left(\frac{1}{x^2+1} \right)' dx = \arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)} + c. \end{aligned}$$

Συγκεντρώνοντας όλους τους υπολογισμούς, βρίσκουμε:

$$\int \frac{x^7+6x^6-x}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1} dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 5x + \frac{x-2}{x^2+1} + \frac{3}{2} \log |x-1| - \frac{17}{4} \log(x^2+1) - \frac{9}{2} \arctan x + c.$$

Ασκήσεις

8.37. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων $\int \frac{5x+3}{x^2+2x-3} dx$, $\int \frac{x+2}{x^2-4x+4} dx$, $\int \frac{x^2+1}{(2x-1)^3} dx$, $\int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x} dx$, $\int \frac{x^2+2x+3}{x^3+x^2-x-1} dx$, $\int \frac{3x^2+2x-2}{x^3-1} dx$, $\int \frac{1}{x^4-1} dx$, $\int \frac{x^2+x+1}{(x-1)^4} dx$, $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4} dx$, $\int \frac{1}{x^4-2x^2+1} dx$, $\int \frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)} dx$, $\int \frac{8x^3+7}{x^4+2x^3-2x-1} dx$, $\int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2} dx$, $\int \frac{x^4-x^3+2x^2-x+2}{(x-1)(x^4+4x^2+4)} dx$, $\int \frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3} dx$, $\int \frac{1}{(x^2-2x+1)(x^4+2x^2+1)} dx$, $\int \frac{1}{x^4+1} dx$, $\int \frac{1}{x^5+1} dx$, $\int \frac{1}{x^6+1} dx$, $\int \frac{1}{x^8+1} dx$.

8.38. Έχουμε δει τα ολοκληρώματα $I_k = \int \frac{1}{(y^2+1)^k} dy$. Γράψτε τους τύπους των I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 .

8.4.4 Ολοκληρώματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Θα δούμε μία μέθοδο υπολογισμού ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\int r(\cos x, \sin x) dx,$$

όπου η $r(s, t)$ είναι ρητή συνάρτηση δύο μεταβλητών s, t . Δηλαδή, η $f(x) = r(\cos x, \sin x)$ είναι ίση με $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, όπου οι $f_1(x)$ και $f_2(x)$ είναι αθροίσματα γινομένων $a \cos^k x \sin^l x$, όπου a είναι αριθμός και τα k, l είναι μη-αρνητικοί ακέραιοι.

Παράδειγμα 8.53. Στο $\int \frac{\sin x + \cos^3 x - \sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos^2 x} dx$ έχουμε $f(x) = \frac{\sin x + \cos^3 x - \sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos^2 x}$, $f_1(x) = \sin x + \cos^3 x - \sin^2 x \cos x$, $f_2(x) = \sin x + \cos^2 x$ και η ρητή συνάρτηση είναι η $r(s, t) = \frac{t+s^3-t^2s}{t+s^2}$.

Επειδή οι συναρτήσεις $\cos x$ και $\sin x$ έχουν περίοδο 2π , μπορούμε να υποθέσουμε ότι το x κινείται σε κάποιο προεπιλεγμένο διάστημα μήκους 2π και εδώ θα θεωρήσουμε το $[-\pi, \pi]$. Φυσικά, υπάρχει περίπτωση, ανάλογα με το συγκεκριμένο παράδειγμα συνάρτησης $f(x) = r(\cos x, \sin x)$, να πρέπει να περιορίσουμε το x σε υποδιαστήματα του $[-\pi, \pi]$ έτσι ώστε να μη μηδενίζεται ο παρονομαστής της συνάρτησης.

Τώρα θεωρούμε την αλλαγή μεταβλητής

$$u = \tan \frac{x}{2}.$$

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $\tan \frac{x}{2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\pi, \pi)$ και επί του $(-\infty, +\infty)$. Δηλαδή, όταν το x διατρέχει το $(-\pi, \pi)$, τότε το u διατρέχει το $(-\infty, +\infty)$, και αντιστρόφως. Λύνοντας την $u = \tan \frac{x}{2}$ ως προς x , έχουμε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης:

$$x = 2 \arctan u.$$

Παραγωγίζοντας, βρίσκουμε τη συμβολική ισότητα

$$dx = \frac{2}{1+u^2} du.$$

Θα χρειαστούμε επίσης τους τύπους (εξετάστε ξανά την άσκηση 1.38)

$$\cos x = \frac{1-\tan^2 \frac{x}{2}}{1+\tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1+\tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2}.$$

Αρα, με την αλλαγή μεταβλητής την οποία κάναμε, προκύπτει

$$\int r(\cos x, \sin x) dx = \int r\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2}\right) \frac{2}{1+u^2} du \Big|_{u=\tan \frac{x}{2}},$$

οπότε το αρχικό ολοκλήρωμα συνάρτησης του x μετατράπηκε σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του u , οπότε μπορούμε να το χειριστούμε με τις μεθόδους της προηγούμενης υποενότητας. Έστω, λοιπόν, ότι υπολογίζουμε το

$$\int r\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2}\right) \frac{2}{1+u^2} du = G(u) + c,$$

όπου η $G(u)$ είναι κάποια συγκεκριμένη συνάρτηση του u . Τότε, βάσει των παραπάνω, ισχύει

$$\int r(\cos x, \sin x) dx = G(\tan \frac{x}{2}) + c.$$

Στα προηγούμενα υποθέσαμε ότι το x βρίσκεται στο διάστημα $[-\pi, \pi]$. Μάλιστα, περιοριστήκαμε στο μικρότερο διάστημα $(-\pi, \pi)$, αφού το $u = \tan \frac{x}{2}$ απειρίζεται στα άκρα του διαστήματος. Η συμπεριφορά του $\int r(\cos x, \sin x) dx = G(\tan \frac{x}{2}) + c$ όταν το $x \in (-\pi, \pi)$ προσεγγίζει τα άκρα $-\pi, \pi$ καθορίζεται, προφανώς, από τη συμπεριφορά της $G(u)$ όταν το $u = \tan \frac{x}{2}$ τείνει στα $-\infty, +\infty$, αντιστοίχως. Εντελώς ανάλογη είναι η μελέτη του $\int r(\cos x, \sin x) dx$ όταν το x βρίσκεται σε οποιοδήποτε διάστημα $[(2k-1)\pi, (2k+1)\pi]$ με $k \in \mathbb{Z}$, όπου εμείς είδαμε την περίπτωση $k=0$. Δεν θα ασχοληθούμε, όμως, με την περίπτωση¹ κατά την οποία το x κινείται σε διαστήματα μήκους $> 2\pi$ ή ακόμη και σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ το οποίο είναι η ένωση όλων των διαστημάτων $[(2k-1)\pi, (2k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Παράδειγμα 8.54. Θα υπολογίσουμε το $\int \frac{1}{\sin x} dx$.

Με την αλλαγή μεταβλητής $u = \tan \frac{x}{2}$, η $\frac{1}{\sin x}$ μετατρέπεται στην $\frac{1+u^2}{2u}$. Τώρα έχουμε

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1+u^2}{2u} \frac{2}{1+u^2} du \Big|_{u=\tan \frac{x}{2}} = \int \frac{1}{u} du \Big|_{u=\tan \frac{x}{2}} = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c.$$

Παράδειγμα 8.55. Θα υπολογίσουμε το $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$. Το ολοκλήρωμα αυτό μας είναι ήδη γνωστό από το παράδειγμα 8.25 και είναι ευκαιρία να ελέγξουμε τη μέθοδο την οποία αναπτύξαμε.

Με την αλλαγή μεταβλητής $u = \tan \frac{x}{2}$, η $\frac{1}{\cos^2 x}$ μετατρέπεται στην $\frac{(1+u^2)^2}{(1-u^2)^2}$. Τώρα,

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{(1+u^2)^2}{(1-u^2)^2} \frac{2}{1+u^2} du \Big|_{u=\tan \frac{x}{2}} = 2 \int \frac{1+u^2}{(1-u^2)^2} du \Big|_{u=\tan \frac{x}{2}}.$$

Υπολογίζουμε, με τις μεθόδους της προηγούμενης υποενότητας,

$$2 \int \frac{1+u^2}{(1-u^2)^2} du = \frac{2u}{1-u^2} + c,$$

οπότε

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \frac{2u}{1-u^2} \Big|_{u=\tan \frac{x}{2}} + c = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1-\tan^2 \frac{x}{2}} + c = \tan x + c.$$

Παράδειγμα 8.56. Θα υπολογίσουμε το $\int \frac{1}{2+\sin x} dx$.

Με την αλλαγή μεταβλητής $u = \tan \frac{x}{2}$ και τη συνεπαγόμενη $\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1+\tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2}$, η παράσταση $\frac{1}{2+\sin x}$ μετατρέπεται στην $\frac{1+u^2}{2(1+u+u^2)}$. Τώρα,

$$\int \frac{1}{2+\sin x} dx = \int \frac{1+u^2}{2(1+u+u^2)} \frac{2}{1+u^2} du \Big|_{u=\tan \frac{x}{2}} = \int \frac{1}{u^2+u+1} du \Big|_{u=\tan \frac{x}{2}}.$$

Υπολογίζουμε

$$\int \frac{1}{u^2+u+1} du = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2u+1}{\sqrt{3}} + c,$$

οπότε

$$\int \frac{1}{2+\sin x} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2u+1}{\sqrt{3}} \Big|_{u=\tan \frac{x}{2}} + c = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + c.$$

Ασκήσεις

8.39. Βρείτε τα $\int \frac{1}{(1+\cos x)^2} dx$, $\int \frac{1}{1+2\sin x} dx$, $\int \frac{1}{5+3\cos x} dx$, $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x} dx$, $\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x} dx$.

¹ Δείτε τις σημειώσεις «Ανάλυση» [1].

8.4.5 Ολοκληρώματα μερικών αλγεβρικών συναρτήσεων

Τώρα θα εξετάσουμε αόριστα ολοκληρώματα των εξής τριών τύπων:

$$\int r(x, \sqrt{x^2 - 1}) dx, \quad \int r(x, \sqrt{1 - x^2}) dx, \quad \int r(x, \sqrt{x^2 + 1}) dx.$$

Και στα τρία ολοκληρώματα η συνάρτηση $r(s, t)$ είναι ρητή συνάρτηση δύο μεταβλητών s, t .

(i) Στο πρώτο ολοκλήρωμα ένας προφανής περιορισμός για το x προκύπτει από την ανισότητα $x^2 \geq 1$, οπότε το αόριστο ολοκλήρωμα ως συνάρτηση του x ορίζεται είτε στο $(-\infty, -1]$ είτε στο $[1, +\infty)$. Φυσικά, ενδέχεται να χρειάζεται να περιοριστούμε σε μικρότερα διαστήματα, επειδή θα πρέπει να αποφύγουμε πιθανό μηδενισμό του παρονομαστή της συνάρτησης $r(x, \sqrt{x^2 - 1})$. Όταν το x κινείται στο διάστημα $[1, +\infty)$, τότε χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής

$$x = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right) = \frac{u^2 + 1}{2u},$$

όπου θεωρούμε ότι η νέα μεταβλητή u κινείται και αυτή στο διάστημα $[1, +\infty)$. Μάλιστα, είναι εύκολο να δούμε ότι η συνάρτηση $\frac{u^2 + 1}{2u}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και επί του $[1, +\infty)$, οπότε, όταν το u διατρέχει ολόκληρο το $[1, +\infty)$, τότε το x διατρέχει ολόκληρο το $[1, +\infty)$, και αντιστρόφως. Λύνοντας την $x = \frac{u^2 + 1}{2u}$ ως προς u , βρίσκουμε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης. Η εξίσωση είναι δευτεροβάθμια και έχει δύο λύσεις: $u = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$. Η λύση η οποία ανήκει στο $[1, +\infty)$ είναι η

$$u = x + \sqrt{x^2 - 1}.$$

Αν κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής από x σε u στο ολοκλήρωμα, τότε θα φανούν χρήσιμοι οι εξής επιπλέον τύποι:

$$\sqrt{x^2 - 1} = \frac{u^2 - 1}{2u}, \quad dx = \frac{u^2 - 1}{2u^2} du.$$

Άρα

$$\int r(x, \sqrt{x^2 - 1}) dx = \int r\left(\frac{u^2 + 1}{2u}, \frac{u^2 - 1}{2u}\right) \frac{u^2 - 1}{2u^2} du \Big|_{u=x+\sqrt{x^2-1}} \quad \text{για } x \in [1, +\infty).$$

Αναγόμεστε έτσι σε αόριστο ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του u .

Όταν το x κινείται στο διάστημα $(-\infty, -1]$, τότε χρησιμοποιούμε την ίδια με πριν αλλαγή μεταβλητής

$$x = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right) = \frac{u^2 + 1}{2u},$$

όπου θεωρούμε ότι η νέα μεταβλητή u κινείται και αυτή στο διάστημα $(-\infty, -1]$. Η συνάρτηση $\frac{u^2 + 1}{2u}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1]$ και επί του $(-\infty, -1]$, οπότε, όταν το u διατρέχει ολόκληρο το $(-\infty, -1]$, τότε το x διατρέχει ολόκληρο το $(-\infty, -1]$, και αντιστρόφως. Λύνοντας την $x = \frac{u^2 + 1}{2u}$ ως προς u , βρίσκουμε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης. Προηγουμένως βρήκαμε τις δύο λύσεις της εξίσωσης, και τώρα κρατάμε τη λύση η οποία ανήκει στο $(-\infty, -1]$. Αυτή είναι η

$$u = x - \sqrt{x^2 - 1}.$$

Αν κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής από x σε u στο ολοκλήρωμα, τότε θα φανούν χρήσιμοι οι εξής επιπλέον τύποι:

$$\sqrt{x^2 - 1} = \frac{1 - u^2}{2u}, \quad dx = \frac{u^2 - 1}{2u^2} du.$$

Άρα

$$\int r(x, \sqrt{x^2 - 1}) dx = \int r\left(\frac{u^2 + 1}{2u}, \frac{1 - u^2}{2u}\right) \frac{u^2 - 1}{2u^2} du \Big|_{u=x-\sqrt{x^2-1}} \quad \text{για } x \in (-\infty, -1].$$

Αναγόμεστε έτσι πάλι σε αόριστο ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του u .

Παράδειγμα 8.57. Θα υπολογίσουμε το $\int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} dx$.

Αν $x \in [1, +\infty)$, τότε κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $x = \frac{u^2 + 1}{2u}$ και την αντίστροφη $u = x + \sqrt{x^2 - 1}$. Τότε η παράσταση $\frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$ μετατρέπεται στην $\frac{1}{u}$ και έχουμε

$$\int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} dx = \int \frac{1}{u} \frac{u^2 - 1}{2u^2} du \Big|_{u=x+\sqrt{x^2-1}} = \int \left(\frac{1}{2u} - \frac{1}{2u^3}\right) du \Big|_{u=x+\sqrt{x^2-1}}.$$

Τώρα υπολογίζουμε

$$\int \left(\frac{1}{2u} - \frac{1}{2u^3} \right) du = \frac{1}{2} \log |u| + \frac{1}{4u^2} + c,$$

οπότε

$$\int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} dx = \frac{1}{2} \log |x + \sqrt{x^2 - 1}| + \frac{1}{4(x + \sqrt{x^2 - 1})^2} + c \quad \text{για } x \in [1, +\infty).$$

Αν $x \in (-\infty, -1]$, τότε κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $x = \frac{u^2+1}{2u}$ και την αντίστροφη $u = x - \sqrt{x^2 - 1}$. Τότε η παράσταση $\frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$ μετατρέπεται στην u και

$$\int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} dx = \int u \frac{u^2-1}{2u^2} du \Big|_{u=x-\sqrt{x^2-1}} = \int \left(\frac{u}{2} - \frac{1}{2u} \right) du \Big|_{u=x-\sqrt{x^2-1}}.$$

Υπολογίζουμε

$$\int \left(\frac{u}{2} - \frac{1}{2u} \right) du = \frac{u^2}{4} - \frac{1}{2} \log |u| + c,$$

οπότε

$$\int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} dx = \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})^2}{4} - \frac{1}{2} \log |x - \sqrt{x^2 - 1}| + c \quad \text{για } x \in (-\infty, -1].$$

Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι οι δύο, φαινομενικά διαφορετικοί, τύποι οι οποίοι προέκυψαν για το αόριστο ολοκλήρωμα, ο ένας στο $[1, +\infty)$ και ο άλλος στο $(-\infty, -1]$, είναι ταυτόσημοι. Αυτό οφείλεται στην ισότητα: $(x + \sqrt{x^2 - 1})(x - \sqrt{x^2 - 1}) = 1$.

(ii) Στο δεύτερο ολοκλήρωμα ένας προφανής περιορισμός για το x προκύπτει από την ανισότητα $x^2 \leq 1$, οπότε το αόριστο ολοκλήρωμα ως συνάρτηση του x ορίζεται στο $[-1, 1]$. Φυσικά, όπως στην περίπτωση (i), ενδέχεται να χρειάζεται να περιοριστούμε σε μικρότερα διαστήματα, επειδή θα πρέπει να αποφύγουμε πιθανό μηδενισμό του παρονομαστή της συνάρτησης $r(x, \sqrt{1 - x^2})$.

Τώρα θεωρούμε την αλλαγή μεταβλητής

$$x = \frac{1}{\frac{1}{2}(u + \frac{1}{u})} = \frac{2u}{u^2 + 1},$$

όπου η νέα μεταβλητή u κινείται και αυτή στο διάστημα $[-1, 1]$. Μάλιστα, είναι εύκολο να δούμε ότι η συνάρτηση $\frac{2u}{u^2+1}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$ και επί του $[-1, 1]$, οπότε, όταν το u διατρέχει ολόκληρο το $[-1, 1]$, τότε το x διατρέχει ολόκληρο το $[-1, 1]$, και αντιστρόφως. Λύνοντας την $x = \frac{2u}{u^2+1}$ ως προς u , βρίσκουμε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης. Η εξίσωση είναι δευτεροβάθμια και έχει δύο λύσεις, από τις οποίες εκείνη η οποία ανήκει στο $[-1, 1]$ είναι η

$$u = \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}.$$

Αν κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής από x σε u στο ολοκλήρωμα, τότε θα φανούν χρήσιμοι οι εξής επιπλέον τύποι:

$$\sqrt{1 - x^2} = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \quad dx = \frac{2(1 - u^2)}{(1 + u^2)^2} du.$$

Άρα

$$\int r(x, \sqrt{1 - x^2}) dx = \int r\left(\frac{2u}{1 + u^2}, \frac{1 - u^2}{1 + u^2}\right) \frac{2(1 - u^2)}{(1 + u^2)^2} du \Big|_{u=\frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}},$$

και έχουμε πάλι αόριστο ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του u .

Παράδειγμα 8.58. Θα βρούμε το $\int \frac{1}{x + \sqrt{1 - x^2}} dx$.

Με την αλλαγή μεταβλητής $x = \frac{2u}{u^2+1}$ και την αντίστροφη $u = \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}$, η παράσταση $\frac{1}{x + \sqrt{1 - x^2}}$ μετατρέπεται στην $\frac{1 + u^2}{1 + 2u - u^2}$ και τότε

$$\int \frac{1}{x + \sqrt{1 - x^2}} dx = 2 \int \frac{1 - u^2}{(1 + 2u - u^2)(1 + u^2)} du \Big|_{u=\frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}}.$$

Κατόπιν, υπολογίζουμε

$$2 \int \frac{1 - u^2}{(1 + 2u - u^2)(1 + u^2)} du = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1 + 2u - u^2}{1 + u^2} \right| + \arctan u + c,$$

οπότε

$$\int \frac{1}{x + \sqrt{1 - x^2}} dx = \frac{1}{2} \log |x + \sqrt{1 - x^2}| + \arctan \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} + c.$$

(iii) Στο τρίτο ολοκλήρωμα δεν έχουμε κανέναν άμεσο περιορισμό για το x : το $\sqrt{x^2 + 1}$ ορίζεται για κάθε $x \in (-\infty, +\infty)$. Φυσικά, όπως στις περιπτώσεις (i) και (ii), ενδέχεται να χρειάζεται να περιοριστούμε σε μικρότερα διαστήματα, επειδή θα πρέπει να αποφύγουμε πιθανό μηδενισμό του παρονομαστή της συνάρτησης $r(x, \sqrt{x^2 + 1})$.

Τώρα θεωρούμε την αλλαγή μεταβλητής

$$x = \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right) = \frac{u^2 - 1}{2u},$$

όπου η νέα μεταβλητή u περιέχεται στο $(0, +\infty)$. Η συνάρτηση $\frac{u^2 - 1}{2u}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και επί του $(-\infty, +\infty)$, οπότε, όταν το u διατρέχει ολόκληρο το $(0, +\infty)$, τότε το x διατρέχει ολόκληρο το $(-\infty, +\infty)$, και αντιστρόφως. Λύνοντας την $x = \frac{u^2 - 1}{2u}$ ως προς u , βρίσκουμε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης. Η εξίσωση είναι δευτεροβάθμια και έχει δύο λύσεις από τις οποίες εκείνη η οποία ανήκει στο $(0, +\infty)$ είναι η

$$u = x + \sqrt{x^2 + 1}.$$

Τότε

$$\sqrt{x^2 + 1} = \frac{u^2 + 1}{2u}, \quad dx = \frac{u^2 + 1}{2u^2} du.$$

Άρα

$$\int r(x, \sqrt{x^2 + 1}) dx = \int r\left(\frac{u^2 - 1}{2u}, \frac{u^2 + 1}{2u}\right) \frac{u^2 + 1}{2u^2} du \Big|_{u=x+\sqrt{x^2+1}},$$

και καταλήγουμε σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του u .

Παράδειγμα 8.59. Θα υπολογίσουμε το $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx$.

Με την αλλαγή μεταβλητής $x = \frac{u^2 - 1}{2u}$ και την αντίστροφη $u = x + \sqrt{x^2 + 1}$, η παράσταση $\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$ μετατρέπεται στην $\frac{4u^2}{u^4 - 1}$ και έχουμε

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx = 2 \int \frac{1}{u^2 - 1} du \Big|_{u=x+\sqrt{x^2+1}}.$$

Υπολογίζουμε

$$2 \int \frac{1}{u^2 - 1} du = \log |u - 1| - \log |u + 1| + c.$$

Επομένως,

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx = \log \frac{|x|}{1 + \sqrt{x^2+1}} + c.$$

Βάσει των παραπάνω τριών τύπων ολοκληρωμάτων μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε ολοκληρώματα του τύπου

$$\int r(x, \sqrt{\kappa x^2 + \lambda x + \mu}) dx,$$

όπου κ, λ, μ είναι αριθμοί, $\kappa \neq 0$, και η $r(s, t)$ είναι ρητή συνάρτηση των s, t . Πράγματι, αφού γράψουμε

$$\kappa x^2 + \lambda x + \mu = \kappa \left(\left(x + \frac{\lambda}{2\kappa} \right)^2 + \frac{4\kappa\mu - \lambda^2}{4\kappa^2} \right) = \kappa \left(\left(x + \frac{\lambda}{2\kappa} \right)^2 - \frac{\Delta}{4\kappa^2} \right),$$

όπου $\Delta = \lambda^2 - 4\kappa\mu$ είναι η διακρίνουσα του δευτεροβάθμιου τριωνύμου, διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις.

Περίπτωση 1: $\kappa > 0$ και $\Delta < 0$. Με την αλλαγή μεταβλητής $u = \frac{2\kappa}{\sqrt{-\Delta}} \left(x + \frac{\lambda}{2\kappa} \right)$ καταλήγουμε στο

$$\int R(u, \sqrt{u^2 + 1}) du,$$

όπου $R(s, t)$ είναι μία νέα ρητή συνάρτηση των s, t .

Περίπτωση 2: $\kappa > 0$ και $\Delta > 0$. Με την αλλαγή μεταβλητής $u = \frac{2\kappa}{\sqrt{\Delta}} \left(x + \frac{\lambda}{2\kappa} \right)$ καταλήγουμε στο

$$\int R(u, \sqrt{u^2 - 1}) du,$$

όπου $R(s, t)$ είναι μία νέα ρητή συνάρτηση των s, t .

Περίπτωση 3: $\kappa < 0$ και $\Delta > 0$. Με την αλλαγή μεταβλητής $u = \frac{-2\kappa}{\sqrt{\Delta}}(x + \frac{\Delta}{2\kappa})$ καταλήγουμε στο

$$\int R(u, \sqrt{1-u^2}) du,$$

όπου $R(s, t)$ είναι μία νέα ρητή συνάρτηση των s, t .

Η περίπτωση $\kappa < 0$ και $\Delta < 0$ αποκλείεται, διότι τότε δεν ορίζεται σε κανένα σημείο η $\sqrt{\kappa x^2 + \lambda x + \mu}$. Οποιαδήποτε άλλη περίπτωση, όπου ένα τουλάχιστον από τα κ, Δ είναι 0, καταλήγει σε ολοκλήρωμα του οποίου ο υπολογισμός είναι απλός.

Το $\int r(x, \sqrt{\kappa x^2 + \lambda x + \mu}) dx$ με $\kappa \neq 0$ είναι ειδική περίπτωση του

$$\int r(x, a(x)) dx,$$

όπου η $a(x)$ είναι οποιαδήποτε αλγεβρική συνάρτηση του x . Για τον ορισμό των αλγεβρικών συναρτήσεων μελετήστε την άσκηση 5.45. Το ολοκλήρωμα αυτό ονομάζεται **ολοκλήρωμα του Abel** ή **αβελιανό ολοκλήρωμα**. Μία ακόμη ειδική περίπτωση αβελιανού ολοκληρώματος είναι αυτό για το οποίο

$$a(x) = \sqrt{\rho x^4 + \sigma x^3 + \kappa x^2 + \lambda x + \mu},$$

όπου ένα τουλάχιστον από τα ρ, σ είναι $\neq 0$, και ονομάζεται **ελλειπτικό ολοκλήρωμα**, διότι έχει άμεση σχέση με υπολογισμό μήκους τόξου έλλειψης.

Πρέπει να πούμε ότι έχει αποδειχθεί ότι τα ελλειπτικά ολοκληρώματα δεν ανάγονται σε στοιχειώδεις συναρτήσεις, αλλά αποτελούν ειδική κατηγορία συναρτήσεων, τις λεγόμενες **ελλειπτικές συναρτήσεις**.

Ασκήσεις

8.40. Βρείτε τα $\int \sqrt{1-x^2} dx, \int \sqrt{x^2-1} dx, \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx, \int \sqrt{x^2+1} dx, \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx, \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx, \int \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}} dx, \int \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}} dx, \int \frac{1}{(x+1)\sqrt{1+2x-x^2}} dx.$

8.5 Μέση τιμή συνάρτησης

Είναι γνωστό ότι η μέση τιμή οποιωνδήποτε αριθμών $y_1, \dots, y_n$, όπου το κάθε y_k εμφανίζεται ν_k φορές, είναι ο λόγος του συνολικού αθροίσματος των αριθμών προς το συνολικό πλήθος τους, δηλαδή ο αριθμός

$$\frac{\nu_1 y_1 + \dots + \nu_n y_n}{\nu_1 + \dots + \nu_n} = \frac{\nu_1}{\nu_1 + \dots + \nu_n} y_1 + \dots + \frac{\nu_n}{\nu_1 + \dots + \nu_n} y_n = \mu_1 y_1 + \dots + \mu_n y_n,$$

όπου κάθε $\mu_k = \frac{\nu_k}{\nu_1 + \dots + \nu_n}$ είναι η αναλογία του πλήθους των αντίστοιχων y_k προς το συνολικό πλήθος όλων των $y_1, \dots, y_n$. Είναι, επίσης, γνωστό ότι ο αριθμός αυτός βρίσκεται ανάμεσα στο μικρότερο και στο μεγαλύτερο από τα $y_1, \dots, y_n$.

Υπάρχει μία ανάλογη έννοια μέσης τιμής για συναρτήσεις. Έστω f ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, b]$. Επιλέγουμε διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ του $[a, b]$ και αντίστοιχο σύνολο $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων. Θεωρούμε και τις αντίστοιχες τιμές $f(\xi_1), \dots, f(\xi_n)$ της f σε όλα τα ενδιάμεσα σημεία. Αν το πλάτος (Δ) είναι αρκετά μικρό, δηλαδή αν κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ είναι αρκετά μικρό, τότε τα σημεία $x \in [x_{k-1}, x_k]$ είναι πολύ κοντά στο αντίστοιχο ξ_k , οπότε είναι εύλογο να δεχτούμε ότι κάθε τιμή $f(\xi_k)$ «εκπροσωπεί» τις τιμές $f(x)$ για $x \in [x_{k-1}, x_k]$, οπότε οι τιμές $f(\xi_1), \dots, f(\xi_n)$ «εκπροσωπούν» όλες τις τιμές της συνάρτησης. Τώρα, ως συνεπείς δημοκράτες, πρέπει να σκεφτούμε ότι, αν κάποιος $[x_{k-1}, x_k]$ έχει μεγαλύτερο μήκος από κάποιο άλλο $[x_{l-1}, x_l]$, τότε η τιμή $f(\xi_k)$ «εκπροσωπεί» περισσότερες τιμές της f από όσες «εκπροσωπεί» η τιμή $f(\xi_l)$. Θα δεχτούμε, λοιπόν, ότι η αναλογία του συνόλου των τιμών της f οι οποίες «εκπροσωπούνται» από οποιαδήποτε τιμή $f(\xi_k)$ προς το σύνολο όλων των τιμών της f είναι ίδια με

την αναλογία $\mu_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{b-a}$ του μήκους του αντίστοιχου $[x_{k-1}, x_k]$ προς το συνολικό μήκος $b - a$. Επομένως, αν θέλουμε να εισαγάγουμε την έννοια της μέσης τιμής όλων των τιμών της f , μία καλή ιδέα είναι να θεωρήσουμε τη μέση τιμή

$$\frac{x_1 - x_0}{b-a} f(\xi_1) + \dots + \frac{x_n - x_{n-1}}{b-a} f(\xi_n) = \sum_{k=1}^n \frac{x_k - x_{k-1}}{b-a} f(\xi_k)$$

των «αντιπροσωπευτικών» τιμών $f(\xi_1), \dots, f(\xi_n)$ και να δούμε μήπως αυτή η μέση τιμή προσεγγίζει κάποιον συγκεκριμένο αριθμό όταν το πλάτος (Δ) προσεγγίζει το 0. Όμως, αυτή η μέση τιμή είναι, προφανώς, ίση με

$$\frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f(\xi_k) = \frac{1}{b-a} \Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi),$$

και τείνει στον αριθμό $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ όταν πλάτος (Δ) $\rightarrow 0$. Βάσει αυτού, έχουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός 8.5. Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Ορίζουμε τη **μέση τιμή** της f στο $[a, b]$ να είναι ο αριθμός $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$. Δηλαδή,

$$\text{μέση τιμή της } f \text{ στο } [a, b] = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Αν η μέση τιμή της f στο $[a, b]$ είναι ο αριθμός ρ , τότε

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)\rho = \int_a^b \rho dx,$$

και βλέπουμε ότι:

Η μέση τιμή της f στο $[a, b]$ είναι εκείνη η τιμή την οποία πρέπει να έχει μία σταθερή συνάρτηση στο $[a, b]$ ώστε το ολοκλήρωμά της να είναι ίσο με το ολοκλήρωμα της f .

Ας δούμε ποιο είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο της μέσης τιμής μίας συνάρτησης. Έστω $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ και έστω A η επιφάνεια ανάμεσα στο γράφημα της f και στο διάστημα $[a, b]$. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να πούμε ότι η μέση τιμή της f στο $[a, b]$ είναι ο λόγος του εμβαδού της A προς το μήκος του $[a, b]$ ή, με άλλα λόγια, το ύψος το οποίο πρέπει να έχει ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με βάση το $[a, b]$ ώστε να έχει το ίδιο εμβαδόν με την A .

Από την Πρόταση 7.10 συνεπάγεται ότι η μέση τιμή μίας συνάρτησης είναι ανάμεσα σε οποιοδήποτε κάτω φράγμα της και σε οποιοδήποτε άνω φράγμα της. Ειδικότερα, αν η συνάρτηση έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή, τότε η μέση τιμή της είναι ανάμεσα στην ελάχιστη και στη μέγιστη τιμή της. Αν η συνάρτηση είναι και συνεχής, τότε έχουμε το εξής πιο συγκεκριμένο αποτέλεσμα.

Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού. Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $[a, b]$. Τότε υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(\xi).$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα Μέγιστης / Ελάχιστης Τιμής συνεπάγεται ότι υπάρχουν $\zeta \in [a, b]$, $\eta \in [a, b]$ ώστε να ισχύει $f(\zeta) \leq f(x) \leq f(\eta)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Τότε

$$(b-a)f(\zeta) \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b-a)f(\eta),$$

οπότε ο αριθμός $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ είναι ανάμεσα στη μέγιστη και στην ελάχιστη τιμή της f . Από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής συνεπάγεται ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε ο αριθμός αυτός να είναι ίσος με την τιμή $f(\xi)$. $\square$

Παράδειγμα 8.60. Αν η f δεν είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε μπορεί η μέση τιμή της στο $[a, b]$ να μην είναι ίση με καμία τιμή της. Η μέση τιμή της $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{αν } -1 \leq x < 0, \\ 1, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$ στο διάστημα $[-1, 1]$ είναι

$$\frac{1}{1-(-1)} \int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{1-(-1)} \left(\int_{-1}^0 (-1) dx + \int_0^1 1 dx \right) = 0,$$

και καμία τιμή της συνάρτησης στο διάστημα $[-1, 1]$ δεν είναι 0.

Ασκήσεις

8.41. Υπολογίστε τη μέση τιμή των παρακάτω συναρτήσεων στα αντίστοιχα διαστήματα.

(i) x , στα $[-1, 1]$ και $[0, 1]$.

(ii) x^2 , στο $[-1, 1]$.

(iii) $\sin x$, στα $[0, \pi]$, $[0, \frac{\pi}{2}]$ και $[0, 2\pi]$.

8.42. Πρώτο Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού. Έστω ότι οι f, w είναι συνεχείς στο $[a, b]$ και ότι ισχύει $w(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε

$$\int_a^b f(x)w(x) dx = f(\xi) \int_a^b w(x) dx.$$

Αυτό αποτελεί γενίκευση του Θεωρήματος Μέσης Τιμής το οποίο είδαμε στη θεωρία, με σταθερή συνάρτηση $w(x) = 1$, και αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο. Σε αυτό το πλαίσιο, η w χαρακτηρίζεται **συνάρτηση βάρους** και, αν $\int_a^b w(x) dx > 0$, τότε ο αριθμός $\frac{1}{\int_a^b w(x) dx} \int_a^b f(x)w(x) dx$ ονομάζεται **μέση τιμή** της f σε σχέση με τη συνάρτηση βάρους w .

8.43. Δεύτερο Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού. Έστω ότι η f έχει συνεχή παράγωγο και ότι είναι μονότονη στο $[a, b]$ και ότι η g είναι συνεχής στο $[a, b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \int_a^\xi g(x) dx + f(b) \int_\xi^b g(x) dx.$$

Υπόδειξη: Θεωρήστε την $G(x) = \int_a^x g(t) dt$, γράψτε $\int_a^b f(x)g(x) dx = \int_a^b f(x)G'(x) dx$ και, μετά από μία ολοκλήρωση κατά μέρη, εφαρμόστε το Πρώτο Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού στην άσκηση 8.42.

8.6 Το Θεώρημα Taylor, B

Θεώρημα Taylor με σφάλμα ολοκληρωτικού τύπου. Έστω $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, διάστημα I και $\xi \in I$. Έστω ότι η f έχει παραγώγους τάξης μέχρι και $n+1$ συνεχείς στο I . Τότε για κάθε $x \in I$ ισχύει

$$f(x) = f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1!}(x-\xi) + \cdots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + \frac{1}{n!} \int_\xi^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

Αν, επιπλέον, ισχύει $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ για κάθε $x \in I$, τότε

$$\left| f(x) - f(\xi) - \frac{f'(\xi)}{1!}(x-\xi) - \cdots - \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \right| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x-\xi|^{n+1}$$

για κάθε $x \in I$.

Απόδειξη. Αν $n = 0$, τότε η ισότητα την οποία θέλουμε να αποδείξουμε γράφεται

$$f(x) = f(\xi) + \int_\xi^x f'(t) dt,$$

και δεν είναι τίποτε άλλο από το (ii) της Πρότασης 8.5.

Αν $n \geq 1$, τότε αποδεικνύουμε την ισότητα εφαρμόζοντας διαδοχικές ολοκληρώσεις κατά μέρη στο $\int_\xi^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$, μεταφέροντας παραγώγους από την $f(t)$ στην $(x-t)^n$.

Αν $\xi < x$, τότε η ανισότητα προκύπτει από την ισότητα και από την

$$\left| \int_{\xi}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \right| \leq \int_{\xi}^x |f^{(n+1)}(t)|(x-t)^n dt \leq M \int_{\xi}^x (x-t)^n dt = \frac{M}{n+1}(x-\xi)^{n+1}.$$

Αν $\xi < x$, τότε η απόδειξη είναι παρόμοια. $\square$

Η παράσταση

$$f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1!}(x-\xi) + \cdots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k$$

είναι η προσέγγιση Taylor τάξης n της f την οποία γνωρίζουμε από την ενότητα 6.15.

Ορισμός 8.6. Το $\frac{1}{n!} \int_{\xi}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$ ονομάζεται **σφάλμα τάξης n ολοκληρωτικού τύπου**.

8.7 Γενικευμένα ολοκληρώματα

Ας παρατηρήσουμε τα «ολοκληρώματα»

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx, \quad \int_1^{+\infty} x dx.$$

Είναι φανερό ότι και τα δύο ξεφεύγουν από το πλαίσιο της θεωρίας των ολοκληρωμάτων την οποία έχουμε αναπτύξει. Στο πρώτο «ολοκλήρωμα» η συνάρτηση $\frac{1}{x}$ δεν ορίζεται σε ολόκληρο το διάστημα $[0, 1]$ και, μάλιστα, δεν είναι καν φραγμένη στο υποδιάστημα $(0, 1]$ στο οποίο ορίζεται. Στο δεύτερο «ολοκλήρωμα» το διάστημα $[1, +\infty)$ δεν είναι κλειστό και φραγμένο. Τέτοιου τύπου «ολοκληρώματα», υπό ορισμένες προϋποθέσεις, ονομάζονται **γενικευμένα ολοκληρώματα** και θα τα ορίσουμε αμέσως τώρα.

Ορισμός 8.7. Έστω $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε υποδιάστημα $[a, c]$ του $[a, b)$. Τότε το σύμβολο

$$\int_a^b f(x) dx$$

ονομάζεται **γενικευμένο ολοκλήρωμα** της f στο $[a, b)$.

Αν υπάρχει το όριο $\lim_{c \rightarrow b-} \int_a^c f(x) dx$, τότε το όριο αυτό, είτε είναι αριθμός είτε είναι ένα από τα $\pm\infty$, ονομάζεται **τιμή** του γενικευμένου ολοκληρώματος και γράφουμε

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b-} \int_a^c f(x) dx.$$

Αν το όριο $\lim_{c \rightarrow b-} \int_a^c f(x) dx$ είναι αριθμός, τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα **συγκλίνει**, ενώ, αν το όριο είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα **αποκλίνει** στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, αντιστοίχως.

Αν δεν υπάρχει το όριο $\lim_{c \rightarrow b-} \int_a^c f(x) dx$, τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα **αποκλίνει** χωρίς να έχει τιμή.

Όλα όσα είπαμε ισχύουν, με την ανάλογη διατύπωση και ορολογία, και στις υπόλοιπες περιπτώσεις διαστημάτων: $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ και $f : (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Θα γράψουμε μόνο τις τιμές, αν υπάρχουν, των αντίστοιχων γενικευμένων ολοκληρωμάτων:

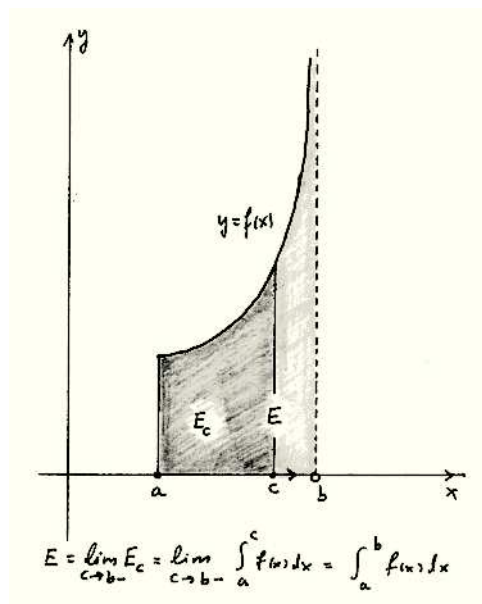
$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x) dx,$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a+} \int_c^b f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^b f(x) dx.$$

Μερικές φορές παρουσιάζονται γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_a^b f(x) dx$ με συνάρτηση $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Για να υπολογίσουμε την τιμή ενός τέτοιου γενικευμένου ολοκληρώματος, παίρνουμε

οποιοδήποτε ενδιάμεσο αριθμό d , δηλαδή $a < d < b$, υπολογίζουμε τις τιμές, αν υπάρχουν, των δύο γενικευμένων ολοκληρωμάτων $\int_a^d f(x) dx$ και $\int_d^b f(x) dx$ και, αν δεν προκύπτει απροσδιόριστη μορφή, τις προσθέτουμε. Δηλαδή, $\int_a^b f(x) dx = \int_a^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx$. Ομοίως, ορίζονται γενικευμένα ολοκληρώματα και στις υπόλοιπες περιπτώσεις διαστημάτων: $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f : (-\infty, b) \rightarrow \mathbb{R}$ και $f : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Για να δούμε το γεωμετρικό περιεχόμενο του γενικευμένου ολοκληρώματος $\int_a^b f(x) dx$ στην περίπτωση συνάρτησης $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, θεωρούμε ότι ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Παρατηρήστε το σχήμα 8.1. Τότε για κάθε $c \in (a, b)$ το $\int_a^c f(x) dx$ είναι ίσο με το εμβαδόν E_c της επιφάνειας A_c η οποία περικλείεται από το γράφημα της f , από το διάστημα $[a, c]$ του x -άξονα, από το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $(a, 0)$ και $(a, f(a))$ και από το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $(c, 0)$ και $(c, f(c))$. Όταν το c αυξάνεται και προσεγγίζει το b , τότε το τελευταίο ευθύγραμμο τμήμα μετακινείται προς τα δεξιά προσεγγίζοντας την κατακόρυφη ευθεία $x = b$, οπότε η επιφάνεια A_c τείνει να ταυτιστεί με την επιφάνεια A η οποία περικλείεται από το γράφημα της f , από το διάστημα $[a, b]$ του x -άξονα, από το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $(a, 0)$ και $(a, f(a))$ και από την κατακόρυφη ευθεία με εξίσωση $x = b$. Επειδή η επιφάνεια A_c τείνει να ταυτιστεί με την επιφάνεια A , είναι εύλογο να δεχτούμε ότι το εμβαδόν E_c της A_c τείνει να γίνει ίσο με το εμβαδόν E της A . Άρα το $\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$ είναι ίσο με το όριο του εμβαδού E_c όταν το c προσεγγίζει το b , οπότε είναι ίσο με το εμβαδόν E . Παρατηρήστε ότι, ειδικά στην περίπτωση κατά την οποία η f δεν είναι φραγμένη στο $[a, b)$, η επιφάνεια A δεν είναι φραγμένη.



Σχήμα 8.1

Τα ίδια μπορούμε να πούμε σε κάθε περίπτωση γενικευμένου ολοκληρώματος. Για παράδειγμα, αν ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$, τότε το $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ είναι ίσο με το εμβαδόν της επιφάνειας A η οποία περικλείεται από το γράφημα της f , από την ημιευθεία $[a, +\infty)$ του x -άξονα και από το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $(a, 0)$ και $(a, f(a))$. Και σε αυτήν την περίπτωση η επιφάνεια A δεν είναι φραγμένη.

Είναι σημαντικό να συνειδητοποιηθεί ότι *μία μη-φραγμένη επιφάνεια μπορεί να έχει πεπερασμένο εμβαδόν*. Παρακάτω θα δούμε αρκετά τέτοια παραδείγματα.

Στην ενότητα αυτή δεν θα αναπτύξουμε τη θεωρία των γενικευμένων ολοκληρωμάτων, αλλά θα περιοριστούμε σε μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα και σε κάποια πολύ βασικά θεωρητικά αποτελέσματα².

²Για πληρέστερη θεώρηση των γενικευμένων ολοκληρωμάτων δείτε τις σημειώσεις «Ανάλυση» [1].

Παράδειγμα 8.61. Έστω $p \in \mathbb{R}$. Για κάθε $c > 1$ ισχύει

$$\int_1^c \frac{1}{x^p} dx = \frac{c^{1-p}-1}{1-p} \text{ αν } p \neq 1, \quad \int_1^c \frac{1}{x^p} dx = \log c \text{ αν } p = 1.$$

Επομένως,

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^c \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{p-1} \text{ αν } p > 1, \quad \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^c \frac{1}{x^p} dx = +\infty \text{ αν } p \leq 1.$$

Άρα

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & \text{αν } p > 1, \\ +\infty, & \text{αν } p \leq 1. \end{cases}$$

Παράδειγμα 8.62. Έστω $p \in \mathbb{R}$. Για κάθε c με $0 < c < 1$ ισχύει

$$\int_c^1 \frac{1}{x^p} dx = \frac{1-c^{1-p}}{1-p} \text{ αν } p \neq 1, \quad \int_c^1 \frac{1}{x^p} dx = \log \frac{1}{c} \text{ αν } p = 1.$$

Επομένως,

$$\lim_{c \rightarrow 0+} \int_c^1 \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p} \text{ αν } p < 1, \quad \lim_{c \rightarrow 0+} \int_c^1 \frac{1}{x^p} dx = +\infty \text{ αν } p \geq 1.$$

Άρα

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-p}, & \text{αν } p < 1, \\ +\infty, & \text{αν } p \geq 1. \end{cases}$$

Συνδυάζοντας με το παράδειγμα 8.61, βλέπουμε ότι

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = +\infty \text{ για κάθε } p.$$

Παράδειγμα 8.63. Για κάθε t και κάθε $c > 0$ ισχύει

$$\int_0^c e^{-tx} dx = \frac{1-e^{-tc}}{t} \text{ αν } t \neq 0, \quad \int_0^c e^{-tx} dx = c \text{ αν } t = 0.$$

Άρα

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_0^c e^{-tx} dx = \frac{1}{t} \text{ αν } t > 0, \quad \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_0^c e^{-tx} dx = +\infty \text{ αν } t \leq 0.$$

Επομένως,

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} dx = \begin{cases} \frac{1}{t}, & \text{αν } t > 0, \\ +\infty, & \text{αν } t \leq 0. \end{cases}$$

Παράδειγμα 8.64. Ισχύει $\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_0^c \frac{1}{x^2+1} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \arctan c = \frac{\pi}{2}$. Άρα

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται και το $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2}$ και, προσθέτοντας τα δύο γενικευμένα ολοκληρώματα, καταλήγουμε στο

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \pi.$$

Παράδειγμα 8.65. Ισχύει $\lim_{c \rightarrow 1-} \int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{c \rightarrow 1-} \arcsin c = \frac{\pi}{2}$. Άρα

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2}$ και, προσθέτοντας τα δύο γενικευμένα ολοκληρώματα, καταλήγουμε στο

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi.$$

Παράδειγμα 8.66. Το όριο $\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_0^c \cos x \, dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \sin c$ δεν υπάρχει. Δηλαδή, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} \cos x \, dx$ αποκλίνει και δεν έχει τιμή.

Στο εξής θα περιοριστούμε σε γενικευμένα ολοκληρώματα της μορφής $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$. Αυτό σημαίνει ότι η $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[a, c]$ με $a \leq c$ και

$$\int_a^{+\infty} f(x) \, dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x) \, dx,$$

αν το όριο υπάρχει. Για τα αποτελέσματα τα οποία θα δούμε γι' αυτήν την περίπτωση υπάρχουν ανάλογα αποτελέσματα και για τις άλλες περιπτώσεις γενικευμένων ολοκληρωμάτων και αποδεικνύονται με ανάλογο τρόπο.

Οι επόμενες τρεις προτάσεις γενικεύουν, απλώς, τις αντίστοιχες Προτάσεις 7.1, 7.2 και 7.9 για τα «κανονικά» ολοκληρώματα και χρησιμεύουν για τον απλό αλγεβρικό χειρισμό και για την απλή σύγκριση γενικευμένων ολοκληρωμάτων.

Πρόταση 8.9. Αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f στο $[a, +\infty)$ έχει τιμή και αν το γινόμενο του αριθμού λ με την τιμή του γενικευμένου ολοκληρώματος δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα της λf στο $[a, +\infty)$ έχει τιμή και

$$\int_a^{+\infty} \lambda f(x) \, dx = \lambda \int_a^{+\infty} f(x) \, dx.$$

Απόδειξη. Για κάθε $c \in [a, +\infty)$ ισχύει $\int_a^c \lambda f(x) \, dx = \lambda \int_a^c f(x) \, dx$ και το αποτέλεσμα προκύπτει παίρνοντας όρια όταν $c \rightarrow +\infty$. $\square$

Πρόταση 8.10. Αν τα γενικευμένα ολοκληρώματα των f, g στο $[a, +\infty)$ έχουν τιμή και αν το άθροισμα των τιμών των γενικευμένων ολοκληρωμάτων δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα της $f + g$ στο $[a, +\infty)$ έχει τιμή και

$$\int_a^{+\infty} (f(x) + g(x)) \, dx = \int_a^{+\infty} f(x) \, dx + \int_a^{+\infty} g(x) \, dx.$$

Απόδειξη. Για κάθε $c \in [a, +\infty)$ ισχύει $\int_a^c (f(x) + g(x)) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_a^c g(x) \, dx$ και το αποτέλεσμα προκύπτει παίρνοντας όρια όταν $c \rightarrow +\infty$. $\square$

Πρόταση 8.11. Αν τα γενικευμένα ολοκληρώματα των f, g στο $[a, +\infty)$ έχουν τιμή και αν ισχύει $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$, τότε

$$\int_a^{+\infty} f(x) \, dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) \, dx.$$

Απόδειξη. Για κάθε $c \in [a, +\infty)$ ισχύει $\int_a^c f(x) \, dx \leq \int_a^c g(x) \, dx$ και το αποτέλεσμα προκύπτει παίρνοντας όρια όταν $c \rightarrow +\infty$. $\square$

Θεώρημα 8.1. Έστω ότι ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$. Τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f στο $[a, +\infty)$ έχει οπωσδήποτε τιμή και αυτή είναι αριθμός ≥ 0 ή $+\infty$. Δηλαδή,

$$0 \leq \int_a^{+\infty} f(x) \, dx \leq +\infty.$$

Ειδικότερα, το $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$ είτε (i) συγκλίνει, αν η $\int_a^c f(x) \, dx$ είναι άνω φραγμένη ως συνάρτηση του c στο $[a, +\infty)$ είτε (ii) αποκλίνει στο $+\infty$, αν η ίδια συνάρτηση δεν είναι άνω φραγμένη.

Απόδειξη. Ορίζουμε τη συνάρτηση $F : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$F(c) = \int_a^c f(x) \, dx \quad \text{για } c \in [a, +\infty).$$

Αν $a \leq c_1 < c_2$, τότε συνεπάγεται

$$F(c_2) = \int_a^{c_2} f(x) dx = \int_a^{c_1} f(x) dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx \geq \int_a^{c_1} f(x) dx = F(c_1),$$

διότι ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [c_1, c_2]$, οπότε $\int_{c_1}^{c_2} f(x) dx \geq 0$.

Άρα η F είναι αύξουσα στο $[a, +\infty)$. Άρα το

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} F(c) = \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

υπάρχει και είναι αριθμός ή $+\infty$.

Ισχύει $F(c) \geq 0$ για κάθε $c \in [a, +\infty)$, οπότε $\lim_{c \rightarrow +\infty} F(c) \geq 0$, δηλαδή $\int_a^{+\infty} f(x) dx \geq 0$.

Τέλος, (i) αν η συνάρτηση F είναι άνω φραγμένη, τότε το $\lim_{c \rightarrow +\infty} F(c)$ είναι αριθμός, ενώ (ii) αν η F δεν είναι άνω φραγμένη, τότε το $\lim_{c \rightarrow +\infty} F(c)$ είναι $+\infty$. $\square$

Βλέπουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα μη-αρνητικής συνάρτησης έχει πάντοτε τιμή, η οποία είναι είτε αριθμός ≥ 0 είτε $+\infty$. Επίσης, η σύγκλιση του γενικευμένου ολοκληρώματος ισοδυναμεί με $\int_a^{+\infty} f(x) dx < +\infty$, ενώ η απόκλιση του ισοδυναμεί με $\int_a^{+\infty} f(x) dx = +\infty$.

Το Θεώρημα 8.2 παρέχει ένα πολύ χρήσιμο κριτήριο για να αποφασίζουμε αν κάποιο γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει.

Θεώρημα 8.2. Έστω $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες σε κάθε διάστημα $[a, c]$ και έστω ότι ισχύει $|f(x)| \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$. Αν το $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ συγκλίνει, τότε το $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ συγκλίνει και

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x) dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)| dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx.$$

Απόδειξη. Επειδή ισχύει $f(x) + g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$, από το Θεώρημα 8.1 προκύπτει ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} (f(x) + g(x)) dx$ έχει τιμή και, μάλιστα, αυτή είναι ≥ 0 . Το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ έχει και αυτό τιμή, οπότε από την Πρόταση 8.11 και από το ότι ισχύει $f(x) + g(x) \leq 2g(x)$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$ συνεπάγεται

$$0 \leq \int_a^{+\infty} (f(x) + g(x)) dx \leq 2 \int_a^{+\infty} g(x) dx.$$

Το $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ συγκλίνει, οπότε $\int_a^{+\infty} g(x) dx < +\infty$, οπότε $\int_a^{+\infty} (f(x) + g(x)) dx < +\infty$. Τώρα, επειδή και τα δύο αυτά ολοκληρώματα έχουν τιμή η οποία είναι αριθμός, συνεπάγεται ότι και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ έχει τιμή η οποία είναι αριθμός:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^{+\infty} (f(x) + g(x)) dx - \int_a^{+\infty} g(x) dx.$$

Δηλαδή, το $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ συγκλίνει.

Τέλος, από το ότι ισχύει $-g(x) \leq -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$ συνεπάγεται

$$-\int_a^{+\infty} g(x) dx \leq -\int_a^{+\infty} |f(x)| dx \leq \int_a^{+\infty} f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} |f(x)| dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx,$$

οπότε $\left| \int_a^{+\infty} f(x) dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)| dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx$. $\square$

Η ανισότητα $\left| \int_a^{+\infty} f(x) dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ ονομάζεται **τριγωνική ανισότητα** για γενικευμένα ολοκληρώματα.

Παράδειγμα 8.67. Γνωρίζουμε ότι $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$. Επειδή ισχύει $\left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x \geq 1$, το $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ συγκλίνει και

$$\left| \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx \right| \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1.$$

Παράδειγμα 8.68. Ισχύει $0 \leq e^{-x^2} \leq e^{1-x}$ για κάθε $x \geq 0$. Το $\int_0^{+\infty} e^{1-x} dx$ συγκλίνει και, μάλιστα, η τιμή του είναι

$$\int_0^{+\infty} e^{1-x} dx = e \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = e.$$

Επομένως, και το $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ συγκλίνει:

$$0 \leq \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx < +\infty.$$

Παράδειγμα 8.69. Θα εξετάσουμε το $\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x^3+x+1} dx$. Επειδή $\frac{x+1}{x^3+x+1} \geq 0$ για κάθε $x \geq 1$, το γενικευμένο ολοκλήρωμα έχει τιμή η οποία είναι αριθμός ≥ 0 ή $+\infty$.

Θεωρούμε την $f(x) = \frac{x+1}{x^3+x+1}$ σε σχέση με την $g(x) = \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}$, η οποία προκύπτει από την $f(x)$ όταν κρατήσουμε τους μεγάλους όρους του αριθμητή και του παρονομαστή της. Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Συνεπάγεται ότι ισχύει $\frac{1}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq 2$ κοντά στο $+\infty$. Δηλαδή, υπάρχει $N > 1$ ώστε να ισχύει $\frac{1}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq 2$ για κάθε $x \geq N$. Επομένως,

$$0 \leq \int_N^{+\infty} f(x) dx \leq 2 \int_N^{+\infty} g(x) dx = 2 \int_N^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{2}{N} < +\infty.$$

Δηλαδή, η τιμή του $\int_N^{+\infty} f(x) dx$ είναι αριθμός. Επίσης, το $\int_1^N f(x) dx$ είναι ένα σύνηθες ολοκλήρωμα συνεχούς συνάρτησης στο $[1, N]$, οπότε η τιμή του είναι αριθμός. Τώρα,

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_1^N f(x) dx + \int_N^{+\infty} f(x) dx,$$

οπότε η τιμή του $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ είναι αριθμός, οπότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει.

Παράδειγμα 8.70. Θα εξετάσουμε το $\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+1} dx$. Επειδή $\frac{x+1}{x^2+1} \geq 0$ για κάθε $x \geq 1$, το γενικευμένο ολοκλήρωμα έχει τιμή η οποία είναι αριθμός ≥ 0 ή $+\infty$.

Θα μιμηθούμε ό,τι κάναμε στο παράδειγμα 8.69.

Θεωρούμε την $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ σε σχέση με την $g(x) = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, συνεπάγεται ότι ισχύει $\frac{1}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq 2$ κοντά στο $+\infty$. Δηλαδή, υπάρχει $N > 1$ ώστε να ισχύει $\frac{1}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq 2$ για κάθε $x \geq N$. Επομένως,

$$\int_N^{+\infty} f(x) dx \geq \frac{1}{2} \int_N^{+\infty} g(x) dx = \frac{1}{2} \int_N^{+\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty.$$

Δηλαδή, η τιμή του $\int_N^{+\infty} f(x) dx$ είναι $+\infty$. Επίσης, το $\int_1^N f(x) dx$ είναι ένα σύνηθες ολοκλήρωμα συνεχούς συνάρτησης στο $[1, N]$, οπότε η τιμή του είναι αριθμός. Τώρα,

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_1^N f(x) dx + \int_N^{+\infty} f(x) dx = +\infty,$$

οπότε η τιμή του $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ είναι $+\infty$, οπότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα αποκλίνει στο $+\infty$.

Ασκήσεις

8.44. Υπολογίστε τις τιμές των $\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+1} dx$, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$, $\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^3+x^2+x+1} dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(x^2+1)} dx$, $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$, $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-|x|} dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| dx$, $\int_0^1 \log x dx$, $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \log x} dx$, $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \log^2 x} dx$, $\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(x+1)^2} dx$, $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$.

Υπόδειξη: Στο έβδομο, στο όγδοο και στο ένατο γενικευμένο ολοκλήρωμα χωρίστε το $(-\infty, +\infty)$ σε $(-\infty, 0]$ και σε $[0, +\infty)$. Στο δέκατο τρίτο γενικευμένο ολοκλήρωμα χωρίστε το $(0, +\infty)$ σε $(0, 1]$ και σε $[1, +\infty)$. Στο τελευταίο γενικευμένο ολοκλήρωμα χωρίστε το $(0, 1)$ σε $(0, \frac{1}{2}]$ και σε $[\frac{1}{2}, 1)$.

8.45. Αποδείξτε ότι δεν έχουν τιμή τα $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1} dx$, $\int_0^{+\infty} \sin x dx$, $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$.

Υπόδειξη: Στο τελευταίο γενικευμένο ολοκλήρωμα χωρίστε το $[-1, 1]$ σε $[-1, 0)$ και σε $(0, 1]$.

8.46. Ποια από τα $\int_1^{+\infty} \frac{x^2+x}{1+x^2} \sqrt{x} dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+3}{2x^4+3} dx$, $\int_0^{+\infty} \frac{xe^x+3}{2x+e^{2x}} dx$, $\int_1^{+\infty} \sin \frac{1}{x} dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx$, $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{x+x^3 \log x}{1+x^4 \log^2 x} dx$ συγκλίνουν;

Υπόδειξη: Για τα τρία πρώτα και το τελευταίο γενικευμένο ολοκλήρωμα μιμηθείτε ό,τι κάναμε στα παραδείγματα 8.69 και 8.70. Για το τέταρτο και το πέμπτο χρησιμοποιήστε τις συναρτήσεις $\frac{1}{x}$ και $\frac{1}{x^2}$ αντιστοίχως. Για το έκτο και το έβδομο μιμηθείτε ό,τι κάναμε στο παράδειγμα 8.67.

8.47. Αν $a > 0$, αποδείξτε ότι

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos(bx) dx = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin(bx) dx = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Υπόδειξη: Μελετήστε το σχετικό παράδειγμα 8.41.

8.48. Αν $0 < a \leq b$, αποδείξτε ότι:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x} dx = \log \frac{b}{a}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \log \frac{b}{a}.$$

Υπόδειξη: $\int_{\delta}^R \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x} dx = \int_{a\delta}^{aR} \frac{\cos x}{x} dx - \int_{b\delta}^{bR} \frac{\cos x}{x} dx = \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{\cos x}{x} dx - \int_{aR}^{bR} \frac{\cos x}{x} dx$. Τώρα, $\int_{a\delta}^{b\delta} \frac{\cos x}{x} dx = \log \frac{b}{a} - \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{1 - \cos x}{x} dx$. Τέλος, $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{1 - \cos x}{x} dx = 0$ και $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{aR}^{bR} \frac{\cos x}{x} dx = 0$.

8.49. Σχεδιάστε το γράφημα του αόριστου ολοκληρώματος $\int_0^c (-1)^{[x]} dx$ ως συνάρτηση του c και μελετήστε ως προς τη σύγκλιση ή απόκλιση το $\int_0^{+\infty} (-1)^{[x]} dx$.

8.50. (i) Αποδείξτε ότι

$$\text{το } \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \text{ συγκλίνει.}$$

Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι $\int_1^c \frac{\sin x}{x} dx = \cos 1 - \frac{\cos c}{c} - \int_1^c \frac{\cos x}{x^2} dx$.

(ii) Αποδείξτε ότι

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty.$$

Υπόδειξη: Για $k \in \mathbb{N}$ είναι $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{(k+1)\pi} dx = \frac{2}{(k+1)\pi} \geq \frac{1}{\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{x} dx$. Επομένως, $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty$.

8.51. Αποδείξτε ότι τα $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$ και $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$, τα οποία ονομάζονται **ολοκληρώματα Fresnel**, συγκλίνουν.

Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι $\int_1^c \sin(x^2) dx = -\frac{\cos(c^2)}{2c} + \frac{\cos 1}{2} - \frac{1}{2} \int_1^c \frac{\cos(x^2)}{x^2} dx$.

8.52. Για $t > 0$ συμβολίζουμε:

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx.$$

Παρατηρήστε ότι η $e^{-x} x^{t-1}$, ως συνάρτηση του x , ορίζεται στο $[0, +\infty)$, αν $t \geq 1$, και στο $(0, +\infty)$, αν $0 < t < 1$.

(i) Αποδείξτε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx$ συγκλίνει για κάθε $t > 0$.

Υπόδειξη: Αν $t \geq 1$, τότε πάρτε $n = [t] + 1$ και παρατηρήστε ότι ισχύει $0 \leq e^{-x} x^{t-1} \leq e^{-x} x^{n-1}$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$. Αν $0 < t < 1$, τότε παρατηρήστε ότι ισχύει $0 \leq e^{-x} x^{t-1} \leq x^{t-1}$ για κάθε $x \in (0, 1]$ και ότι ισχύει $0 \leq e^{-x} x^{t-1} \leq e^{-x}$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$.

Η συνάρτηση $\Gamma : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι εξαιρετικά σημαντική και ονομάζεται **συνάρτηση γάμμα του Euler**.

(ii) Αποδείξτε ότι ισχύει

$$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t) \quad \text{για κάθε } t > 0.$$

Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι $\int_0^c e^{-x} x^t dx = -e^{-c} c^t + t \int_0^c e^{-x} x^{t-1} dx$.

(iii) Αποδείξτε με επαγωγή ότι $\Gamma(n) = (n-1)!$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

8.8 Εφαρμογές των ολοκληρωμάτων

8.8.1 Υπολογισμός μήκους καμπύλης

Γνωρίζουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα (x', y') και (x'', y'') στο xy -επίπεδο έχει μήκος ίσο με $\sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}$. Ομοίως, το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα (x', y', z') και (x'', y'', z'') στον xyz -χώρο έχει μήκος ίσο με $\sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2}$. Γενικότερα, μία πολυγωνική γραμμή, είτε στο επίπεδο είτε στον χώρο, δηλαδή μία ένωση διαδοχικών ευθύγραμμων τμημάτων, έχει μήκος ίσο με το άθροισμα των μηκών αυτών των ευθύγραμμων τμημάτων.

Τώρα, για να μετρήσουμε το μήκος της τροχιάς μίας καμπύλης πρέπει να την προσεγγίσουμε με κατάλληλες πολυγωνικές γραμμές: τα μήκη αυτών των πολυγωνικών γραμμών θα προσεγγίζουν το μήκος της τροχιάς της καμπύλης.

Κατ' αρχάς, θα ασχοληθούμε με καμπύλες στο επίπεδο. Θεωρούμε την τροχιά C της καμπύλης $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ η οποία ορίζεται από τις $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)),$$

και υποθέτουμε, για απλούστευση, ότι οι συναρτήσεις x, y έχουν συνεχή παράγωγο στο $[a, b]$. Τότε η $\mathbf{r}$ χαρακτηρίζεται **συνεχώς παραγωγίσιμη** ή **λεία** ή **ομαλή** και θυμόμαστε ότι η διανυσματική παράγωγος της διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ είναι η

$$\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t)).$$

Το μέτρο της διανυσματικής παραγώγου είναι ίσο με

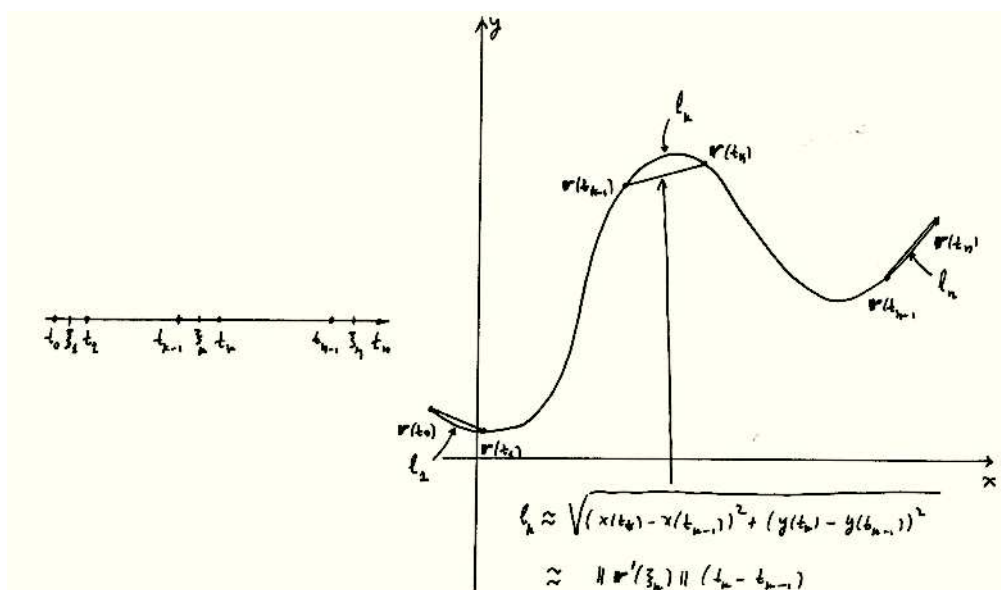
$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}.$$

Τώρα παίρνουμε διαμέριση $\Delta = \{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n\}$ του $[a, b]$ με πολύ μικρό πλάτος και για κάθε $k = 0, 1, \dots, n-1, n$ θεωρούμε το σημείο $T_k = \mathbf{r}(t_k) = (x(t_k), y(t_k))$ της C . Παρατηρήστε το σχήμα 8.2. Τα $T_0 = \mathbf{r}(a)$, $T_n = \mathbf{r}(b)$ είναι τα δύο άκρα της τροχιάς C . Αν l_k είναι το μήκος του τμήματος της C το οποίο βρίσκεται ανάμεσα στα σημεία T_{k-1} και T_k , τότε το μήκος l της C είναι

$$l = l_1 + \dots + l_n.$$

Τώρα θεωρούμε την πολυγωνική γραμμή με διαδοχικές κορυφές τα σημεία $T_0, T_1, \dots, T_{n-1}, T_n$ και, επειδή κάθε $[t_{k-1}, t_k]$ είναι αρκετά μικρό, το αντίστοιχο αρκετά μικρό τμήμα της C είναι περίπου ίδιο με το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα T_{k-1} και T_k . Άρα το μήκος l_k είναι περίπου ίσο με το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος, δηλαδή

$$l_k \approx \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2}.$$



Σχήμα 8.2

Σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού, υπάρχουν $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $\eta_k \in [t_{k-1}, t_k]$ ώστε

$$x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(\xi_k)(t_k - t_{k-1}), \quad y(t_k) - y(t_{k-1}) = y'(\eta_k)(t_k - t_{k-1}).$$

Άρα

$$\sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2} = \sqrt{x'(\xi_k)^2 + y'(\eta_k)^2} (t_k - t_{k-1}).$$

Επειδή η y' είναι συνεχής και το $[t_{k-1}, t_k]$ είναι αρκετά μικρό, συνεπάγεται ότι $y'(\eta_k) \approx y'(\xi_k)$, οπότε

$$l_k \approx \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2} \approx \sqrt{x'(\xi_k)^2 + y'(\xi_k)^2} (t_k - t_{k-1}) = \|\mathbf{r}'(\xi_k)\| (t_k - t_{k-1}).$$

Προσθέτοντας αυτές τις προσεγγιστικές ισότητες για $k = 1, \dots, n$, βρίσκουμε:

$$l \approx \sum_{k=1}^n \|\mathbf{r}'(\xi_k)\| (t_k - t_{k-1}).$$

Η τελευταία παράσταση είναι το άθροισμα Riemann $\Sigma(\|\mathbf{r}'\|; a, b; \Delta; \Xi)$ και αυτό προσεγγίζει το ολοκλήρωμα $\int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt$ όταν το πλάτος της Δ τείνει στο 0, οπότε

$$l = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Ανάλογο αποτέλεσμα έχουμε και για συνεχώς παραγωγίσιμες καμπύλες στον χώρο. Το μήκος της τροχιάς C της καμπύλης $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, η οποία ορίζεται από τις συνεχώς παραγωγίσιμες $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, δίνεται από τον τύπο

$$l = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt,$$

όπου, και πάλι, το $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$ είναι το μέτρο της διανυσματικής παραγώγου $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.

Τα παραπάνω αποτελέσματα διατυπώνονται ως εξής:

Το μήκος μίας συνεχώς παραγωγίσιμης καμπύλης είναι ίσο με το ολοκλήρωμα του μέτρου της διανυσματικής παραγώγου της.

Αν θεωρήσουμε για κάθε $t \in [a, b]$ το μήκος του τμήματος της τροχιάς της καμπύλης το οποίο βρίσκεται ανάμεσα στο αρχικό σημείο $\mathbf{r}(a)$ και στο σημείο $\mathbf{r}(t)$, τότε αυτό, προφανώς, δίνεται από τον τύπο

$$l(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(s)\| ds.$$

Η συνάρτηση $l : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία προκύπτει ονομάζεται **συνάρτηση μήκους** της καμπύλης $\mathbf{r}$. Έχοντας υποθέσει ότι η καμπύλη μας είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, βλέπουμε ότι

$$l'(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|$$

για $t \in [a, b]$. Δηλαδή, η παράγωγος της συνάρτησης μήκους ισούται με το μέτρο της διανυσματικής παραγώγου της καμπύλης. Όμως, η παράγωγος της συνάρτησης μήκους δεν είναι τίποτε άλλο από τον ρυθμό μεταβολής ως προς τον χρόνο του μήκους, το οποίο έχει διανυθεί από το κινητό σημείο $\mathbf{r}(s)$ από τη χρονική στιγμή a μέχρι τη χρονική στιγμή t , δηλαδή είναι η στιγμιαία ταχύτητα του $\mathbf{r}(s)$ τη χρονική στιγμή t . Επίσης, αν σκεφτούμε ότι το διάνυσμα $\mathbf{r}'(t)$ έχει κατεύθυνση η οποία ταυτίζεται με την κατεύθυνση διαγραφής της τροχιάς στο σημείο $\mathbf{r}(t)$, τότε είναι φυσιολογικό να ονομάσουμε **διανυσματική ταχύτητα** ή, πιο απλά, **ταχύτητα** της καμπύλης τη διανυσματική παράγωγο $\mathbf{r}'(t)$, και **αριθμητική ταχύτητα** ή **βαθμωτή ταχύτητα** της καμπύλης το μέτρο $\|\mathbf{r}'(t)\|$ της διανυσματικής παραγώγου. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι

Η παράγωγος της συνάρτησης μήκους ισούται με την αριθμητική ταχύτητα και, αντιστρόφως, η συνάρτηση μήκους ισούται με το αόριστο ολοκλήρωμα της αριθμητικής ταχύτητας.

Παράδειγμα 8.71. Ο κύκλος κέντρου (x_0, y_0) και ακτίνας $r > 0$ είναι η τροχιά της καμπύλης η οποία ορίζεται από τις $x : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $y : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $x(t) = r \cos t + x_0$, $y(t) = r \sin t + y_0$. Τότε $x'(t) = -r \sin t$, $y'(t) = r \cos t$, οπότε το μήκος του κύκλου είναι

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

Παράδειγμα 8.72. Η έλλειψη κέντρου (x_0, y_0) και με ημιάξονες $\kappa > 0$ και $\lambda > 0$ είναι η τροχιά της καμπύλης η οποία ορίζεται από τις $x : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $y : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $x(t) = \kappa \cos t + x_0$, $y(t) = \lambda \sin t + y_0$. Τότε $x'(t) = -\kappa \sin t$, $y'(t) = \lambda \cos t$, οπότε το μήκος της έλλειψης είναι

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{\kappa^2 \sin^2 t + \lambda^2 \cos^2 t} dt.$$

Παράδειγμα 8.73. Το γράφημα συνεχώς παραγωγίσιμης $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι η τροχιά της καμπύλης η οποία ορίζεται από τις $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $x(t) = t$, $y(t) = f(t)$. Τότε $x'(t) = 1$, $y'(t) = f'(t)$, οπότε το μήκος του γραφήματος είναι

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt.$$

Ασκήσεις

8.53. Υπολογίστε το μήκος κάθε τόξου του γραφήματος της $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(t) = at^2$.

8.54. Έστω $\kappa > 0$. Το γράφημα της $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(t) = \frac{\kappa}{2}(e^{\frac{t}{\kappa}} + e^{-\frac{t}{\kappa}})$ ονομάζεται **κατενοειδής**. Σύμφωνα με την άσκηση 5.44, ο τύπος της f γράφεται και $f(t) = \kappa \cosh \frac{t}{\kappa}$. Αποδεικνύεται ότι το σχήμα της κατενοειδούς ταυτίζεται με το σχήμα το οποίο παίρνει ένα σχοινί όταν κρέμεται ελεύθερα υπό την επίδραση του βάρους του από τα σταθερά άκρα του. Σχεδιάστε την κατενοειδή και υπολογίστε το μήκος κάθε τόξου της.

8.55. Θεωρούμε συνεχώς παραγωγίσιμη $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $r(\theta) \geq 0$ για κάθε $\theta \in [a, b]$ και την τροχιά C_r της καμπύλης η οποία ορίζεται από τις $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $x(\theta) = r(\theta) \cos \theta$, $y(\theta) = r(\theta) \sin \theta$. Αποδείξτε ότι το μήκος της C_r είναι ίσο με

$$l = \int_a^b \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2} d\theta.$$

(i) Αν $c > 0$, $\kappa > 0$, τότε θεωρούμε την $r : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $r(\theta) = ce^{\kappa\theta}$. Η αντίστοιχη τροχιά C_r ονομάζεται **λογαριθμική σπείρα**. Σχεδιάστε τη λογαριθμική σπείρα και υπολογίστε το μήκος κάθε τόξου της.

(ii) Αν $\kappa > 0$, τότε θεωρούμε την $r : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $r(\theta) = \kappa\theta$. Η αντίστοιχη τροχιά C_r ονομάζεται **σπείρα του Αρχιμήδη**. Σχεδιάστε τη σπείρα του Αρχιμήδη και υπολογίστε το μήκος κάθε τόξου της.

(iii) Αν $\kappa > 0$, τότε θεωρούμε την $r : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $r(\theta) = \frac{\kappa}{\theta}$. Η αντίστοιχη τροχιά C_r ονομάζεται **υπερβολική σπείρα**. Σχεδιάστε την υπερβολική σπείρα και υπολογίστε το μήκος κάθε τόξου της.

8.56. (i) Θεωρήστε την έλλειψη C με καρτεσιανή εξίσωση $(\frac{x-x_0}{\kappa})^2 + (\frac{y-y_0}{\lambda})^2 = 1$, όπου $\kappa > 0$, $\lambda > 0$. Χρησιμοποιήστε την παραμετρικοποίηση της C η οποία ορίζεται από τις $x : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $y : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $x(t) = \kappa \cos t + x_0$, $y(t) = \lambda \sin t + y_0$ για να γράψετε στη μορφή ελλειπτικού ολοκληρώματος το μήκος κάθε τόξου της. Για τα ελλειπτικά ολοκληρώματα δείτε στο τέλος της υποενότητας 8.4.5.

(ii) Γράψτε στη μορφή ελλειπτικού ολοκληρώματος το μήκος κάθε τόξου του γραφήματος της $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(t) = \frac{a}{t}$.

8.57. Ποια απλή και γνωστή γεωμετρική ανισότητα εκφράζει η

$$\sqrt{(x(b) - x(a))^2 + (y(b) - y(a))^2} \leq \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt;$$

Αποδείξτε την ανισότητα αυτή, κατανοώντας και συμπληρώνοντας τα εξής:

$$\begin{aligned} (x(b) - x(a))^2 + (y(b) - y(a))^2 &= |x(b) - x(a)| \left| \int_a^b x'(t) dt \right| + |y(b) - y(a)| \left| \int_a^b y'(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b (|x(b) - x(a)| |x'(t)| + |y(b) - y(a)| |y'(t)|) dt \\ &\leq \int_a^b \sqrt{(x(b) - x(a))^2 + (y(b) - y(a))^2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt. \end{aligned}$$

8.8.2 Υπολογισμός μάζας καμπυλόγραμμης ράβδου

Θεωρούμε μία πολύ λεπτή καμπυλόγραμμη ράβδο στο επίπεδο ή στον χώρο, οπότε είναι λογικό να την περιγράψουμε ως τροχιά μίας καμπύλης $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$. Υποθέτουμε, για απλούστευση, ότι η $\mathbf{r}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη. Υποθέτουμε, επίσης, ότι η ράβδος είναι κατασκευασμένη από ένα ανομοιογενές υλικό του οποίου η σημειακή γραμμική πυκνότητα καθορίζεται από τη συνάρτηση $d : C \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $C = \{\mathbf{r}(t) | t \in [a, b]\}$ είναι η τροχιά της καμπύλης, δηλαδή η ράβδος. Υποθέτουμε, για απλούστευση, ότι και η συνάρτηση d είναι συνεχής.

Θα υπολογίσουμε, τώρα, τη μάζα της ράβδου. Επιλέγουμε, λοιπόν, οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n\}$ του $[a, b]$ με πολύ μικρό πλάτος. Σε αυτήν αντιστοιχεί μία διαμέριση της ράβδου σε πολύ κοντινά διαδοχικά σημεία $\mathbf{r}(t_0), \mathbf{r}(t_1), \dots, \mathbf{r}(t_{n-1}), \mathbf{r}(t_n)$. Συμβολίζουμε m_k τη μάζα του τμήματος της ράβδου ανάμεσα στα διαδοχικά σημεία $\mathbf{r}(t_{k-1})$ και $\mathbf{r}(t_k)$, οπότε για τη συνολική μάζα m της ράβδου ισχύει

$$m = m_1 + \dots + m_n.$$

Η πυκνότητα d είναι συνεχής, οπότε, όταν το t διατρέχει οποιοδήποτε από τα μικρά υποδιαστήματα $[t_{k-1}, t_k]$, τότε οι διακυμάνσεις του $d(\mathbf{r}(t))$ είναι αμελητέες. Επομένως, αν πάρουμε οποιοδήποτε ενδιάμεσο σημείο $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$, τότε οι τιμές του $d(\mathbf{r}(t))$ στο $[t_{k-1}, t_k]$ είναι περίπου ίσες με το $d(\mathbf{r}(\xi_k))$, οπότε η μάζα m_k είναι περίπου ίση με τη μάζα την οποία θα είχε το τμήμα της ράβδου ανάμεσα στα διαδοχικά σημεία $\mathbf{r}(t_{k-1})$ και $\mathbf{r}(t_k)$, αν το υλικό του ήταν ομοιογενές σταθερής σημειακής γραμμικής πυκνότητας $d(\mathbf{r}(\xi_k))$. Δηλαδή,

$$m_k \approx d(\mathbf{r}(\xi_k)) l_k,$$

όπου l_k είναι το μήκος του ίδιου τμήματος της ράβδου. Όμως, από την προηγούμενη υποενότητα γνωρίζουμε ότι $l_k = l(t_k) - l(t_{k-1})$, όπου $l : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση μήκους της καμπύλης μας. Δηλαδή,

$$m_k \approx d(\mathbf{r}(\xi_k)) (l(t_k) - l(t_{k-1})).$$

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού και από την προηγούμενη υποενότητα έχουμε ότι

$$l(t_k) - l(t_{k-1}) = l'(\eta_k)(t_k - t_{k-1}) = \|\mathbf{r}'(\eta_k)\| (t_k - t_{k-1})$$

για κάποιο $\eta_k \in [t_{k-1}, t_k]$. Και, πάλι, επειδή η $\mathbf{r}'(t)$ είναι συνεχής,

$$l(t_k) - l(t_{k-1}) \approx \|\mathbf{r}'(\xi_k)\| (t_k - t_{k-1}),$$

οπότε

$$m_k \approx d(\mathbf{r}(\xi_k)) \|\mathbf{r}'(\xi_k)\| (t_k - t_{k-1}).$$

Άρα για τη συνολική μάζα $m = m_1 + \dots + m_n$ της ράβδου $[a, b]$ έχουμε ότι

$$m \approx \sum_{k=1}^n d(\mathbf{r}(\xi_k)) \|\mathbf{r}'(\xi_k)\| (t_k - t_{k-1}).$$

Η τελευταία παράσταση είναι το άθροισμα Riemann $\Sigma(d \circ \mathbf{r} \|\mathbf{r}'\|; a, b; \Delta; \Xi)$, το οποίο προσεγγίζει το $\int_a^b d(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt$ όταν το πλάτος της Δ τείνει στο 0. Άρα

$$m = \int_a^b d(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt.$$

Επομένως,

Η μάζα καμπυλόγραμμης ράβδου από υλικό με συνεχή γραμμική πυκνότητα και η οποία είναι τροχιά συνεχώς παραγωγίσιμης καμπύλης είναι ίση με το ολοκλήρωμα του γινομένου της γραμμικής πυκνότητας και του μέτρου της διανυσματικής παραγώγου της καμπύλης.

8.8.3 Υπολογισμός έργου δύναμης

Έστω δύναμη $\mathbf{F}$ σταθερή σε διεύθυνση, φορά και μέτρο, η οποία ασκείται σε σημειακό υλικό σώμα κινούμενο σε ευθύγραμμη τροχιά στο επίπεδο ή στον χώρο από το σημείο A στο σημείο B . Αν $\mathbf{T}$ είναι το διάνυσμα από το σημείο A στο σημείο B , γνωρίζουμε ότι η $\mathbf{F}$ παράγει έργο W ίσο με

$$W = \|\mathbf{F}\| \|\mathbf{T}\| \cos \theta = \mathbf{F} \cdot \mathbf{T},$$

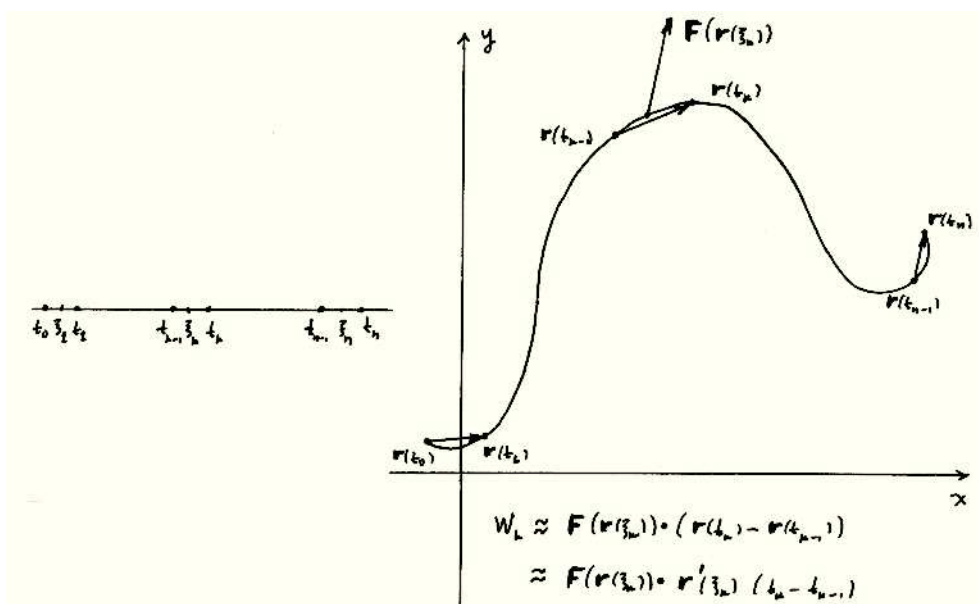
όπου $\theta \in [0, \pi]$ είναι η κυρτή γωνία των διανυσμάτων $\mathbf{F}$ και $\mathbf{T}$, $\|\mathbf{F}\|, \|\mathbf{T}\|$ είναι τα μέτρα τους και $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ είναι το εσωτερικό γινόμενο τους.

Τώρα θα υπολογίσουμε το έργο W μεταβλητής δύναμης η οποία ασκείται σε σημειακό υλικό σώμα κινούμενο σε καμπυλόγραμμη τροχιά στο επίπεδο ή στον χώρο.

Έστω καμπύλη $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$ και έστω δύναμη ως συνάρτηση $\mathbf{F} : C \rightarrow \mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$, όπου $C = \{\mathbf{r}(t) \mid t \in [a, b]\}$ είναι η τροχιά της καμπύλης: σε κάθε σημείο $\mathbf{r}(t)$ της τροχιάς ασκείται δύναμη $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$. Έστω, για απλούστευση, ότι η $\mathbf{r}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και ότι η $\mathbf{F}$ είναι συνεχής.

Έστω διαμέριση $\Delta = \{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n\}$ του $[a, b]$ με πολύ μικρό πλάτος και έστω W_k το παραγόμενο έργο από την $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ κατά την κίνηση του $\mathbf{r}(t)$ στο χρονικό υποδιάστημα $[t_{k-1}, t_k]$. Παρατηρήστε το σχήμα 8.3. Βάσει της φυσικής παραδοχής ότι το έργο το οποίο παράγεται στην ένωση διαδοχικών χρονικών υποδιαστημάτων ισούται με το άθροισμα των επιμέρους έργων σε όλα τα χρονικά υποδιαστήματα, έχουμε:

$$W = W_1 + \dots + W_n.$$



Σχήμα 8.3

Επειδή το $[t_{k-1}, t_k]$ είναι αρκετά μικρό, η $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ είναι περίπου σταθερή και η τροχιά του υλικού σημείου είναι περίπου ευθύγραμμη κατά το χρονικό αυτό υποδιάστημα. Επιλέγουμε ενδιάμεση

χρονική στιγμή $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$, οπότε το έργο W_k είναι περίπου ίσο με το έργο το οποίο θα παρήγαγε η σταθερή δύναμη $\mathbf{F}(\mathbf{r}(\xi_k))$ σε ευθύγραμμη κίνηση από το σημείο $\mathbf{r}(t_{k-1})$ στο σημείο $\mathbf{r}(t_k)$, δηλαδή

$$W_k \approx \mathbf{F}(\mathbf{r}(\xi_k)) \cdot (\mathbf{r}(t_k) - \mathbf{r}(t_{k-1})).$$

Αν υποθέσουμε ότι η καμπύλη είναι στο επίπεδο, δηλαδή ότι είναι $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, τότε βάσει του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού υπάρχουν $\eta_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $\zeta_k \in [t_{k-1}, t_k]$ ώστε

$$x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(\eta_k)(t_k - t_{k-1}), \quad y(t_k) - y(t_{k-1}) = y'(\zeta_k)(t_k - t_{k-1}).$$

Επειδή οι x', y' είναι συνεχείς, οι τιμές $x'(\eta_k)$ και $y'(\zeta_k)$ είναι περίπου ίσες με τις $x'(\xi_k)$ και $y'(\xi_k)$, αντιστοίχως, οπότε

$$\mathbf{r}(t_k) - \mathbf{r}(t_{k-1}) = (x(t_k) - x(t_{k-1}), y(t_k) - y(t_{k-1})) \approx (x'(\xi_k), y'(\xi_k))(t_k - t_{k-1}) = \mathbf{r}'(\xi_k)(t_k - t_{k-1}).$$

Την ίδια σχέση $\mathbf{r}(t_k) - \mathbf{r}(t_{k-1}) \approx \mathbf{r}'(\xi_k)(t_k - t_{k-1})$ βρίσκουμε και όταν η καμπύλη είναι στον χώρο, δηλαδή όταν $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Επομένως,

$$W_k \approx \mathbf{F}(\mathbf{r}(\xi_k)) \cdot \mathbf{r}'(\xi_k)(t_k - t_{k-1}).$$

Προσθέτοντας όλες τις προσεγγιστικές ισότητες, έχουμε

$$W \approx \sum_{k=1}^n \mathbf{F}(\mathbf{r}(\xi_k)) \cdot \mathbf{r}'(\xi_k)(t_k - t_{k-1}).$$

Η τελευταία παράσταση είναι το άθροισμα Riemann $\Sigma((\mathbf{F} \circ \mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}'; a, b, \Delta, \Xi)$ και προσεγγίζει το $\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$ όταν το πλάτος της Δ τείνει στο 0. Άρα

$$W = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt.$$

Συμπέρασμα:

Το έργο το οποίο παράγεται από μία συνεχή δύναμη η οποία δρα σε υλικό σημείο κινούμενο στην τροχιά συνεχώς παραγωγίσιμης καμπύλης είναι ίσο με το ολοκλήρωμα του εσωτερικού γινομένου της δύναμης και της διανυσματικής παραγώγου της καμπύλης.

Παράδειγμα 8.74. Αν η δύναμη είναι συνεχώς κάθετη στην κατεύθυνση της κίνησης, τότε το πα-
ραγόμενο από αυτήν έργο είναι 0.

Πράγματι, το διάνυσμα κατεύθυνσης σε κάθε σημείο $\mathbf{r}(t)$ της τροχιάς του υλικού σημείου είναι το $\mathbf{r}'(t)$. Άρα ισχύει $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$ για κάθε t , οπότε $W = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = 0$.

Ασκήσεις

8.58. Βάσει του νόμου του Newton η κεντρική βαρυτική δύναμη $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(x, y, z)$ η οποία ασκείται πάνω σε υλικό σημείο $\mathbf{r} = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ μάζας m είναι ίση με

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(x, y, z) = -\frac{cm}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (x, y, z) = -\frac{cm}{r^3} \mathbf{r},$$

όπου $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \|\mathbf{r}\| > 0$ και c είναι σταθερός, δηλαδή ανεξάρτητος της θέσης του σημείου, θετικός αριθμός. Αν $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι οι συναρτήσεις κίνησης του υλικού σημείου $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, δηλαδή οι συναρτήσεις οι οποίες καθορίζουν την καμπύλη $\mathbf{r} = (x, y, z)$ στην τροχιά της οποίας κινείται το σημείο, αποδείξτε ότι το έργο το οποίο παράγει η βαρυτική δύναμη είναι

$$W = -cm \int_a^b \frac{r'(t)}{r(t)^2} dt = cm \left(\frac{1}{r(b)} - \frac{1}{r(a)} \right),$$

όπου $r(t) = \|\mathbf{r}(t)\| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}$. Δηλαδή, το έργο δεν εξαρτάται από το σχήμα της τροχιάς την οποία διαγράφει το υλικό σημείο κατά την κίνησή του, αλλά εξαρτάται μόνο από την αρχική και την τελική απόσταση του σημείου από το κέντρο $(0, 0, 0)$.

Ποιο έργο παράγεται από την κεντρική βαρυτική δύναμη, αν το υλικό σημείο κινηθεί από το «άπειρο» προς κάποιο σημείο A ;

8.59. Βάσει του νόμου του Hooke η δύναμη $\mathbf{F} = F$ η οποία ασκείται πάνω σε υλικό σημείο x του x -άξονα μάζας m από ένα ελατήριο προσαρμοσμένο στο σημείο 0 είναι ίση με $F = -cmx$, όπου c είναι σταθερός, δηλαδή ανεξάρτητος της θέσης του σημείου, θετικός αριθμός.

Αν η συνάρτηση κίνησης του υλικού σημείου είναι η $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι το έργο το οποίο παράγεται από τη δύναμη του ελατηρίου είναι

$$W = -cm \int_a^b x(t)x'(t) dt = \frac{cm}{2}(x(a)^2 - x(b)^2).$$

Εξαρτάται το έργο από την ενδιάμεση «πορεία» του υλικού σημείου ή εξαρτάται μόνο από την αρχική και την τελική απόσταση του σημείου από το 0 ;

Ποιο έργο παράγεται, αν το υλικό σημείο κινηθεί από το 0 προς κάποιο σημείο A ;

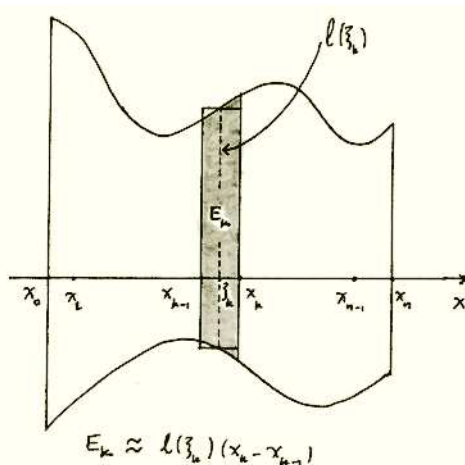
8.8.4 Υπολογισμός εμβαδού επίπεδης επιφάνειας

Θεωρούμε μια επίπεδη φραγμένη επιφάνεια A με σχετικά απλό σύνορο. Θα γνωρίσουμε μερικές πολύ χρήσιμες μεθόδους υπολογισμού του εμβαδού E της A , όλες παραλλαγές της λεγόμενης **μεθόδου των διατομών**.

(i) **Η μέθοδος των παράλληλων διατομών.** Ως x -άξονα θεωρούμε οποιαδήποτε ευθεία l στο επίπεδο της επιφάνειας A . Σε κάθε σημείο x της l φτιάχνουμε την κάθετη προς αυτήν ευθεία l_x στο ίδιο επίπεδο και θεωρούμε την τομή $A^{(x)}$ της A με την l_x την οποία ονομάζουμε **διατομή της A κάθετη προς την ευθεία l** . Αν το σύνορο της A είναι σχετικά απλό, τότε η $A^{(x)}$ αποτελείται από ένα ή περισσότερα ευθύγραμμα τμήματα και έστω $l(x)$ το άθροισμα των μηκών αυτών των ευθύγραμμων τμημάτων. Επειδή η A είναι φραγμένη, υπάρχει διάστημα $[a, b]$ της l ώστε για $x \notin [a, b]$ η διατομή $A^{(x)}$ είναι κενή, οπότε $l(x) = 0$.

Επιλέγουμε διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ του $[a, b]$ με αρκετά μικρό πλάτος. Παρατηρήστε το σχήμα 8.4. Έστω A_k το μέρος της A ανάμεσα στις ευθείες $l_{x_{k-1}}$ και l_{x_k} και E_k το εμβαδόν της A_k . Η A είναι η ένωση των $A_1, \dots, A_n$, οπότε το εμβαδόν της E είναι ίσο με

$$E = E_1 + \dots + E_n.$$



Σχήμα 8.4

Επιλέγουμε ενδιάμεσο σημείο $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ και την αντίστοιχη διατομή $A^{(\xi_k)}$. Από κάθε ευθύγραμμο τμήμα της $A^{(\xi_k)}$ φτιάχνουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με τις δύο του πλευρές

πάνω στις ευθείες $l_{x_{k-1}}$ και l_{x_k} και με τις άλλες δύο του πλευρές να περιέχουν τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος. Επειδή το $[x_{k-1}, x_k]$ είναι πολύ μικρό, η επιφάνεια A_k είναι περίπου ίση με την ένωση $\widetilde{A_k}$ των ορθογώνιων παραλληλογράμμων τα οποία φτιάξαμε από τα ευθύγραμμο τμήματα της $A^{(\xi_k)}$. Καθένα από αυτά τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα έχει βάση μήκους $x_k - x_{k-1}$ και το άθροισμα των υψών τους είναι $l(\xi_k)$, οπότε το εμβαδόν $\widetilde{E_k}$ της $\widetilde{A_k}$ είναι $l(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$. Τώρα, το εμβαδόν E_k της A_k είναι περίπου ίσο με το εμβαδόν $\widetilde{E_k}$ της $\widetilde{A_k}$, δηλαδή

$$E_k \approx l(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Προσθέτοντας αυτές τις προσεγγιστικές ισότητες για $k = 1, \dots, n$, βρίσκουμε

$$E \approx \sum_{k=1}^n l(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \Sigma(l; a, b; \Delta; \Xi).$$

Αλλά το άθροισμα Riemann $\Sigma(l; a, b; \Delta; \Xi)$ προσεγγίζει το $\int_a^b l(x) dx$ όταν το πλάτος της Δ τείνει στο 0, οπότε

$$E = \int_a^b l(x) dx.$$

Αυτό το αποτέλεσμα αναφέρεται ως εξής:

Το εμβαδόν μίας φραγμένης επίπεδης επιφάνειας είναι ίσο με το ολοκλήρωμα των μηκών των διατομών της οι οποίες είναι όλες κάθετες στην ίδια ευθεία.

Παράδειγμα 8.75. Έστω τραπέζιο με ύψος h και με παράλληλες βάσεις με μήκη a, b . Ως x -άξονα θεωρούμε ευθεία l κάθετη στις παράλληλες πλευρές του τραpezίου και επιλέγουμε τα σημεία 0 και h της l να είναι τα σημεία τομής της με τις ευθείες των βάσεων μήκους a και μήκους b , αντιστοίχως, του τραpezίου. Αν $x \notin [0, h]$, τότε η αντίστοιχη διατομή του τραpezίου είναι κενή, ενώ αν $x \in [0, h]$, τότε το μήκος της αντίστοιχης διατομής είναι $l(x) = \frac{b-a}{h}x + a$. Άρα το εμβαδόν του τραpezίου είναι

$$E = \int_0^h l(x) dx = \int_0^h \left(\frac{b-a}{h}x + a\right) dx = \frac{b-a}{h} \int_0^h x dx + a \int_0^h dx = \frac{b-a}{h} \frac{h^2}{2} + ah = \frac{b+a}{2}h.$$

Αυτός είναι γνωστός τύπος από το Γυμνάσιο και περιέχει ως ειδικές περιπτώσεις τους τύπους των εμβαδών τριγώνου και παραλληλογράμμου. Παρατηρούμε ότι $\frac{a+b}{2} = l\left(\frac{h}{2}\right)$ είναι το μήκος της διατομής η οποία βρίσκεται σε ίση απόσταση από τις δύο παράλληλες βάσεις.

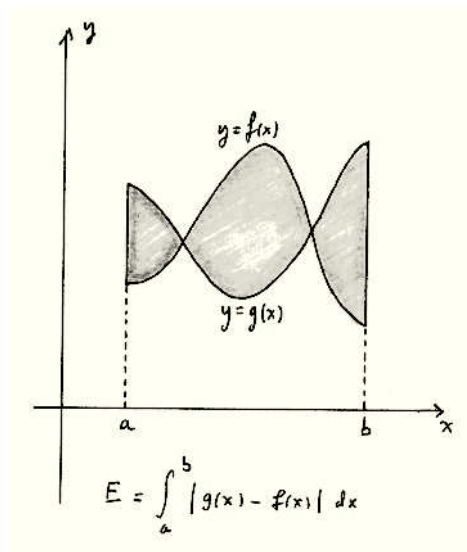
Παράδειγμα 8.76. Έστω κυκλικός δίσκος ακτίνας $r > 0$. Ως x -άξονα θεωρούμε ευθεία l η οποία διέρχεται από το κέντρο του δίσκου. Επιλέγουμε το σημείο 0 της l να είναι το κέντρο του δίσκου, οπότε η διατομή του δίσκου η οποία είναι κάθετη στην l στο σημείο x έχει μήκος $l(x) = 2\sqrt{r^2 - x^2}$, αν $x \in [-r, r]$, και $l(x) = 0$, αν $x \notin [-r, r]$. Άρα το εμβαδόν του δίσκου είναι

$$E = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 2r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = 2r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \pi r^2.$$

Κι αυτός ο τύπος μας είναι πολύ γνωστός!

Παράδειγμα 8.77. Τα παραδείγματα 8.75 και 8.76 είναι ειδικές περιπτώσεις της εξής κατάστασης. Έστω συνεχείς $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ και A η επιφάνεια η οποία βρίσκεται ανάμεσα στα γραφήματα των f, g , στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $(a, f(a))$ και $(a, g(a))$ και στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $(b, f(b))$ και $(b, g(b))$. Παρατηρήστε το σχήμα 8.5. Τότε για κάθε $x \in [a, b]$ η διατομή $A^{(x)}$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $(x, f(x))$ και $(x, g(x))$ και έχει μήκος $l(x) = |g(x) - f(x)|$, ενώ για κάθε $x \notin [a, b]$ η διατομή $A^{(x)}$ είναι κενή. Άρα το εμβαδόν της A είναι

$$E = \int_a^b |g(x) - f(x)| dx.$$



Σχήμα 8.5

Παράδειγμα 8.78. Το εμβαδόν της επιφάνειας η οποία βρίσκεται ανάμεσα στα γραφήματα των x και x^2 , στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $(-1, -1)$ και $(-1, 1)$ και στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $(3, 3)$ και $(3, 9)$ είναι ίσο με $\int_{-1}^3 |x^2 - x| dx$. Μελετώντας το πρόσημο της $x^2 - x = x(x-1)$, βρίσκουμε:

$$E = \int_{-1}^3 |x^2 - x| dx = \int_{-1}^0 (x^2 - x) dx + \int_0^1 (x - x^2) dx + \int_1^3 (x^2 - x) dx = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} + \frac{16}{3} = \frac{19}{3}.$$

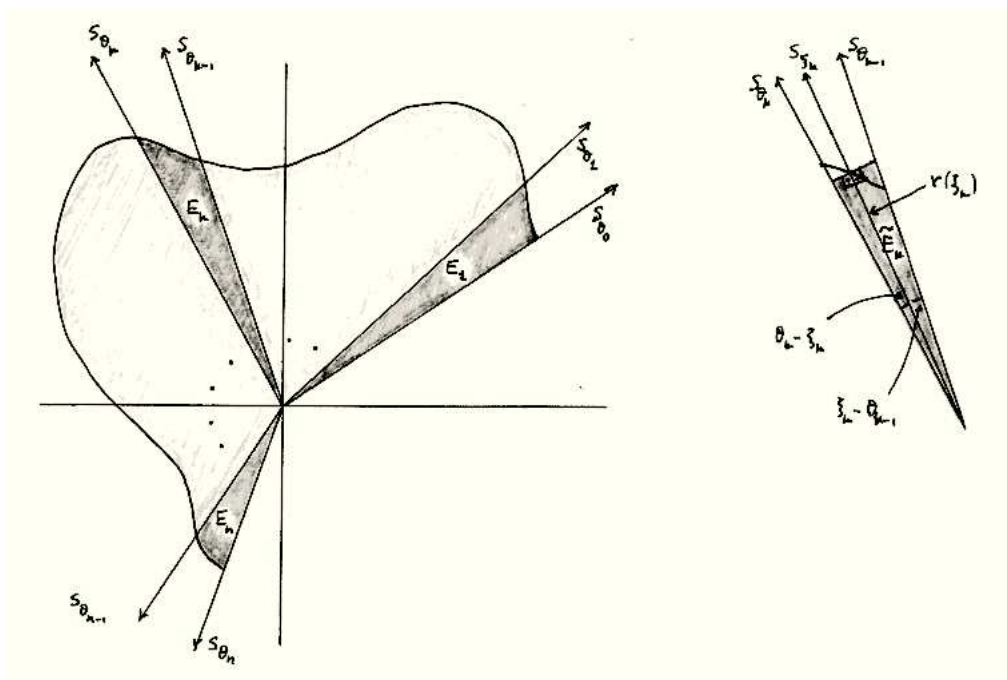
(ii) **Η μέθοδος των ακτινικών διατομών.** Θεωρούμε ένα σημείο O στο επίπεδο. Έστω s_0 μία ημιευθεία με κορυφή O και για κάθε $\theta \in [0, 2\pi]$ έστω s_θ η ημιευθεία με κορυφή O η οποία προκύπτει με περιστροφή της s_0 γύρω από το O κατά γωνία μέτρου θ και με φορά αντίθετη της φοράς περιστροφής των δεικτών του ρολογιού. Φυσικά, η $s_{2\pi}$ είναι ίδια με την s_0 και, όταν το θ αυξάνεται στο $[0, 2\pi]$, τότε η s_θ περιστρέφεται με φορά αντίθετη της φοράς περιστροφής των δεικτών του ρολογιού από την s_0 στην $s_{2\pi}$. Τώρα, θεωρούμε διάστημα $[a, b] \subseteq [0, 2\pi]$ και συνάρτηση $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι, για απλούστευση, συνεχής, και ώστε $r(\theta) \geq 0$ για κάθε $\theta \in [a, b]$. Κατόπιν, για κάθε $\theta \in [a, b]$ θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα $A^{(\theta)}$ επί της s_θ με ένα άκρο το O και με μήκος $r(\theta)$. Το σύνολο των ευθύγραμμων τμημάτων $A^{(\theta)}$ σχηματίζει μία επίπεδη επιφάνεια A η οποία περιέχεται στη γωνία την οποία σχηματίζουν οι ημιευθείες s_a και s_b . Για κάθε $\theta \in [a, b]$ το ευθύγραμμο τμήμα $A^{(\theta)}$, δηλαδή η τομή της A με την ημιευθεία s_θ , ονομάζεται **ακτινική διατομή** κέντρου O της A . Κάθε επιφάνεια A η οποία κατασκευάζεται με αυτόν τον τρόπο χαρακτηρίζεται **ακτινική επιφάνεια** κέντρου O και η αντίστοιχη $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται **ακτινική συνάρτηση** της A .

Θεωρούμε διαμέριση $\Delta = \{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}, \theta_n\}$ του $[a, b]$ με πολύ μικρό πλάτος. Παρατηρήστε το σχήμα 8.6. Για κάθε υποδιάστημα $[\theta_{k-1}, \theta_k]$ έστω A_k το μέρος της A ανάμεσα στις ημιευθείες $s_{\theta_{k-1}}, s_{\theta_k}$, οπότε η A είναι η ένωση των $A_1, \dots, A_n$. Αν E_k είναι το εμβαδόν της A_k , τότε το εμβαδόν E της A είναι

$$E = E_1 + \dots + E_n.$$

Επιλέγουμε ενδιάμεσο σημείο $\xi_k \in [\theta_{k-1}, \theta_k]$ και φτιάχνουμε το τρίγωνο $\widetilde{A}_k$ με κορυφή O , με δύο πλευρές πάνω στις ημιευθείες $s_{\theta_{k-1}}$ και s_{θ_k} και την τρίτη πλευρά κάθετη στην ημιευθεία s_{ξ_k} και σε απόσταση $r(\xi_k)$ από το O . Επειδή το $[\theta_{k-1}, \theta_k]$ είναι πολύ μικρό, η A_k είναι περίπου ίση με το τρίγωνο $\widetilde{A}_k$, οπότε το εμβαδόν E_k της A_k είναι περίπου ίσο με το εμβαδόν $\widetilde{E}_k$ του τριγώνου $\widetilde{A}_k$. Το $\widetilde{A}_k$ αποτελείται από δύο ορθογώνια τρίγωνα. Το ένα έχει μία κάθετη πλευρά με μήκος $r(\xi_k)$ και γωνία $\theta_k - \xi_k$ στην κορυφή O , ενώ το άλλο έχει την ίδια κάθετη πλευρά με μήκος $r(\xi_k)$ και γωνία $\xi_k - \theta_{k-1}$ στην κορυφή O . Επομένως εύκολα μπορεί να αντιληφθεί κάποιος ότι το εμβαδόν $\widetilde{E}_k$ του τριγώνου $\widetilde{A}_k$ είναι ίσο με

$$\widetilde{E}_k = \frac{1}{2} r(\xi_k)^2 \tan(\theta_k - \xi_k) + \frac{1}{2} r(\xi_k)^2 \tan(\xi_k - \theta_{k-1}).$$



Σχήμα 8.6

Από το γνωστό όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ συνεπάγεται ότι όταν το x είναι περίπου ίσο με 0, τότε $\frac{\tan x}{x} \approx 1$ οπότε $\tan x \approx x$. Επομένως, επειδή οι διαφορές $\theta_k - \xi_k$ και $\xi_k - \theta_{k-1}$ είναι περίπου ίσες με 0, έχουμε ότι $\tan(\theta_k - \xi_k) \approx \theta_k - \xi_k$ και $\tan(\xi_k - \theta_{k-1}) \approx \xi_k - \theta_{k-1}$. Άρα ο προηγούμενος τύπος για το $\widetilde{E}_k$ δίνει ότι

$$\widetilde{E}_k \approx \frac{1}{2} r(\xi_k)^2 (\theta_k - \xi_k) + \frac{1}{2} r(\xi_k)^2 (\xi_k - \theta_{k-1}) = \frac{1}{2} r(\xi_k)^2 (\theta_k - \theta_{k-1}).$$

Τέλος, επειδή $E_k \approx \widetilde{E}_k$, έχουμε ότι

$$E_k \approx \frac{1}{2} r(\xi_k)^2 (\theta_k - \theta_{k-1}).$$

Προσθέτοντας αυτές τις προσεγγιστικές ισότητες για $k = 1, \dots, n$, βρίσκουμε

$$E \approx \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n r(\xi_k)^2 (\theta_k - \theta_{k-1}) = \frac{1}{2} \Sigma(r^2; a, b; \Delta; \Xi).$$

Αλλά το άθροισμα Riemann $\Sigma(r^2; a, b; \Delta; \Xi)$ προσεγγίζει το $\int_a^b r(\theta)^2 d\theta$ όταν το πλάτος της Δ τείνει στο 0, οπότε

$$E = \frac{1}{2} \int_a^b r(\theta)^2 d\theta.$$

Επομένως,

Το εμβαδόν μίας ακτινικής επιφάνειας ισούται με το μισό του ολοκληρώματος του τετραγώνου της ακτινικής της συνάρτησης.

Παράδειγμα 8.79. Ένας κυκλικός δίσκος κέντρου O και ακτίνας $r > 0$ είναι ακτινική επιφάνεια κέντρου O . Η ακτινική συνάρτηση είναι σταθερή: $r(\theta) = r$ για κάθε $\theta \in [0, 2\pi]$. Άρα το εμβαδόν του δίσκου είναι

$$E = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\theta = \pi r^2.$$

Παράδειγμα 8.80. Ένας κυκλικός τομέας με κορυφή O , ακτίνα $r > 0$ και γωνία κορυφής Θ στο $[0, 2\pi]$ είναι ακτινική επιφάνεια κέντρου O . Η ακτινική συνάρτηση είναι σταθερή $r(\theta) = r$ στο διάστημα $[0, \Theta]$ και σταθερή $r(\theta) = 0$ εκτός του $[0, \Theta]$. Άρα το εμβαδόν του κυκλικού τομέα είναι

$$E = \frac{1}{2} \int_0^\Theta r^2 d\theta = \frac{1}{2} \Theta r^2.$$

(iii) **Η μέθοδος των κυκλικών διατομών.** Θεωρούμε φραγμένη επίπεδη επιφάνεια A και σημείο O στο επίπεδό της. Για κάθε $r \geq 0$ φέρνουμε τον κύκλο C_r με κέντρο O και ακτίνα r . Συμβολίζουμε $A^{(r)}$ την τομή του κύκλου C_r με την A και την ονομάζουμε **κυκλική διατομή** κέντρου O της A . Η $A^{(r)}$ αποτελείται από ένα ή περισσότερα τόξα του κύκλου C_r και έστω $l(r)$ το άθροισμα των μηκών αυτών των τόξων. Επειδή η A είναι φραγμένη, υπάρχει $[a, b] \subseteq [0, +\infty)$ ώστε, αν $r \notin [a, b]$, τότε η κυκλική διατομή $A^{(r)}$ είναι κενή, οπότε $l(r) = 0$.

Επιλέγουμε διαμέριση $\Delta = \{r_0, r_1, \dots, r_{n-1}, r_n\}$ του $[a, b]$ με πολύ μικρό πλάτος και έστω A_k η τομή της A με τον δακτύλιο ανάμεσα στους κύκλους $C_{r_{k-1}}$ και C_{r_k} . Παρατηρήστε το σχήμα 8.7. Αν E_k είναι το εμβαδόν της A_k , τότε το εμβαδόν E της A είναι

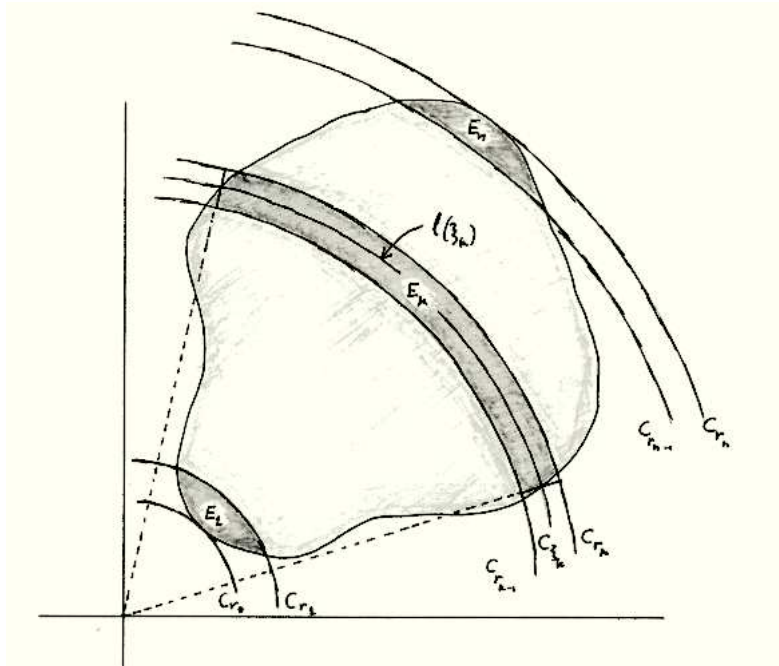
$$E = E_1 + \dots + E_n.$$

Επιλέγουμε ενδιάμεσο σημείο $\xi_k \in [r_{k-1}, r_k]$ και την αντίστοιχη κυκλική διατομή $A^{(\xi_k)}$. Από κάθε τόξο της $A^{(\xi_k)}$ φτιάχνουμε τον τομέα κυκλικού δακτυλίου, εσωτερικής ακτίνας r_{k-1} και εξωτερικής ακτίνας r_k , ανάμεσα στις ημιευθείες με κορυφή O οι οποίες περιέχουν τα άκρα του τόξου. Το εμβαδόν αυτού του τομέα κυκλικού δακτυλίου είναι $\frac{1}{2}\theta(r_k^2 - r_{k-1}^2)$, όπου θ είναι η γωνία του. Όμως,

$$\frac{1}{2}\theta(r_k^2 - r_{k-1}^2) = \frac{r_k + r_{k-1}}{2}\theta(r_k - r_{k-1}) \approx \xi_k\theta(r_k - r_{k-1}),$$

διότι οι ακτίνες r_k, r_{k-1} είναι *περίπου ίσες* με την ξ_k . Το μήκος l του τόξου από το οποίο φτιάχτηκε ο τομέας κυκλικού δακτυλίου είναι $\xi_k\theta$, οπότε το εμβαδόν του τομέα κυκλικού δακτυλίου είναι *περίπου ίσο* με $l(r_k - r_{k-1})$. Αν $\bar{A}_k$ είναι η ένωση αυτών των τομέων κυκλικού δακτυλίου οι οποίοι φτιάχνονται από τα τόξα της διατομής $A^{(\xi_k)}$, τότε το εμβαδόν $\bar{E}_k$ της $\bar{A}_k$ είναι περίπου ίσο με το γινόμενο του αθροίσματος των μηκών των τόξων της διατομής $A^{(\xi_k)}$ επί το $r_k - r_{k-1}$, οπότε περίπου ίσο με το $l(\xi_k)(r_k - r_{k-1})$. Επειδή το $[r_{k-1}, r_k]$ είναι αρκετά μικρό, η επιφάνεια A_k είναι *περίπου ίση* με την $\bar{A}_k$, οπότε το εμβαδόν E_k της A_k είναι *περίπου ίσο* με εμβαδόν $\bar{E}_k$ της $\bar{A}_k$. Δηλαδή:

$$E_k \approx \bar{E}_k \approx l(\xi_k)(r_k - r_{k-1}).$$



Σχήμα 8.7

Προσθέτοντας αυτές τις προσεγγιστικές ισότητες για $k = 1, \dots, n$, βρίσκουμε

$$E \approx \sum_{k=1}^n l(\xi_k)(r_k - r_{k-1}) = \Sigma(l; a, b; \Delta; \Xi).$$

Επειδή το άθροισμα Riemann $\Sigma(l; a, b; \Delta; \Xi)$ προσεγγίζει το $\int_a^b l(r) dr$ όταν το πλάτος της Δ τείνει στο 0, καταλήγουμε στο ότι

$$E = \int_a^b l(r) dr.$$

Το αποτέλεσμα αυτό διατυπώνεται ως εξής.

Το εμβαδόν μίας φραγμένης επίπεδης επιφάνειας ισούται με το ολοκλήρωμα των μηκών των κυκλικών διατομών της με το ίδιο κέντρο.

Ασκήσεις

8.60. Χρησιμοποιώντας παράλληλες διατομές, υπολογίστε το εμβαδόν της επίπεδης επιφάνειας η οποία βρίσκεται ανάμεσα στα γραφήματα των x^2 και $\sqrt{x}$ στο διάστημα $[0, 1]$.

8.61. Χρησιμοποιώντας παράλληλες και ακτινικές διατομές, υπολογίστε το εμβαδόν της επίπεδης επιφάνειας η οποία περικλείεται στην έλλειψη με καρτεσιανή εξίσωση $(\frac{x-x_0}{\kappa})^2 + (\frac{y-y_0}{\lambda})^2 = 1$.

8.62. (i) Έστω $a > 0$. Θεωρήστε την καμπύλη η οποία ορίζεται από τις $x : [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \rightarrow \mathbb{R}$ και $y : [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $x(\theta) = a\sqrt{\cos(2\theta)}\cos\theta$ και $y(\theta) = a\sqrt{\cos(2\theta)}\sin\theta$, καθώς και την καμπύλη η οποία ορίζεται από τις $x : [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}] \rightarrow \mathbb{R}$ και $y : [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}] \rightarrow \mathbb{R}$ με τους ίδιους τύπους. Σχεδιάστε τις τροχιές αυτών των δύο καμπυλών, οι οποίες είναι συμμετρικές ως προς το σημείο $(0, 0)$. Η ένωση των δύο τροχιών ονομάζεται **λημνίσκος** και οι δύο τροχιές είναι τα «φύλλα» του λημνίσκου. Χρησιμοποιώντας ακτινικές και κυκλικές διατομές, υπολογίστε το εμβαδόν της επίπεδης επιφάνειας η οποία περικλείεται στα δύο «φύλλα» του λημνίσκου.

(ii) Έστω $a > 0$. Θεωρήστε τις τρεις καμπύλες η οποίες ορίζονται από τις $x : [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}] \rightarrow \mathbb{R}$, $y : [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}] \rightarrow \mathbb{R}$, από τις $x : [\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}] \rightarrow \mathbb{R}$, $y : [\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}] \rightarrow \mathbb{R}$, και από τις $x : [\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$, $y : [\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$, όλες με τους ίδιους τύπους $x(\theta) = a\sqrt{\cos(3\theta)}\cos\theta$ και $y(\theta) = a\sqrt{\cos(3\theta)}\sin\theta$. Σχεδιάστε τις τροχιές των τριών καμπυλών. Χρησιμοποιώντας ακτινικές και κυκλικές διατομές, υπολογίστε το εμβαδόν της επίπεδης επιφάνειας η οποία περικλείεται στα τρία «φύλλα» τα οποία σχηματίζονται από τις τρεις αυτές τροχιές.

(iii) Γενικεύστε σε σχήμα με n «φύλλα».

8.63. (i) Έστω συνεχώς παραγωγίσιμη $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ και συνεχής $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε η x να είναι γνησίως αύξουσα και ώστε να ισχύει $y(t) \geq 0$ για κάθε $t \in [a, b]$. Θεωρούμε την επιφάνεια A η οποία βρίσκεται ανάμεσα στην τροχιά της καμπύλης $(x(t), y(t))$ για $t \in [a, b]$, στον x -άξονα και στις ευθείες με εξισώσεις $x = x(a)$, $x = x(b)$. Αποδείξτε ότι το εμβαδόν E της A είναι ίσο με

$$E = \int_a^b y(t)x'(t) dt.$$

Υπόδειξη: Δοκιμάστε $\int_a^b y(t)x'(t) dt = \int_a^b y(x^{-1}(x(t)))x'(t) dt$.

(ii) Έστω συνεχώς παραγωγίσιμες $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω C η τροχιά της καμπύλης $(x(t), y(t))$ για $t \in [a, b]$. Υποθέτουμε ότι η καμπύλη είναι *κλειστή*, δηλαδή ότι τα δύο άκρα της τροχιάς C ταυτίζονται: $(x(b), y(b)) = (x(a), y(a))$. Υποθέτουμε, επίσης, ότι, όταν το t αυξάνεται στο $[a, b]$, τότε το $(x(t), y(t))$ περιστρέφεται πάνω στην τροχιά C της καμπύλης με φορά περιστροφής αντίθετη εκείνης των δεικτών του ρολογιού και ότι καμία οριζόντια ή κατακόρυφη ευθεία δεν τέμνει την τροχιά C σε περισσότερα από δύο σημεία. Αποδείξτε ότι το εμβαδόν E της επιφάνειας η οποία περικλείεται από τη C είναι ίσο με

$$E = \int_a^b x(t)y'(t) dt = - \int_a^b y(t)x'(t) dt = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) dt.$$

Υπόδειξη: Υπάρχουν t_1, t_2, t_3, t_4 στο $[a, b]$ ώστε να ισχύει $x(t_1) \leq x(t) \leq x(t_3)$ και $y(t_2) \leq y(t) \leq y(t_4)$ για κάθε $t \in [a, b]$. Μελετήστε προσεκτικά τη διάταξη των t_1, t_2, t_3, t_4 , καθώς και τη μονοτονία των x, y στα διάφορα υποδιαστήματα του $[a, b]$ τα οποία ορίζονται από τα t_1, t_2, t_3, t_4 .

(iii) Εφαρμόστε το (ii) με $x(t) = r \cos t + x_0$, $y(t) = r \sin t + y_0$ για $t \in [0, 2\pi]$ για να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου κέντρου (x_0, y_0) και ακτίνας r . Κάντε το ίδιο για την έλλειψη με $x(t) = \kappa \cos t + x_0$, $y(t) = \lambda \sin t + y_0$ για $t \in [0, 2\pi]$.

8.9 Βιβλιογραφία

Βασική βιβλιογραφία

- Anton, H. (1984). *Calculus with Analytic Geometry*. Wiley.
- Apostol, T. (1967). *Calculus, Vol I*. Wiley.
- Courant, R. (1988). *Differential and Integral Calculus, Vol I*. Wiley.
- Courant, R., John, F. (1989). *Introduction to Calculus and Analysis, Vol I*. Springer.
- Ghorpade, S., Limaye, B. (2006). *A Course in Calculus and Real Analysis*. Springer.
- Goldberg, R. (1976). *Methods of Real Analysis*. Wiley.
- Goursat, E. (2006). *A Course in Mathematical Analysis, Vol I*. Dover.
- Hardy, G. (1966). *The Integration of Functions of a Single Variable*. Cambridge Univ. Press.
- Hardy, G. (2008). *A Course of Pure Mathematics*. Cambridge Univ. Press.
- Landau, E. (2001). *Differential and Integral Calculus*. American Math. Society & Chelsea.
- Nikolsky, S. (1977). *A Course of Mathematical Analysis, Vol I*. Mir Publishers.
- Smirnov, V. I. (1964). *A Course of Higher Mathematics, Vol I*. Pergammon Press.
- Spiegel, M. (1963). *Schaum's Outline of Advanced Calculus*. McGraw Hill.
- Spivak, M. (1994). *Calculus*. Cambridge Univ. Press.
- Thomas, G. (2018). *Calculus*. Pearson.
- Toeplitz, O. (2007). *The Calculus, A Genetic Approach*. The University of Chicago Press.

Εξειδικευμένη βιβλιογραφία

- Artin, E. (2015). *The Gamma Function*. Dover.
- Beckenbach, E., Bellman, R. (1961). *Inequalities*. Springer.
- Hardy, G., Littlewood, J., Polya, G. (1952). *Inequalities*. Cambridge Univ. Press.
- Mitrinović, D. (1964). *Elementary Inequalities*. Noordhoff.
- Mitrinović, D., Pečarić, J., Fink, A. (1993). *Classical and New Inequalities in Analysis*. Springer.
- Tikhomirov, V. (1991). *Stories about Maxima and Minima*. American Math. Society & Math. Association of America.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

ΣΕΙΡΕΣ ΑΡΙΘΜΩΝ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ

9.1 Σύνοψη

Το κεφάλαιο αυτό αρχίζει με την έννοια της σειράς αριθμών. Ορίζουμε τη σύγκλιση και την απόκλιση μίας σειράς, καθώς και το άθροισμά της και αποδεικνύουμε μερικές αλγεβρικές και ανισοτικές ιδιότητες του αθροίσματος σειράς. Αποδεικνύουμε ότι κάθε σειρά μη-αρνητικών όρων έχει άθροισμα, καθώς και το ολοκληρωτικό κριτήριο και το κριτήριο συμπίκνωσης για σύγκλιση σειράς φθινόντων μη-αρνητικών όρων. Μελετάμε, ειδικότερα, το p -αδικό ανάπτυγμα (γενίκευση του δεκαδικού αναπτύγματος) μη-αρνητικού αριθμού. Αποδεικνύουμε κάποια κριτήρια σύγκλισης σειράς: απόλυτης σύγκλισης, λόγου, ρίζας, Dirichlet, εναλλασσόμενων προσήμων. Τέλος, μελετάμε τις δυναμοσειρές και τα διαστήματα σύγκλισής και βλέπουμε πώς μία συνάρτηση γράφεται ως δυναμοσειρά (η σειρά Taylor της συνάρτησης) και πώς μία δυναμοσειρά αθροίζεται στο διάστημα σύγκλισής της σε συνάρτηση. Παρουσιάζουμε συγκεκριμένα παραδείγματα δυναμοσειρών: γεωμετρική, εκθετική, τριγωνομετρικές, λογαριθμική, τόξο εφαπτομένης, διωνυμική.

Προαπαιτούμενη γνώση: Τα προηγούμενα κεφάλαια.

9.2 Σειρές αριθμών και κάποιες βασικές ιδιότητες

Ορισμός 9.1. Θεωρούμε οποιαδήποτε ακολουθία αριθμών (x_k) . Το σύμβολο

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x_k \quad \text{ή} \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_k + \cdots$$

ονομάζεται **σειρά** των x_k . Το x_k ονομάζεται **k -οστός όρος** ή **k -οστός προσθετέος** της σειράς. Σχηματίζουμε τα διαδοχικά αθροίσματα

$$s_1 = x_1, \quad s_2 = x_1 + x_2, \quad s_3 = x_1 + x_2 + x_3, \quad \dots, \quad s_n = x_1 + \cdots + x_n, \quad \dots$$

και δημιουργούμε με αυτόν τον τρόπο μία νέα ακολουθία, την (s_n) . Το

$$s_n = x_1 + \cdots + x_n = \sum_{k=1}^n x_k$$

ονομάζεται **n -οστό μερικό άθροισμα** της σειράς των x_k και η ακολουθία (s_n) ονομάζεται **ακολουθία των μερικών αθροισμάτων** της σειράς των x_k .

Το σύμβολο του δείκτη δεν παίζει ιδιαίτερο ρόλο, δηλαδή η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ είναι η ίδια με τη $\sum_{m=1}^{+\infty} x_m$ και με τη $\sum_{j=1}^{+\infty} x_j$.

Παράδειγμα 9.1. Η σειρά

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 1 \quad \text{ή} \quad 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots.$$

Παπαδημητράκης, Μ. (2024) «Απειροστικός Λογισμός».

Αθήνα: Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. <http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-1011>

 Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Μη Εμπορική Χρήση - Παρόμοια Διανομή 4.0

Αυτή δημιουργείται από τη σταθερή ακολουθία (1) και τα μερικά αθροίσματά της είναι τα $s_1 = 1$, $s_2 = 1 + 1 = 2$, $s_3 = 1 + 1 + 1 = 3$ και, γενικότερα,

$$s_n = \sum_{k=1}^n 1 = \underbrace{1 + \cdots + 1}_n = n \quad \text{για } n \geq 1.$$

Παράδειγμα 9.2. Η γεωμετρική σειρά με λόγο a είναι η

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a^{k-1} \quad \text{ή} \quad 1 + a + a^2 + \cdots + a^k + \cdots.$$

Αυτή δημιουργείται από τη γεωμετρική πρόοδο (a^k) και έχει μερικά αθροίσματα $s_1 = 1$, $s_2 = 1 + a$, $s_3 = 1 + a + a^2$ και, γενικότερα,

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} a^k = 1 + a + \cdots + a^{n-1} \quad \text{για } n \geq 1.$$

Παρατηρήστε ότι ο πρώτος όρος a^0 ισούται με 1. Αυτό δεν είναι σωστό, αν $a = 0$, διότι δεν ορίζεται το σύμβολο 0^0 . Υπάρχει, όμως, μια παραδοσιακή σύμβαση να ερμηνεύουμε το σύμβολο 0^0 ως 1, αν αυτό είναι προσθετός σειράς ή ακόμη και πολωνύμου.

Παράδειγμα 9.3. Η σειρά

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p} \quad \text{ή} \quad 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{k^p} + \cdots,$$

όπου το p είναι οποιοσδήποτε αριθμός. Η σειρά αυτή δημιουργείται από την ακολουθία ($\frac{1}{k^p}$) και έχει μερικά αθροίσματα $s_1 = 1$, $s_2 = 1 + \frac{1}{2^p}$, $s_3 = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}$ και, γενικότερα,

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \quad \text{για } n \geq 1.$$

Αν $p = 1$, τότε έχουμε τη $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ η οποία ονομάζεται **αρμονική σειρά**.

Ορισμός 9.2. Αν η ακολουθία (s_n) των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ συγκλίνει σε αριθμό s , τότε λέμε ότι η σειρά **συγκλίνει**, ονομάζουμε το s **άθροισμα** της σειράς και γράφουμε

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x_k = s.$$

Αν η (s_n) δεν συγκλίνει, τότε λέμε ότι η σειρά **αποκλίνει**. Ειδικότερα, αν η (s_n) αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, τότε λέμε ότι η σειρά **αποκλίνει** στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, αντιστοίχως, ονομάζουμε το $+\infty$ ή το $-\infty$ **άθροισμα** της σειράς και γράφουμε

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x_k = +\infty \quad \text{ή} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} x_k = -\infty.$$

Με άλλα λόγια, έχουμε

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n x_k,$$

αν το όριο υπάρχει.

Παρατηρήστε ότι αν η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ συγκλίνει ή αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, τότε η σειρά έχει άθροισμα και αυτό είναι αριθμός ή $+\infty$ ή $-\infty$, αντιστοίχως. Αν η σειρά αποκλίνει, αλλά δεν αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, τότε η σειρά **δεν έχει άθροισμα**.

Παρατηρήστε, επίσης, ότι το σύμβολο $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ έχει διπλό περιεχόμενο. Αφ' ενός συμβολίζει τη σειρά, ανεξάρτητα από το αν αυτή συγκλίνει ή αποκλίνει. Αφ' ετέρου, στην περίπτωση κατά την οποία η σειρά συγκλίνει ή αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, συμβολίζει και το άθροισμα της σειράς.

Παράδειγμα 9.4. Η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} 1$ αποκλίνει στο $+\infty$, διότι $s_n = n \rightarrow +\infty$. Επομένως, το άθροισμα της σειράς είναι $+\infty$:

$$1 + 1 + 1 + 1 + \cdots = \sum_{k=1}^{+\infty} 1 = +\infty.$$

Παράδειγμα 9.5. Η γεωμετρική σειρά με λόγο a , δηλαδή η $\sum_{k=1}^{+\infty} a^{k-1}$, έχει, όπως είπαμε, μερικά αθροίσματα $s_n = 1 + a + \cdots + a^{n-1}$ για κάθε $n \geq 1$.

Αν $a > 1$, τότε $s_n = \frac{a^n - 1}{a - 1} \rightarrow \frac{(+\infty) - 1}{a - 1} = +\infty$.

Αν $a = 1$, τότε $s_n = n \rightarrow +\infty$.

Αν $-1 < a < 1$, τότε $s_n = \frac{1 - a^n}{1 - a} \rightarrow \frac{1 - 0}{1 - a} = \frac{1}{1 - a}$.

Τέλος, έστω $a \leq -1$. Από την $a^n - 1 = (a - 1)s_n$ συνεπάγεται $a^n = (a - 1)s_n + 1$. Άρα, αν υπάρχει το όριο της (s_n) , τότε υπάρχει και το όριο της (a^n) . Όμως, το όριο της (a^n) δεν υπάρχει, οπότε ούτε και το όριο της (s_n) υπάρχει.

Συνοψίζουμε:

$$1 + a + a^2 + a^3 + \cdots = \sum_{k=1}^{+\infty} a^{k-1} \begin{cases} = +\infty, & \text{αν } a \geq 1, \\ = \frac{1}{1-a}, & \text{αν } -1 < a < 1, \\ \text{δεν υπάρχει το άθροισμα,} & \text{αν } a \leq -1. \end{cases}$$

Πρόταση 9.1. Αν η $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ συγκλίνει, τότε $x_k \rightarrow 0$.

Απόδειξη. Σχηματίζουμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$. Αν η $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ συγκλίνει και το άθροισμά της είναι ο αριθμός s , τότε $s_n \rightarrow s$. Παρατηρούμε, όμως, ότι ισχύει

$$s_n - s_{n-1} = (x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n) - (x_1 + \cdots + x_{n-1}) = x_n$$

για κάθε $n \geq 2$. Άρα $x_n \rightarrow s - s = 0$. □

Παράδειγμα 9.6. Η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{k+1}$ αποκλίνει, διότι $\frac{k}{k+1} \rightarrow 1 \neq 0$.

Λίγο παρακάτω θα δούμε κάποιο παράδειγμα σειράς $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ για την οποία ισχύει $x_k \rightarrow 0$, ενώ η σειρά δεν συγκλίνει. Δηλαδή:

Δεν ισχύει το αντίστροφο της Πρότασης 9.1.

Ο δείκτης μίας σειράς μπορεί, γενικότερα, να αρχίζει από $k = m$ αντί από $k = 1$, όπου m είναι οποιοσδήποτε ακέραιος, και τότε η σειρά παίρνει τη μορφή

$$\sum_{k=m}^{+\infty} x_k = x_m + x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots$$

Κάνοντας την απλή αλλαγή μεταβλητής $j = k - m + 1$ και την ισοδύναμη $k = j + m - 1$, βλέπουμε ότι όταν το k διατρέχει τα $m, m + 1, m + 2, \dots$, τότε το j διατρέχει τα $1, 2, 3, \dots$, και αντιστρόφως. Άρα οι σειρές $\sum_{k=m}^{+\infty} x_k$ και $\sum_{j=1}^{+\infty} x_{j+m-1}$ είναι η ίδια σειρά: $x_m + x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots$. Δηλαδή,

$$\sum_{k=m}^{+\infty} x_k = \sum_{j=1}^{+\infty} x_{j+m-1} = x_m + x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots$$

Επομένως, σε σχέση με τις έννοιες της σύγκλισης και της απόκλισης στα $\pm\infty$, ό,τι ισχύει για τη μία ισχύει και για την άλλη: αν η μία έχει άθροισμα, τότε και η άλλη έχει άθροισμα και τα αθροίσματά τους είναι τα ίδια.

Παράδειγμα 9.7. Η γεωμετρική σειρά, εκτός από $\sum_{k=1}^{+\infty} a^{k-1}$, γράφεται και $\sum_{k=0}^{+\infty} a^k$.

Τώρα, αν θεωρήσουμε δύο οποιοσδήποτε ακέραιους m, n με $m < n$, τότε τα αθροίσματα $\sum_{k=m}^{+\infty} x_k$ και $\sum_{k=n}^{+\infty} x_k$ συνδέονται με μία πολύ απλή σχέση. Πράγματι, η προφανής ισότητα

$$x_m + x_{m+1} + \cdots + x_{n-1} + x_n + x_{n+1} + \cdots = (x_m + x_{m+1} + \cdots + x_{n-1}) + (x_n + x_{n+1} + \cdots)$$

παίρνει τη μορφή:

$$\sum_{k=m}^{+\infty} x_k = \sum_{k=m}^{n-1} x_k + \sum_{k=n}^{+\infty} x_k.$$

Και πάλι, σε σχέση με τις έννοιες της σύγκλισης και της απόκλισης στα $\pm\infty$, ό,τι ισχύει για τη μία από τις σειρές $\sum_{k=m}^{+\infty} x_k$ και $\sum_{k=n}^{+\infty} x_k$ ισχύει και για την άλλη: αν η μία έχει άθροισμα, τότε και η άλλη έχει άθροισμα και τα αθροίσματά τους διαφέρουν κατά το πεπερασμένο άθροισμα $\sum_{k=m}^{n-1} x_k$. Ειδικότερα, αν η μία έχει άθροισμα $-\infty$ ή $+\infty$, τότε και η άλλη έχει άθροισμα $-\infty$ ή $+\infty$, αντιστοίχως.

Πρόταση 9.2. Έστω ότι η $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ συγκλίνει και έστω $t_n = \sum_{k=n}^{+\infty} x_k$ για $n \in \mathbb{N}$. Τότε $t_n \rightarrow 0$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = x_1 + \cdots + x_n$. Υποθέτουμε ότι $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k = s$, δηλαδή ότι $s_n \rightarrow s$, και ότι το s είναι αριθμός. Επειδή

$$s = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k = \sum_{k=1}^{n-1} x_k + \sum_{k=n}^{+\infty} x_k = s_{n-1} + t_n,$$

συνεπάγεται ότι $t_n = s - s_{n-1} \rightarrow s - s = 0$. □

Λέμε ότι το $t_n = \sum_{k=n}^{+\infty} x_k$ είναι «ουρά» της σειράς. Το περιεχόμενο της Πρότασης 9.2 το εκφράζουμε παραστατικά ως εξής: *αν μία σειρά συγκλίνει, τότε η ουρά της τείνει στο 0.*

Πρόταση 9.3. Αν οι $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ και $\sum_{k=1}^{+\infty} y_k$ έχουν άθροισμα και αν το άθροισμα των δύο αθροισμάτων δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε η $\sum_{k=1}^{+\infty} (x_k + y_k)$ έχει άθροισμα και

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (x_k + y_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k + \sum_{k=1}^{+\infty} y_k.$$

Απόδειξη. Σχηματίζουμε τα n -οστά μερικά αθροίσματα $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$ και $t_n = \sum_{k=1}^n y_k$ των δύο σειρών, οπότε $s_n \rightarrow s$ και $t_n \rightarrow t$, όπου $s = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ και $t = \sum_{k=1}^{+\infty} y_k$. Τώρα, το n -οστό μερικό άθροισμα της $\sum_{k=1}^{+\infty} (x_k + y_k)$ είναι το

$$u_n = \sum_{k=1}^n (x_k + y_k) = \sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=1}^n y_k = s_n + t_n.$$

Άρα $u_n \rightarrow s + t$, οπότε η $\sum_{k=1}^{+\infty} (x_k + y_k)$ έχει άθροισμα ίσο με $s + t$. □

Πρόταση 9.4. Αν η $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ έχει άθροισμα, αν το λ είναι αριθμός και αν το γινόμενο του αριθμού και του αθροίσματος της σειράς δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε η $\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda x_k$ έχει άθροισμα και

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda x_k = \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} x_k.$$

Απόδειξη. Αν $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$, τότε $s_n \rightarrow s$, όπου $s = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k$. Το n -οστό μερικό άθροισμα της $\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda x_k$ είναι το

$$w_n = \sum_{k=1}^n \lambda x_k = \lambda \sum_{k=1}^n x_k = \lambda s_n.$$

Άρα $w_n \rightarrow \lambda s$, οπότε η $\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda x_k$ έχει άθροισμα ίσο με λs . □

Μπορούμε να συνδυάσουμε τα δύο τελευταία αποτελέσματα ως εξής:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (\lambda x_k + \mu y_k) = \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} x_k + \mu \sum_{k=1}^{+\infty} y_k.$$

Προφανώς, το αποτέλεσμα αυτό επεκτείνεται και για περισσότερες από δύο σειρές.

Πρόταση 9.5. Αν οι $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ και $\sum_{k=1}^{+\infty} y_k$ έχουν άθροισμα και αν ισχύει $x_k \leq y_k$ για κάθε $k \geq 1$, τότε

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x_k \leq \sum_{k=1}^{+\infty} y_k.$$

Απόδειξη. Σχηματίζουμε τα n -οστά μερικά αθροίσματα $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$ και $t_n = \sum_{k=1}^n y_k$ των δύο σειρών, οπότε $s_n \rightarrow s$ και $t_n \rightarrow t$, όπου $s = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ και $t = \sum_{k=1}^{+\infty} y_k$. Τώρα, ισχύει

$$s_n = \sum_{k=1}^n x_k \leq \sum_{k=1}^n y_k = t_n$$

για κάθε n , οπότε $s \leq t$. □

Ασκήσεις

9.1. Θεωρήστε τις σειρές $3 + 4 + 5 + 6 + \dots$, $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \dots$, $\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$. Γράψτε τις με το σύμβολο $\sum_{k=m}^{+\infty}$ όταν $m = 1$, $m = 0$, $m = -2$, $m = 4$.

9.2. Αποδείξτε ότι $\sum_{k=1}^{+\infty} k = +\infty$ και $\sum_{k=1}^{+\infty} (\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}) = 1$ και ότι οι $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k$, $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} k$, $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} k^2$ δεν έχουν άθροισμα.

Υπόδειξη: Βρείτε τύπους για τα μερικά άθροισματα s_n των σειρών.

9.3. Στα άπειρα άθροισματα οι παρενθέσεις μπορεί να αλλάξουν το αποτέλεσμα των πράξεων: αποδείξτε ότι από τις παρακάτω σειρές η πρώτη δεν έχει άθροισμα, η δεύτερη έχει άθροισμα 0 και η τρίτη έχει άθροισμα 1.

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + \dots, \quad (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \dots,$$

$$1 + ((-1) + 1) + ((-1) + 1) + ((-1) + 1) + \dots.$$

9.4. Αποδείξτε ότι οι σειρές $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2k+1}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} (\frac{k}{k+1})^k$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt[k]{k}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} k \sin \frac{1}{k}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} k \log(1 + \frac{1}{k})$ δεν συγκλίνουν.

Υπόδειξη: Εφαρμόστε την Πρόταση 9.1.

9.5. Χρησιμοποιώντας γεωμετρικές σειρές, αποδείξτε ότι $\sum_{k=1}^{+\infty} (\frac{4}{3})^{k-3} = +\infty$, $\sum_{k=3}^{+\infty} (-\frac{2}{3})^k = -\frac{8}{45}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{k-1} + 3^k}{6^{k+1}} = \frac{7}{72}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1+2^{\frac{k}{2}}}{2^k} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.

9.6. Αποδείξτε ότι

(i) η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^{k-1}}$ συγκλίνει, αν και μόνο αν $x < -2$ ή $x \geq 0$.

(ii) η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(1+x^2)^{k-1}}$ συγκλίνει για κάθε x .

(iii) η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1-x^{2k}}{1+x^{2k}}$ συγκλίνει, αν και μόνο αν $x = \pm 1$.

Βρείτε τα άθροισματα των τριών σειρών όταν αυτές συγκλίνουν.

9.7. Κάθε σειρά της μορφής $\sum_{k=1}^{+\infty} (b_k - b_{k+1})$ χαρακτηρίζεται **τηλεσκοπική σειρά**.

(i) Αν s_n είναι το n -οστό μερικό άθροισμα της σειράς, αποδείξτε ότι $s_n = b_1 - b_{n+1}$. Να συμπεράνετε ότι η σειρά έχει άθροισμα, αν και μόνο αν υπάρχει το $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ και ότι, σε αυτήν την περίπτωση,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (b_k - b_{k+1}) = b_1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

(ii) Αποδείξτε ότι $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \log \frac{k}{k+1} = -\infty$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} = 1$, $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{2k+1}{k(k+1)} = 1$. Αποδείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{2k^2-1}{k(k+1)}$ δεν έχει άθροισμα.

9.8. Αν $x_{2m-1} = \frac{1}{m}$ και $x_{2m} = -\frac{1}{m}$ για κάθε $m \geq 1$, αποδείξτε ότι $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k = 0$.

9.9. Έστω $x \neq y$. Αν οι $\sum_{m=1}^{+\infty} (a_{2m} + xa_{2m-1})$ και $\sum_{m=1}^{+\infty} (a_{2m} + ya_{2m-1})$ συγκλίνουν, αποδείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ συγκλίνει.

9.10. (i) Αποδείξτε ότι $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{2^{k-1}}}{1-x^{2^k}} = \begin{cases} \frac{x}{1-x}, & \text{αν } |x| < 1, \\ \frac{1}{1-x}, & \text{αν } |x| > 1, \end{cases}$ και $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{k-1}}{x^{2^{k-1}}+1} = \frac{1}{x-1}$, αν $x > 1$.

Υπόδειξη: Για την πρώτη σειρά δείτε ότι $s_1 = \frac{x}{1-x^2}$, $s_2 = \frac{x+x^2+x^3}{1-x^4}$, $s_3 = \frac{x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7}{1-x^8}$. Κατόπιν, μαντέψτε τον τύπο του s_n και αποδείξτε τον με επαγωγή.

9.11. Έστω $m \in \mathbb{N}$ και $x_k = \begin{cases} \frac{1}{k^2-m^2}, & \text{αν } k \neq m, \\ 0, & \text{αν } k = m. \end{cases}$ Αποδείξτε ότι $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k = \frac{3}{2m^2}$.

9.12. Μια επίπεδη νιφάδα χιονιού υφίσταται διαδοχικές αλλαγές με τον εξής τρόπο. Το αρχικό της σχήμα είναι ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς μήκους s , οπότε το μήκος της περιφέρειάς της είναι $3s$ και το εμβαδόν της είναι $\frac{\sqrt{3}}{4}s^2$. Κατόπιν, από το μεσαίο ένα τρίτο *κάθε* πλευράς ξεφυτρώνει ένα ισόπλευρο τρίγωνο, οπότε το νέο σχήμα της νιφάδας είναι πολυγωνικό με 12 πλευρές ίδιου μήκους. Κατόπιν, από το μεσαίο ένα τρίτο *κάθε* πλευράς της νέας νιφάδας ξεφυτρώνει ένα ισόπλευρο τρίγωνο, οπότε το νέο σχήμα της νιφάδας είναι πολυγωνικό με 48 πλευρές ίδιου μήκους. Αν η διαδικασία συνεχιστεί επ' άπειρον, τότε φανταστείτε την «οριακή νιφάδα» και αποδείξτε ότι το μήκος της περιφέρειάς της είναι $+\infty$, ενώ το εμβαδόν της είναι $\frac{2\sqrt{3}}{5}s^2$.

9.13. Ένα αυτοκίνητο ξεκινά από την πόλη Α και, σε ευθύ δρόμο, κατευθύνεται προς την πόλη Β με σταθερή ταχύτητα $v \frac{km}{hr}$. Όλοι γνωρίζουμε ότι, αν η απόσταση των δύο πόλεων είναι $d km$, τότε το αυτοκίνητο θα ολοκληρώσει τη διαδρομή σε χρόνο $\frac{d}{v} hr$. Απαντήστε, όμως, σε κάποιον ο οποίος ισχυρίζεται ότι το αυτοκίνητο δεν θα φτάσει ποτέ στην πόλη Β και το δικαιολογεί ως εξής:

Ας υποθέσουμε ότι το αυτοκίνητο καλύπτει τη μισή απόσταση και, μάλιστα, στον προβλεπόμενο γι' αυτήν χρόνο. Ας υποθέσουμε, επίσης, ότι κατόπιν το αυτοκίνητο καλύπτει τη μισή από την εναπομένονσα απόσταση στον προβλεπόμενο γι' αυτήν χρόνο. Και ούτω καθεξής. Το αυτοκίνητο έχει, όμως, πάντοτε μπροστά του κάποια εναπομένονσα, έστω και πολύ μικρή, απόσταση μέχρι την πόλη Β, οπότε δεν θα φτάσει ποτέ εκεί.

Η απάντησή σας, για να είναι πειστική, πρέπει οπωσδήποτε να ακολουθήσει τα λογικά βήματα του παραπάνω ισχυρισμού.

9.3 Σειρές με μη-αρνητικούς όρους

9.3.1 Γενικά

Θεώρημα 9.1. Αν ισχύει $x_k \geq 0$ για κάθε k , τότε η $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ έχει άθροισμα και αυτό είναι είτε $+\infty$ είτε μη-αρνητικός αριθμός. Δηλαδή,

$$0 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \leq +\infty.$$

Ειδικότερα: αν η ακολουθία (s_n) των μερικών αθροισμάτων της σειράς είναι άνω φραγμένη, τότε η σειρά συγκλίνει και, αν η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη, τότε η σειρά αποκλίνει στο $+\infty$.

Απόδειξη. Επειδή ισχύει $x_k \geq 0$ για κάθε k , συνεπάγεται ότι

$$s_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} x_k = \sum_{k=1}^n x_k + x_{n+1} = s_n + x_{n+1} \geq s_n$$

για κάθε n . Άρα η (s_n) είναι αύξουσα ακολουθία, οπότε από το Θεώρημα 3.1 συνεπάγεται ότι έχει όριο το οποίο είναι είτε $+\infty$ είτε αριθμός. Επειδή ισχύει $s_n = \sum_{k=1}^n x_k \geq 0$ για κάθε n , έχουμε ότι $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \geq 0$. Επίσης, αν η (s_n) είναι άνω φραγμένη, τότε το $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ είναι αριθμός ≥ 0 , ενώ, αν η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη, τότε $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$. $\square$

Πρέπει να τονιστεί ότι κάθε σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ με μη-αρνητικούς όρους έχει άθροισμα και το άθροισμα αυτό είναι είτε αριθμός είτε $+\infty$. Επομένως, το ότι μία τέτοια σειρά συγκλίνει ισοδυναμεί με το να ισχύει $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k < +\infty$.

Προσοχή: η τελευταία ισοδυναμία δεν ισχύει γενικά για μία οποιαδήποτε σειρά. Αν μία σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ συγκλίνει, τότε, προφανώς, ισχύει $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k < +\infty$. Αλλά αν $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k < +\infty$, τότε δεν συνεπάγεται ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ συγκλίνει, αφού ενδέχεται να ισχύει $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k = -\infty$.

Το Θεώρημα 9.1, δηλαδή το ότι κάθε σειρά με μη-αρνητικούς όρους έχει άθροισμα, είναι για τις σειρές ό,τι είναι το Θεώρημα 3.1, δηλαδή το ότι κάθε μονότονη ακολουθία έχει όριο, για τις ακολουθίες. Μάλιστα, το Θεώρημα 3.1 χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη του Θεωρήματος 9.1.

Πρόταση 9.6. (i) Έστω ότι ισχύει $0 \leq x_k \leq y_k$ για κάθε k . Τότε

$$0 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \leq \sum_{k=1}^{+\infty} y_k.$$

Αν, επιπλέον, η $\sum_{k=1}^{+\infty} y_k$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ συγκλίνει.

(ii) Έστω ότι ισχύει $x_k \geq 0$ και $y_k > 0$ για κάθε k και ότι η ακολουθία $(\frac{x_k}{y_k})$ συγκλίνει ή, πιο γενικά, ότι είναι φραγμένη. Αν η $\sum_{k=1}^{+\infty} y_k$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ συγκλίνει.

Απόδειξη. (i) Παρατηρούμε ότι οι $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ και $\sum_{k=1}^{+\infty} y_k$ έχουν άθροισμα, οπότε από την Πρόταση 9.5 συνεπάγεται

$$0 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \leq \sum_{k=1}^{+\infty} y_k.$$

Αν η $\sum_{k=1}^{+\infty} y_k$ συγκλίνει, τότε $\sum_{k=1}^{+\infty} y_k < +\infty$, οπότε από την προηγούμενη ανισότητα συνεπάγεται $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k < +\infty$, οπότε η $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ συγκλίνει.

(ii) Από την υπόθεση υπάρχει u ώστε να ισχύει $\frac{x_k}{y_k} \leq u$, οπότε $0 \leq x_k \leq u y_k$ για κάθε k . Επειδή η $\sum_{k=1}^{+\infty} y_k$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι η $\sum_{k=1}^{+\infty} u y_k$ συγκλίνει, οπότε, σύμφωνα με το (i), και η $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ συγκλίνει. $\square$

Αρκετές φορές εφαρμόζουμε την Πρόταση 9.6(ii) με τον εξής τρόπο.

Αν ισχύει $x_k > 0$, $y_k > 0$ για κάθε k και $\frac{x_k}{y_k} \rightarrow \rho$, όπου το ρ είναι ένας θετικός αριθμός, δηλαδή $0 < \rho < +\infty$, τότε το συμπέρασμα για τις σειρές $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ και $\sum_{k=1}^{+\infty} y_k$ είναι το εξής: είτε και οι δύο σειρές συγκλίνουν είτε και οι δύο αποκλίνουν στο $+\infty$.

Πράγματι, από το $\frac{x_k}{y_k} \rightarrow \rho$ και το ότι το ρ είναι αριθμός συνεπάγεται ότι αν η $\sum_{k=1}^{+\infty} y_k$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ συγκλίνει. Αλλά και από το $\frac{y_k}{x_k} \rightarrow \frac{1}{\rho}$ και το ότι το $\frac{1}{\rho}$ είναι αριθμός συνεπάγεται ότι αν η $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{k=1}^{+\infty} y_k$ συγκλίνει.

Αν ισχύει $x_k > 0$, $y_k > 0$ για κάθε k και αν $\frac{x_k}{y_k} \rightarrow 0$, συμπεραίνουμε, σύμφωνα πάντα με την Πρόταση 9.6(ii), ότι αν η $\sum_{k=1}^{+\infty} y_k$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ συγκλίνει. Το αντίστροφο, όμως, δεν ισχύει γενικά.

Παράδειγμα 9.8. $\frac{1}{2^{k-1}} \rightarrow 0$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-1}} < +\infty$ και $\sum_{k=1}^{+\infty} 1 = +\infty$.

Τέλος, αν ισχύει $x_k > 0$, $y_k > 0$ για κάθε k και αν $\frac{x_k}{y_k} \rightarrow +\infty$, συμπεραίνουμε ότι αν η $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{k=1}^{+\infty} y_k$ συγκλίνει. Πάλι αυτό προκύπτει από το ότι $\frac{y_k}{x_k} \rightarrow 0$ και από την Πρόταση 9.6(ii).

Παράδειγμα 9.9. Για να μελετήσουμε τη $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k+3}{3^{k-1}+k}$, τη συγκρίνουμε με τη $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{3^{k-1}}$. Ο λόγος για τον οποίο σκεφτόμαστε αυτήν τη συγκεκριμένη σειρά είναι ότι οι «μεγάλοι» όροι στον αριθμητή και στον παρονομαστή του $\frac{2^k+3}{3^{k-1}+k}$ είναι το 2^k και το 3^{k-1} , αντιστοίχως. Τώρα,

$$\frac{\frac{2^k+3}{3^{k-1}+k}}{\frac{2^k}{3^{k-1}}} = \frac{2^k+3}{2^k} \frac{3^{k-1}}{3^{k-1}+k} = \frac{1+\frac{3}{2^k}}{1+\frac{k}{3^{k-1}}} \rightarrow 1.$$

Η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{3^{k-1}} = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (\frac{2}{3})^{k-1}$ συγκλίνει, οπότε η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k+3}{3^{k-1}+k}$ συγκλίνει.

Παράδειγμα 9.10. Θα αποδείξουμε ότι η σειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ συγκλίνει.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $k \geq 2$ ισχύει

$$k! = 1 \cdot 2 \cdots k \geq 1 \cdot 2 \cdots 2 = 2^{k-1},$$

και ότι η ίδια ανισότητα $k! \geq 2^{k-1}$ ισχύει και για $k = 0$ και $k = 1$. Άρα ισχύει $0 \leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ για κάθε k , οπότε

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots = 4.$$

Επομένως, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} < +\infty$.

Είναι αξιοσημείωτο το ότι το άθροισμα της σειράς του τελευταίου παραδείγματος είναι ένας πολύ γνωστός μας αριθμός.

Πρόταση 9.7.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}$, καθώς και τα $t_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Τότε, σύμφωνα με τον διωνυμικό τύπο του Newton,

$$\begin{aligned} t_n &= 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} + \cdots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} (1 - \frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{k!} (1 - \frac{1}{n}) \cdots (1 - \frac{k-1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!} (1 - \frac{1}{n}) \cdots (1 - \frac{n-1}{n}). \end{aligned}$$

Επειδή όλες οι παρενθέσεις είναι θετικές και μικρότερες από το 1, συνεπάγεται

$$t_n \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots + \frac{1}{n!} = s_n$$

για κάθε n . Ακόμη, αν $1 \leq k \leq n$, τότε, παραλείποντας τους (θετικούς) όρους μετά από τον k -οστό, βρίσκουμε

$$t_n \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} (1 - \frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{k!} (1 - \frac{1}{n}) \cdots (1 - \frac{k-1}{n}).$$

Κρατώντας, προσωρινά, το k σταθερό και παίρνοντας όρια όταν $n \rightarrow +\infty$, βρίσκουμε ότι ισχύει

$$e \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} = s_k$$

για κάθε k και, με αλλαγή συμβολισμού, $e \geq s_n$ για κάθε n .

Από τα προηγούμενα έχουμε ότι ισχύει $t_n \leq s_n \leq e$ για κάθε n , οπότε από την ιδιότητα παρεμβολής συνεπάγεται $s_n \rightarrow e$. Άρα $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$. $\square$

Αξίζει να κάνουμε σε αυτό το σημείο μία μικρή παράκαμψη για να αποδείξουμε κάτι το οποίο είχαμε αναφέρει στο κεφάλαιο 3 όταν ορίσαμε τον αριθμό e .

Πρόταση 9.8. *Το e είναι άρρητος.*

Απόδειξη. Έστω ότι το e είναι ρητός και, συγκεκριμένα, $e = \frac{m}{n}$ με $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$. Τότε

$$(n-1)!m = n!e = n!1 + \frac{n!}{1!} + \cdots + \frac{n!}{n!} + \frac{n!}{(n+1)!} + \frac{n!}{(n+2)!} + \frac{n!}{(n+3)!} + \cdots.$$

Παρατηρούμε ότι καθένας από τους αριθμούς $(n-1)!m$, $n!1$, $\frac{n!}{1!}, \dots, \frac{n!}{n!}$ είναι ακέραιος, οπότε το άθροισμα $s = \frac{n!}{(n+1)!} + \frac{n!}{(n+2)!} + \frac{n!}{(n+3)!} + \cdots$ είναι ακέραιος. Όμως, απλοποιώντας τους λόγους οι οποίοι εμφανίζονται στο άθροισμα s , βρίσκουμε

$$\begin{aligned} 0 < s &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots \\ &= \frac{1}{n+1} (1 + (\frac{1}{n+1}) + (\frac{1}{n+1})^2 + \cdots) = \frac{1}{n+1} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n} < 1 \end{aligned}$$

και καταλήγουμε σε άτοπο, διότι δεν υπάρχει ακέραιος ανάμεσα στα 0 και 1. $\square$

Ασκήσεις

9.14. Βρείτε τις τιμές των $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ για τις οποίες καθεμία από τις σειρές $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a^k - b^k}$ και $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a^k}{b^k + c^k}$ συγκλίνει.

Υπόδειξη: Για την πρώτη σειρά να διακρίνετε περιπτώσεις $a > b$ και $a < b$. Στην πρώτη περίπτωση να συγκρίνετε με τη $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a^k}$.

9.15. Στην άσκηση 9.7 είδαμε ότι $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$. Βάσει αυτού αποδείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει.

9.16. Αποδείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3k-1)}$ συγκλίνει.

Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι όλα τα $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \dots, \frac{2k-1}{3k-1}$ είναι $< \frac{2}{3}$.

9.17. Έστω $x_k \geq 0$ για κάθε k . Αν η $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{x_k x_{k+1}}$ συγκλίνει. Αν, επιπλέον, η (x_k) είναι φθίνουσα, αποδείξτε και το αντίστροφο.

Υπόδειξη: Θυμηθείτε ότι $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

9.18. Αν $x_k \geq 0$ για κάθε k και η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι και οι σειρές $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k^2$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{1+x_k}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k^2}{1+x_k^2}$ συγκλίνουν.

9.3.2 Σειρές με μη-αρνητικούς όρους οι οποίοι μειώνονται

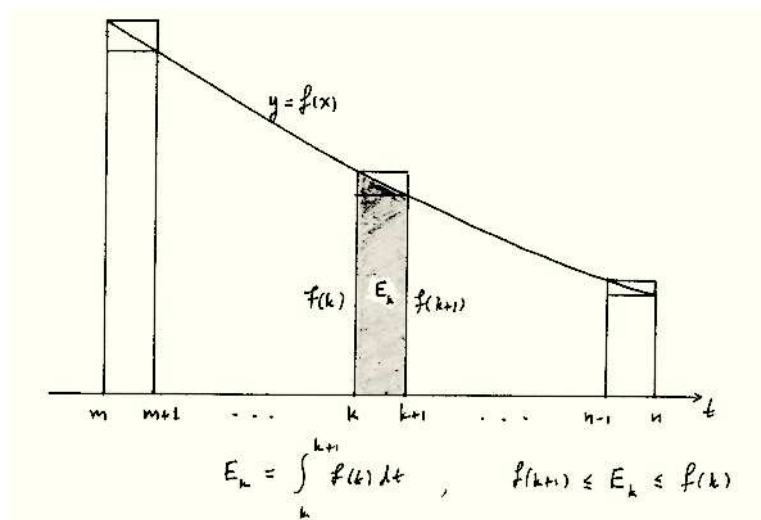
Θα δούμε τώρα δύο κριτήρια σύγκλισης για σειρές με μη-αρνητικούς όρους οι οποίοι μειώνονται.

Πριν από το πρώτο κριτήριο, θα δούμε μία σχέση ανάμεσα σε ολοκληρώματα και αθροίσματα.

Λήμμα 9.1. Έστω $m, n \in \mathbb{Z}$ με $m < n$ και $f : [m, n] \rightarrow \mathbb{R}$ φθίνουσα στο διάστημα $[m, n]$. Τότε

$$f(m+1) + \cdots + f(n) \leq \int_m^n f(t) dt \leq f(m) + \cdots + f(n-1).$$

Απόδειξη. Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, $m \leq k \leq n-1$, το διάστημα $[k, k+1]$ περιέχεται στο $[m, n]$. Παρατηρήστε το σχήμα 9.1.



Σχήμα 9.1

Επειδή η f είναι φθίνουσα, ισχύει $f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$ για κάθε $t \in [k, k+1]$, οπότε

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1) dt \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \int_k^{k+1} f(k) dt = f(k).$$

Προσθέτοντας αυτές τις σχέσεις για $k = m, \dots, n-1$, βρίσκουμε τη ζητούμενη σχέση. $\square$

Ολοκληρωτικό κριτήριο. Έστω ότι η (x_k) είναι φθίνουσα και ότι ισχύει $x_k \geq 0$ για κάθε k . Θεωρούμε φθίνουσα $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(k) = x_k$ για κάθε k . Τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ έχει τιμή η οποία είναι είτε αριθμός ≥ 0 είτε $+\infty$ και

(i) $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k < +\infty$, αν και μόνο αν $\int_1^{+\infty} f(t) dt < +\infty$.

(ii) $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k = +\infty$, αν και μόνο αν $\int_1^{+\infty} f(t) dt = +\infty$.

Επιπλέον, ισχύει

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \leq x_1 + \int_1^{+\infty} f(t) dt.$$

Απόδειξη. Έστω $x \in [1, +\infty)$. Τότε υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $x \leq k$, π.χ. το $k = [x] + 1$, και τότε, επειδή η f είναι φθίνουσα, έχουμε $f(x) \geq f(k) = x_k \geq 0$. Επομένως, ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$. Από το Θεώρημα 8.1 προκύπτει ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ έχει τιμή η οποία είναι είτε αριθμός ≥ 0 είτε $+\infty$.

Τώρα, εφαρμόζουμε τη σχέση του Λήμματος 9.1 στο διάστημα $[1, n]$ και βρίσκουμε

$$s_n - x_1 = \sum_{k=2}^n x_k = \sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_1^n f(t) dt.$$

Ομοίως, από το διάστημα $[1, n+1]$ παίρνουμε

$$\int_1^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k) = \sum_{k=1}^n x_k = s_n.$$

Επομένως,

$$\int_1^{n+1} f(t) dt \leq s_n \leq x_1 + \int_1^n f(t) dt$$

και, παίρνοντας όρια των τριών μελών της τελευταίας ανισότητας όταν $n \rightarrow +\infty$, καταλήγουμε στην

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \leq x_1 + \int_1^{+\infty} f(t) dt.$$

Τώρα τα (i) και (ii) είναι άμεση συνέπεια της τελευταίας ανισότητας. $\square$

Παράδειγμα 9.11. Θα μελετήσουμε την πολύ σημαντική σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p}$, όπου p είναι οποιοσδήποτε αριθμός. Η σειρά αυτή είναι σειρά μη-αρνητικών όρων, οπότε έχει άθροισμα το οποίο είναι είτε μη-αρνητικός αριθμός είτε $+\infty$.

Αν $p \leq 0$, τότε ισχύει $\frac{1}{k^p} \geq 1$ για κάθε $k \geq 1$, οπότε $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p} \geq \sum_{k=1}^{+\infty} 1 = +\infty$. Άρα στην περίπτωση αυτή η σειρά αποκλίνει στο $+\infty$.

Έστω $p > 0$. Τότε η ακολουθία $(\frac{1}{k^p})$ είναι φθίνουσα και έχει θετικούς όρους. Θεωρούμε και την $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(t) = \frac{1}{t^p}$ η οποία είναι φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ και, προφανώς, ισχύει $f(k) = \frac{1}{k^p}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Είδαμε στο παράδειγμα 8.61 ότι

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^p} dt \begin{cases} = \frac{1}{p-1} < +\infty, & \text{αν } p > 1, \\ = +\infty, & \text{αν } p \leq 1. \end{cases}$$

Επομένως,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p} \begin{cases} < +\infty, & \text{αν } p > 1, \\ = +\infty, & \text{αν } p \leq 1. \end{cases}$$

Ειδικότερα, η αρμονική σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει στο $+\infty$, ενώ η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει.

Τώρα βλέπουμε ότι η αρμονική σειρά, όπως και κάθε σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p}$ με $0 < p \leq 1$, είναι παράδειγμα σειράς $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ η οποία δεν συγκλίνει, αλλά για την οποία ισχύει $x_k \rightarrow 0$.

Οι σειρές $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p}$ είναι σημαντικές και διότι χρησιμεύουν ως «πρότυπα» σύγκρισης για πολλές άλλες σειρές.

Το εργαλείο στα επόμενα παραδείγματα θα είναι η Πρόταση 9.6 και οι παρατηρήσεις τις οποίες κάναμε μετά από αυτήν.

Παράδειγμα 9.12. Συγκρίνουμε τη $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k-1}{k^2+3k+1}$ με τη $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ η οποία αποκλίνει στο $+\infty$. Σκεφτόμαστε την αρμονική σειρά, διότι οι «μεγάλοι» όροι στον αριθμητή και στον παρονομαστή του $\frac{2k-1}{k^2+3k+1}$ είναι το $2k$ και το k^2 , αντιστοίχως. Επειδή

$$\frac{\frac{2k-1}{k^2+3k+1}}{\frac{1}{k}} = \frac{k(2k-1)}{k^2+3k+1} \rightarrow 2,$$

η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k-1}{k^2+3k+1}$ αποκλίνει στο $+\infty$.

Παράδειγμα 9.13. Συγκρίνουμε τη $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{k}+1}{2k^2+3}$ με τη $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$, επειδή

$$\frac{\frac{\sqrt{k}+1}{2k^2+3}}{\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}} = \frac{k^{\frac{3}{2}}(\sqrt{k}+1)}{2k^2+3} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$ συγκλίνει, οπότε και η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{k}+1}{2k^2+3}$ συγκλίνει.

Παράδειγμα 9.14. Έστω η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{k}$. Από το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ προκύπτει το

$$\frac{\sin \frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} \rightarrow 1.$$

Επειδή η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει στο $+\infty$, συνεπάγεται ότι και η $\sum_{k=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{k}$ αποκλίνει στο $+\infty$.

Παράδειγμα 9.15. Συγκρίνουμε τη $\sum_{k=1}^{+\infty} \log(1 + \frac{1}{\sqrt{k}})$ με τη $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$, λόγω του

$$\frac{\log(1 + \frac{1}{\sqrt{k}})}{\frac{1}{\sqrt{k}}} \rightarrow 1,$$

το οποίο προκύπτει από το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$. Επειδή η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ αποκλίνει στο $+\infty$, συνεπάγεται ότι και η $\sum_{k=1}^{+\infty} \log(1 + \frac{1}{\sqrt{k}})$ αποκλίνει στο $+\infty$.

Κριτήριο συμπίκνωσης Cauchy. Έστω ότι η (x_k) είναι φθίνουσα και ότι ισχύει $x_k \geq 0$ για κάθε k . Τότε

(i) $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k < +\infty$, αν και μόνο αν $\sum_{m=0}^{+\infty} 2^m x_{2^m} < +\infty$.

(ii) $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k = +\infty$, αν και μόνο αν $\sum_{m=0}^{+\infty} 2^m x_{2^m} = +\infty$.

Απόδειξη. Είναι σαφές ότι και οι δύο σειρές $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ και $\sum_{m=0}^{+\infty} 2^m x_{2^m}$ έχουν άθροισμα, αφού είναι σειρές με μη-αρνητικούς όρους.

Κάθε $n \in \mathbb{N}$ βρίσκεται ανάμεσα σε δύο διαδοχικές δυνάμεις του 2, έστω $2^l \leq n < 2^{l+1}$. Χρησιμοποιώντας το ότι η (x_k) είναι φθίνουσα, βλέπουμε ότι ισχύει

$$\begin{aligned} x_1 + \cdots + x_n &= x_1 + (x_2 + x_3) + (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) + \cdots + (x_{2^{l-1}} + \cdots + x_{2^l-1}) + (x_{2^l} + \cdots + x_n) \\ &\leq x_1 + 2x_2 + 4x_4 + \cdots + 2^{l-1}x_{2^{l-1}} + 2^l x_{2^l} \leq \sum_{m=0}^{+\infty} 2^m x_{2^m}. \end{aligned}$$

Όταν $n \rightarrow +\infty$, βρίσκουμε $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k \leq \sum_{m=0}^{+\infty} 2^m x_{2^m}$.

Επίσης,

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_4 + \cdots + 2^l x_{2^l} &\leq 2x_1 + 2x_2 + 2(x_3 + x_4) + \cdots + 2(x_{2^{l-1}+1} + \cdots + x_{2^l}) \\ &= 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^l}) \leq 2 \sum_{k=1}^{+\infty} x_k. \end{aligned}$$

Όταν $l \rightarrow +\infty$, βρίσκουμε $\sum_{m=0}^{+\infty} 2^m x_{2^m} \leq 2 \sum_{k=1}^{+\infty} x_k$.

Συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{+\infty} 2^m x_{2^m} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \leq \sum_{m=0}^{+\infty} 2^m x_{2^m}.$$

Άρα τα $\sum_{m=0}^{+\infty} 2^m x_{2^m}$ και $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ είναι είτε και τα δύο αριθμοί είτε και τα δύο $+\infty$. □

Παράδειγμα 9.16. Θα ξαναδούμε το παράδειγμα της σειράς $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p}$.

Κατ' αρχάς, η περίπτωση $p \leq 0$ είναι απλή: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p} \geq \sum_{k=1}^{+\infty} 1 = +\infty$. Άρα στην περίπτωση αυτή η σειρά έχει άθροισμα $+\infty$.

Έστω $p > 0$, οπότε η ακολουθία $(\frac{1}{k^p})$ είναι φθίνουσα με μη-αρνητικούς όρους. Εξετάζουμε τη σειρά

$$\sum_{m=0}^{+\infty} 2^m \frac{1}{(2^m)^p} = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^m.$$

Η σειρά αυτή είναι γεωμετρική με λόγο $\frac{1}{2^{p-1}}$ και συγκλίνει, αν $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$, δηλαδή αν $p > 1$, και αποκλίνει στο $+\infty$, αν $\frac{1}{2^{p-1}} \geq 1$, δηλαδή αν $0 < p \leq 1$. Άρα η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p}$ συγκλίνει, αν $p > 1$, και αποκλίνει στο $+\infty$, αν $p \leq 1$.

Ασκήσεις

9.19. Εξετάστε τις σειρές $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+1}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{k^2+1}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^k}{1+e^{2k}}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{e^k}$, $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k \log k}$, $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k \log^2 k}$, $\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k \log k \log(\log k)}$, $\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k \log k \log^2(\log k)}$ με το ολοκληρωτικό κριτήριο. Για όσες σειρές συγκλίνουν βρείτε εκτιμήσεις για το άθροισμά τους. Κατόπιν, εφαρμόστε και το κριτήριο συμπίκνωσης Cauchy.

9.20. Εξετάστε με το ολοκληρωτικό κριτήριο και με το κριτήριο συμπίκνωσης Cauchy τη σύγκλιση των $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k \log^p k}$, $\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k \log k \log^p(\log k)}$, ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου p .

9.21. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 9.6, εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k\sqrt{k+2k+1}}{2k^2+1}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k^2+3k+1}{k^4-k^2+4}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)(k+2)}}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} (\sqrt{1+k^2} - k)$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} (e^{\frac{1}{k}} - 1)$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{k} \log(1 + \frac{1}{k^2})$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{1}{k}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} k \sin^2 \frac{1}{k}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - \cos \frac{1}{k})$, $\sum_{k=1}^{+\infty} k(1 - \cos \frac{1}{k})$, $\sum_{k=1}^{+\infty} (k \log \frac{2k+1}{2k-1} - 1)$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k+1)^k}{k^{k+1}}$.

9.22. (i) Για καθεμία από τις σειρές $\sum_{k=1}^{+\infty} k^a (\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}})$, $\sum_{k=1}^{+\infty} k^a (\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} + \sqrt{k-1})$ βρείτε τις τιμές του a για τις οποίες συγκλίνει.

Υπόδειξη: Εφαρμόστε την Πρόταση 9.6.

(ii) Βρείτε τις τιμές των a, b , με $a > b > 0$, για τις οποίες η $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^a - k^b}$ συγκλίνει.

9.23. Έστω $x_k \geq 0$ για κάθε k και $p > \frac{1}{2}$. Αν η $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x_k}}{k^p}$ συγκλίνει.

Υπόδειξη: Θυμηθείτε πάλι ότι $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

9.24. (i) Έστω ότι ισχύει $x_k > 0$, $y_k > 0$ και $\frac{x_{k+1}}{x_k} \leq \frac{y_{k+1}}{y_k}$ για κάθε k . Αν η $\sum_{k=1}^{+\infty} y_k$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι και η $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ συγκλίνει.

Υπόδειξη: $\frac{x_{k+1}}{y_{k+1}} \leq \frac{x_k}{y_k}$.

(ii) Έστω ότι ισχύει $x_k > 0$ για κάθε k .

Αν $0 < a < 1$ και αν ισχύει $\frac{x_{k+1}}{x_k} \leq a$ για κάθε k , αποδείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ συγκλίνει.

Αν $a \geq 1$ και αν ισχύει $\frac{x_{k+1}}{x_k} \geq a$ για κάθε k , αποδείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ αποκλίνει.

(iii) Έστω ότι ισχύει $x_k > 0$ για κάθε k .

Αν $a > 1$ και αν ισχύει $\frac{x_{k+1}}{x_k} \leq (1 - \frac{1}{k+1})^a$ για κάθε k , αποδείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ συγκλίνει.

Αν $a \leq 1$ και αν ισχύει $\frac{x_{k+1}}{x_k} \geq (1 - \frac{1}{k+1})^a$ για κάθε k , αποδείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ αποκλίνει.

9.25. Έστω ότι η (x_k) είναι φθίνουσα και έστω $x_k \geq 0$ για κάθε k . Αν η $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ συγκλίνει, τότε αποδείξτε ότι $kx_k \rightarrow 0$.

Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι $\frac{k}{2}x_k \leq x_{[\frac{k}{2}]+1} + \dots + x_k$.

9.26. Έστω (x_k) φθίνουσα, έστω $x_k \rightarrow 0$ και έστω $x_k - 2x_{k+1} + x_{k+2} \geq 0$ για κάθε k .

(i) Αποδείξτε ότι $\sum_{k=1}^{+\infty} (x_k - x_{k+1}) = x_1$.

(ii) Αποδείξτε ότι $k(x_k - x_{k+1}) \rightarrow 0$.

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το αποτέλεσμα της άσκησης 9.25.

(iii) Αποδείξτε ότι $\sum_{k=1}^{+\infty} k(x_k - 2x_{k+1} + x_{k+2}) = x_1$.

9.3.3 p-αδικό ανάπτυγμα αριθμού

Ορισμός 9.3. Γνωρίζουμε από το Δημοτικό Σχολείο ότι οι αριθμοί $0, 1, \dots, 9$ ονομάζονται **δεκαδικά ψηφία**. Γενικότερα, αν $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, τότε οι αριθμοί $0, 1, \dots, p-1$ ονομάζονται **p-αδικά ψηφία**.

Παράδειγμα 9.17. Οι αριθμοί 0, 1 είναι τα δυαδικά ψηφία, οι αριθμοί 0, 1, 2 είναι τα τριαδικά ψηφία και οι αριθμοί 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 είναι τα δεκαεξαδικά ψηφία.

Πρόταση 9.9. Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Κάθε $x \in \mathbb{N}$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως άθροισμα

$$x = X_N p^N + X_{N-1} p^{N-1} + \cdots + X_1 p + X_0,$$

όπου όλα τα $X_N, \dots, X_0$ ανήκουν στο $\{0, 1, \dots, p-1\}$, δηλαδή είναι p -αδικά ψηφία, και $X_N \neq 0$.

Απόδειξη. Κάνουμε διαδοχικές επαναλήψεις της Ευκλείδειας διαίρεσης.

Αρχίζουμε με $x = a_1 p + X_0$, όπου $a_1 \in \mathbb{Z}$, $X_0 \in \mathbb{Z}$ και $0 \leq X_0 \leq p-1$. Τότε $0 \leq a_1 < x$. Αν $a_1 = 0$, τότε σταματάμε και είναι $x = X_0$.

Αν $a_1 > 0$, τότε συνεχίζουμε με $a_1 = a_2 p + X_1$, όπου $a_2 \in \mathbb{Z}$, $X_1 \in \mathbb{Z}$ και $0 \leq X_1 \leq p-1$. Τότε $0 \leq a_2 < a_1$. Αν $a_2 = 0$, τότε σταματάμε και είναι $x = X_1 p + X_0$.

Αν $a_2 > 0$, τότε συνεχίζουμε με $a_2 = a_3 p + X_2$, όπου $a_3 \in \mathbb{Z}$, $X_2 \in \mathbb{Z}$ και $0 \leq X_2 \leq p-1$. Τότε $0 \leq a_3 < a_2$. Αν $a_3 = 0$, τότε σταματάμε και είναι $x = X_2 p^2 + X_1 p + X_0$.

Συνεχίζουμε επαγωγικά.

Επειδή τα διαδοχικά πηλίκα $a_1, a_2, a_3, \dots$ των διαιρέσεων είναι μη-αρνητικοί ακέραιοι και μειώνονται γνησίως, κάποιο από αυτά, αναγκαστικά, θα είναι ίσο με 0 και η διαδικασία θα σταματήσει. Αν $N \geq 0$ είναι ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει $a_{N+1} = 0$, τότε είναι $a_N > 0$ και οι διαδοχικές διαιρέσεις γράφονται

$$x = a_1 p + X_0, \quad a_1 = a_2 p + X_1, \quad \dots, \quad a_{N-1} = a_N p + X_{N-1}, \quad a_N = 0p + X_N = X_N,$$

με $X_n = a_n > 0$. Από αυτές τις ισότητες βρίσκουμε, διαδοχικά,

$$\begin{aligned} x &= a_1 p + X_0 \\ &= a_2 p^2 + X_1 p + X_0 \\ &\vdots \\ &= a_{N-1} p^{N-1} + X_{N-2} p^{N-2} + \cdots + X_1 p + X_0 \\ &= a_N p^N + X_{N-1} p^{N-1} + X_{N-2} p^{N-2} + \cdots + X_1 p + X_0 \\ &= X_N p^N + X_{N-1} p^{N-1} + X_{N-2} p^{N-2} + \cdots + X_1 p + X_0. \end{aligned}$$

Για να αποδείξουμε τη μοναδικότητα των $X_N, \dots, X_0$, υποθέτουμε $x = X_N p^N + \cdots + X_1 p + X_0$. Τότε

$$x = (X_N p^{N-1} + \cdots + X_1) p + X_0$$

και, επειδή $0 \leq X_0 \leq p-1$, το X_0 είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του x με το p , οπότε είναι μονοσήμαντα καθορισμένο. Κατόπιν, έχουμε ότι

$$\frac{x-X_0}{p} = (X_N p^{N-2} + \cdots + X_2) p + X_1$$

και, επειδή $0 \leq X_1 \leq p-1$, το X_1 είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $\frac{x-X_0}{p}$ με το p , οπότε είναι μονοσήμαντα καθορισμένο. Συνεχίζοντας επαγωγικά, βλέπουμε ότι όλα τα $X_N, \dots, X_0$ είναι μονοσήμαντα καθορισμένα. $\square$

Ορισμός 9.4. Τα $X_N, \dots, X_0$ στην ισότητα $x = X_N p^N + X_{N-1} p^{N-1} + \cdots + X_1 p + X_0$ ονομάζονται **p -αδικά ψηφία** του φυσικού αριθμού x . Η παράσταση $X_N p^N + X_{N-1} p^{N-1} + \cdots + X_1 p + X_0$ ονομάζεται **p -αδικό ανάπτυγμα** του x και τη συμβολίζουμε $\langle X_N X_{N-1} \dots X_1 X_0 \rangle_p$, οπότε γράφουμε

$$x = \langle X_N X_{N-1} \dots X_1 X_0 \rangle_p.$$

Παράδειγμα 9.18. Για να βρούμε το δυαδικό ανάπτυγμα του 28, εκτελούμε τις διαδοχικές διαιρέσεις: $28 = 14 \cdot 2 + 0$, $14 = 7 \cdot 2 + 0$, $7 = 3 \cdot 2 + 1$, $3 = 1 \cdot 2 + 1$, $1 = 0 \cdot 2 + 1$. Άρα $28 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 0 = \langle 11100 \rangle_2$ με πέντε ψηφία.

Παράδειγμα 9.19. Για να βρούμε το δεκαεξαδικό ανάπτυγμα του 32137, εκτελούμε τις διαδοχικές διαιρέσεις: $32137 = 2008 \cdot 16 + 9$, $2008 = 125 \cdot 16 + 8$, $125 = 7 \cdot 16 + 13$, $7 = 0 \cdot 16 + 7$. Άρα $32137 = 7 \cdot 16^3 + 13 \cdot 16^2 + 8 \cdot 16 + 9 = \langle 7 \underline{13} 89 \rangle_{16}$ με τέσσερα ψηφία.

Παράδειγμα 9.20. Προφανώς, $p = 1p + 0$, οπότε το p -αδικό ανάπτυγμα του ίδιου του p είναι η παράσταση $p = 1p + 0 = \langle 10 \rangle_p$.

Το p -αδικό ανάπτυγμα του p^2 είναι η παράσταση $p^2 = 1p^2 + 0p + 0 = \langle 100 \rangle_p$.

Παράδειγμα 9.21. Αν $p = 10$, τότε χρησιμοποιούμε το απλούστερο σύμβολο $X_N X_{N-1} \dots X_1 X_0$, αντί του $\langle X_N X_{N-1} \dots X_1 X_0 \rangle_{10}$, για το δεκαδικό ανάπτυγμα.

Σε αυτήν την περίπτωση, σύμφωνα και με το παράδειγμα 9.20, το δεκαδικό ανάπτυγμα του ίδιου του αριθμού δέκα είναι η παράσταση 10. Έτσι, λοιπόν, αιτιολογείται η χρήση του γνωστού μας συμβόλου 10 για τον αριθμό δέκα, δηλαδή για τον αριθμό $9 + 1$. Τώρα, ο αριθμός $10 + 1$ γράφεται $1 \cdot 10 + 1$, οπότε το δεκαδικό ανάπτυγμά του είναι η παράσταση 11. Ο αριθμός $10 + 2$ γράφεται $1 \cdot 10 + 2$, οπότε το δεκαδικό ανάπτυγμά του είναι η παράσταση 12. Είναι φανερός ο επαγωγικός τρόπος με τον οποίο καταλήγουμε στα γνωστά από το Δημοτικό Σχολείο δεκαδικά αναπτύγματα των φυσικών.

Προχωράμε στην περίπτωση των p -αδικών αναπτύγματος αριθμών x στο διάστημα $[0, 1)$.

Μάθαμε στο Δημοτικό Σχολείο ότι το σύμβολο 0.25 δηλώνει τον αριθμό $\frac{2}{10} + \frac{5}{10^2} = \frac{1}{4}$. Το σύμβολο 0.5403 δηλώνει τον αριθμό $\frac{5}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{0}{10^3} + \frac{3}{10^4} = \frac{5403}{10000}$. Τα σύμβολα 0.25 και 0.5403 τα γράφουμε και 0.25000... και 0.5403000..., με το ψηφίο 0 να επαναλαμβάνεται, συνεχώς, από κάποιο σημείο και πέρα. Τα σύμβολα αυτά ονομάζονται *δεκαδικά αναπτύγματα* των αριθμών $\frac{1}{4}$ και $\frac{5403}{10000}$. Μάθαμε, επίσης, ότι το δεκαδικό ανάπτυγμα του $\frac{3}{7}$ είναι το σύμβολο 0.42857..., τα ψηφία του οποίου συνεχίζουν επ' άπειρον χωρίς να είναι όλα 0 από κάποιο σημείο και πέρα. Τώρα, όμως, τίθεται το εξής ερώτημα: *με ποιες πράξεις πιστοποιείται η σχέση ανάμεσα στον αριθμό $\frac{3}{7}$ και στο δεκαδικό ανάπτυγμα 0.42857...*; Θα μπορούσαμε, κατ' αναλογία προς τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις, να πούμε ότι το άθροισμα $\frac{4}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{7}{10^5} + \dots$ είναι ίσο με τον αριθμό $\frac{3}{7}$. Το πρόβλημα είναι ότι η τελευταία παράσταση περιέχει *άπειρες* προσθέσεις και ο υπολογισμός του αποτελέσματός της ξεφεύγει από το πλαίσιο χειρισμού στοιχειωδών αλγεβρικών παραστάσεων. Όμως, ακριβώς η έννοια της σειράς, όπως την ορίσαμε, νοηματοδοτεί το άθροισμα άπειρων προσθέσεων και, με αυτήν την έννοια, μπορούμε να πούμε ότι το άθροισμα της *σειράς* $\frac{4}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{7}{10^5} + \dots$ είναι ίσο με τον αριθμό $\frac{3}{7}$ ή, με άλλα λόγια, ότι η *ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς συγκλίνει στο $\frac{3}{7}$* .

Η Πρόταση 9.10 περιγράφει πλήρως τη σχέση ανάμεσα στους αριθμούς του διαστήματος $[0, 1)$ και στα δεκαδικά αναπτύγματα της μορφής $0.x_1 x_2 \dots$. Μάλιστα, η Πρόταση 9.10 διαπραγματεύεται γενικότερα p -αδικά αναπτύγματα, όπου $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ και όπου τα ψηφία είναι οι αριθμοί $0, 1, \dots, p-1$. Ας δούμε, όμως, πρώτα έναν χρήσιμο υπολογισμό βασισμένο σε κάποια συγκεκριμένη γεωμετρική σειρά: για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\sum_{k=m}^{+\infty} \frac{p-1}{p^k} = \frac{p-1}{p^m} \sum_{k=m}^{+\infty} \left(\frac{1}{p}\right)^{k-m} = \frac{p-1}{p^m} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{p}\right)^{k-1} = \frac{p-1}{p^m} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{1}{p^{m-1}}. \quad (9.1)$$

Αυτόν τον τύπο θα τον χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξη της ακόλουθης πρότασης. Πριν από αυτό, όμως, ας δώσουμε την εξής ορολογία. Αν έχουμε μια ακολουθία (x_k) και έναν αριθμό c με την ιδιότητα να υπάρχει m έτσι ώστε να είναι $x_k = c$ για κάθε $k \geq m$, τότε λέμε ότι η (x_k) είναι **τελικά σταθερή** c .

Πρόταση 9.10. Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$.

(i) Έστω ακολουθία p -αδικών ψηφίων (x_k) η οποία δεν είναι τελικά σταθερή $p-1$. Τότε η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{p^k}$ συγκλίνει και το άθροισμά της ανήκει στο $[0, 1)$.

(ii) Για κάθε $x \in [0, 1)$ υπάρχει μοναδική ακολουθία p -αδικών ψηφίων (x_k) η οποία δεν είναι τελικά σταθερή $p-1$ και ώστε

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{p^k} = \frac{x_1}{p} + \frac{x_2}{p^2} + \frac{x_3}{p^3} + \dots$$

Απόδειξη. (i) Η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{p^k}$ είναι σειρά μη-αρνητικών όρων, οπότε έχει άθροισμα και, επειδή ισχύει $0 \leq x_k \leq p-1$ για κάθε k , συνεπάγεται

$$0 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{p^k} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p-1}{p^k} = 1,$$

όπου για την τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την (9.1) με $m = 1$.

Άρα η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{p^k}$ συγκλίνει και το άθροισμά της, έστω x , είναι αριθμός στο $[0, 1]$. Για να αποδείξουμε ότι $x \in [0, 1)$, σκεφτόμαστε ότι, επειδή η (x_k) δεν είναι σταθερή $p-1$, υπάρχει m ώστε $x_m \neq p-1$ ή, ισοδύναμα, $x_m \leq p-2$. Συνεπάγεται

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{p^k} = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{x_k}{p^k} + \frac{x_m}{p^m} + \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{x_k}{p^k} \leq \sum_{k=1}^{m-1} \frac{p-1}{p^k} + \frac{p-2}{p^m} + \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{p-1}{p^k} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p-1}{p^k} - \frac{1}{p^m} = 1 - \frac{1}{p^m} < 1. \end{aligned}$$

(ii) Έστω $x \in [0, 1)$. Ορίζουμε $x_1 = [px]$, οπότε $x_1 \leq px < x_1 + 1$, οπότε

$$\frac{x_1}{p} \leq x < \frac{x_1}{p} + \frac{1}{p}.$$

Παρατηρούμε ότι $0 \leq px < p$, οπότε το x_1 ανήκει στο $\{0, 1, \dots, p-1\}$. Κατόπιν ορίζουμε $s_1 = \frac{x_1}{p}$ και $x_2 = [p^2(x - s_1)]$. Άρα $x_2 \leq p^2(x - s_1) < x_2 + 1$, οπότε

$$\frac{x_1}{p} + \frac{x_2}{p^2} \leq x < \frac{x_1}{p} + \frac{x_2}{p^2} + \frac{1}{p^2}.$$

Επειδή $0 \leq p^2(x - s_1) < p$, το x_2 ανήκει στο $\{0, 1, \dots, p-1\}$.

Αυτή η επαγωγική διαδικασία δημιουργεί τα x_k , το ένα μετά το άλλο, για κάθε k . Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι έχουμε βρεί $x_1, \dots, x_k$ από το $\{0, 1, \dots, p-1\}$, έτσι ώστε

$$\frac{x_1}{p} + \dots + \frac{x_k}{p^k} \leq x < \frac{x_1}{p} + \dots + \frac{x_k}{p^k} + \frac{1}{p^k}.$$

Τότε ορίζουμε $s_k = \frac{x_1}{p} + \dots + \frac{x_k}{p^k}$ και $x_{k+1} = [p^{k+1}(x - s_k)]$. Αυτό σημαίνει ότι $x_{k+1} \leq p^{k+1}(x - s_k) < x_{k+1} + 1$, οπότε

$$\frac{x_1}{p} + \dots + \frac{x_k}{p^k} + \frac{x_{k+1}}{p^{k+1}} \leq x < \frac{x_1}{p} + \dots + \frac{x_k}{p^k} + \frac{x_{k+1}}{p^{k+1}} + \frac{1}{p^{k+1}}.$$

Επειδή $0 \leq p^{k+1}(x - s_k) < p$, το x_{k+1} ανήκει στο $\{0, 1, \dots, p-1\}$.

Έχουμε αποδείξει ότι υπάρχει ακολουθία p -αδικών ψηφίων (x_k) ώστε όλα τα μερικά αθροίσματα $s_k = \frac{x_1}{p} + \dots + \frac{x_k}{p^k}$ της σειράς $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{p^k}$ να ικανοποιούν τη διπλή ανισότητα

$$s_k \leq x < s_k + \frac{1}{p^k} \quad \text{για κάθε } k. \quad (9.2)$$

Συνεπάγεται $x - \frac{1}{p^k} < s_k \leq x$, οπότε $s_k \rightarrow x$. Με άλλα λόγια,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{p^k} = x.$$

Ας υποθέσουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι η (x_k) είναι τελικά σταθερή $p-1$. Δηλαδή, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $x_k = p-1$ για κάθε $k \geq m$. Αν $m = 1$, τότε

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{p^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p-1}{p^k} = 1,$$

το οποίο είναι άτοπο διότι $0 \leq x < 1$. Αν $m \geq 2$, τότε, εφαρμόζοντας πάλι την (9.1), παίρνουμε

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{p^k} = \frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_{m-1}}{p^{m-1}} + \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{x_k}{p^k} = s_{m-1} + \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{p-1}{p^k} = s_{m-1} + \frac{1}{p^{m-1}},$$

το οποίο είναι επίσης άτοπο λόγω της (9.2).

Τέλος, έστω ακολουθία p -αδικών ψηφίων (x_k) η οποία δεν είναι τελικά σταθερή $p-1$ και ώστε

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{p^k}.$$

Τότε

$$px = x_1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x_k}{p^{k-1}}$$

και

$$0 \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x_k}{p^{k-1}} < \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{p-1}{p^{k-1}} = 1,$$

και άρα $x_1 \leq px < x_1 + 1$. Επειδή $x_1 \in \mathbb{Z}$, συνεπάγεται $x_1 = [px]$, οπότε το x_1 είναι μονοσήμαντα ορισμένο. Κατόπιν, αφού θέσουμε $s_1 = \frac{x_1}{p}$, έχουμε

$$p^2(x - s_1) = x_2 + \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{x_k}{p^{k-2}}$$

και

$$0 \leq \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{x_k}{p^{k-2}} < \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{p-1}{p^{k-2}} = 1,$$

οπότε $x_2 \leq p^2(x - s_1) < x_2 + 1$. Επειδή $x_2 \in \mathbb{Z}$, συνεπάγεται $x_2 = [p^2(x - s_1)]$, οπότε το x_2 είναι μονοσήμαντα ορισμένο. Συνεχίζοντας, επαγωγικά, βλέπουμε ότι οι αριθμοί x_k είναι, ο ένας μετά τον άλλο, μονοσήμαντα ορισμένοι. $\square$

Ορισμός 9.5. Έστω $x \in [0, 1)$. Αν η (x_k) είναι εκείνη η ακολουθία p -αδικών ψηφίων η οποία δεν είναι τελικά σταθερή $p-1$ και για την οποία ισχύει $x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{p^k}$, τότε η (x_k) ονομάζεται **ακολουθία των p -αδικών ψηφίων του x** ή, πιο απλά, τα x_k ονομάζονται **p -αδικά ψηφία του x** . Επίσης, η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{p^k}$ ονομάζεται **p -αδικό ανάπτυγμα του x** και το άθροισμά της το συμβολίζουμε $\langle 0.x_1x_2x_3 \dots \rangle_p$, οπότε γράφουμε

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{p^k} = \langle 0.x_1x_2x_3 \dots \rangle_p.$$

Αν $p = 10$, τότε χρησιμοποιούμε παραδοσιακά το απλούστερο σύμβολο $0.x_1x_2x_3 \dots$, αντί του $\langle 0.x_1x_2x_3 \dots \rangle_{10}$.

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι η Πρόταση 9.10 λέει ότι

Υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στους αριθμούς του διαστήματος $[0, 1)$ και στα p -αδικά αναπτύγματα $\langle 0.x_1x_2x_3 \dots \rangle_p$ στα οποία η (x_k) δεν είναι τελικά σταθερή $p-1$.

Αν $x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{p^k}$ είναι το p -αδικό ανάπτυγμα του $x \in [0, 1)$, τότε, όπως είδαμε στην απόδειξη της Πρότασης 9.10, τα μερικά αθροίσματα $s_n = \frac{x_1}{p} + \frac{x_2}{p^2} + \cdots + \frac{x_n}{p^n}$ της σειράς $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{p^k}$ ικανοποιούν τις διπλές ανισότητες

$$s_n \leq x < s_n + \frac{1}{p^n} \quad \text{για κάθε } n.$$

Οι ανισότητες $s_n \leq x < s_n + \frac{1}{p^n}$ γράφονται και $x - \frac{1}{p^n} < s_n \leq x$ και γι' αυτό κάθε μερικό άθροισμα s_n ονομάζεται **n -οστή p -αδική προσέγγιση του x** .

Παράδειγμα 9.22. Όταν λέμε ότι το δεκαδικό ανάπτυγμα του $\frac{3}{7}$ είναι το $0.4285 \dots$, τότε καταλαβαίνουμε ότι το $\frac{3}{7}$ ικανοποιεί τις άπειρες διαδοχικές διπλές ανισότητες:

$$0.4 \leq \frac{3}{7} < 0.5, \quad 0.42 \leq \frac{3}{7} < 0.43, \quad 0.428 \leq \frac{3}{7} < 0.429, \quad 0.4285 \leq \frac{3}{7} < 0.4286, \quad \dots$$

Οι αριθμοί $0.4, 0.42, 0.428, 0.4285, \dots$ είναι οι διαδοχικές δεκαδικές προσεγγίσεις του $\frac{3}{7}$ και οι αριθμοί $4, 2, 8, 5, \dots$ είναι τα δεκαδικά ψηφία του $\frac{3}{7}$.

Στην απόδειξη της Πρότασης 9.10 περιγράφεται μία επαγωγική διαδικασία *πρακτικού* υπολογισμού του p -αδικού αναπτύγματος $\langle 0.x_1x_2x_3\dots \rangle_p$ ενός $x \in [0, 1)$. Αρχίζουμε με το $x_1 = [px]$, και, για κάθε k , έχοντας βρει τα $x_1, \dots, x_k$, βρίσκουμε το επόμενο ψηφίο με τον τύπο $x_{k+1} = [p^{k+1}(x - s_k)]$, όπου $s_k = \frac{x_1}{p} + \dots + \frac{x_k}{p^k}$. Η διαδικασία αυτή περιγράφεται με το αναδρομικό σχήμα:

$$x_1 = [px], \quad x_{k+1} = [p^{k+1}(x - s_k)] \quad \text{για } k \geq 1.$$

Παράδειγμα 9.23. Θα υπολογίσουμε μερικά αρχικά δεκαδικά ψηφία του $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\begin{aligned} x_1 &= [10 \frac{1}{\sqrt{2}}] = 7, & s_1 &= \frac{7}{10}, \\ x_2 &= [10^2(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{7}{10})] = 0, & s_2 &= s_1 + \frac{0}{10^2} = \frac{7}{10}, \\ x_3 &= [10^3(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{7}{10})] = 7, & s_3 &= s_2 + \frac{7}{10^3} = \frac{707}{1000} \end{aligned}$$

κ.τ.λ. Το δεκαδικό ανάπτυγμα του $\frac{1}{\sqrt{2}}$ αρχίζει με $0.707\dots$

Παράδειγμα 9.24. Θα υπολογίσουμε μερικά αρχικά δυαδικά ψηφία του $\frac{3}{5}$.

$$\begin{aligned} x_1 &= [2 \frac{3}{5}] = 1, & s_1 &= \frac{1}{2}, \\ x_2 &= [2^2(\frac{3}{5} - \frac{1}{2})] = 0, & s_2 &= s_1 + \frac{0}{2^2} = \frac{1}{2}, \\ x_3 &= [2^3(\frac{3}{5} - \frac{1}{2})] = 0, & s_3 &= s_2 + \frac{0}{2^3} = \frac{1}{2}, \\ x_4 &= [2^4(\frac{3}{5} - \frac{1}{2})] = 1, & s_4 &= s_3 + \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} \end{aligned}$$

κ.τ.λ. Το δυαδικό ανάπτυγμα του $\frac{3}{5}$ αρχίζει με $0.1001\dots$

Τώρα θα μιλήσουμε για p -αδικά αναπτύγματα γενικότερων μη-αρνητικών αριθμών.

Ορισμός 9.6. Αν $x \geq 1$, τότε γράφουμε $x = [x] + (x - [x])$, όπου $[x]$ είναι το ακέραιο μέρος του x , δηλαδή φυσικός αριθμός, και το $x - [x]$ ανήκει στο $[0, 1)$. Έχουμε τώρα το p -αδικό ανάπτυγμα $\langle X_N \dots X_0 \rangle_p$ για το $[x]$ και το p -αδικό ανάπτυγμα $\langle 0.x_1x_2\dots \rangle_p$ για το $x - [x]$. Τότε

$$[x] = X_N p^N + \dots + X_1 p + X_0, \quad x - [x] = \frac{x_1}{p} + \frac{x_2}{p^2} + \dots,$$

οπότε

$$x = X_N p^N + \dots + X_1 p + X_0 + \frac{x_1}{p} + \frac{x_2}{p^2} + \dots.$$

Το τελευταίο άθροισμα το συμβολίζουμε $\langle X_N \dots X_0.x_1x_2\dots \rangle_p$ και το ονομάζουμε **p -αδικό ανάπτυγμα** του x . Γράφουμε

$$x = X_N p^N + \dots + X_1 p + X_0 + \frac{x_1}{p} + \frac{x_2}{p^2} + \dots = \langle X_N \dots X_0.x_1x_2\dots \rangle_p.$$

Η n -οστή p -αδική προσέγγιση του x είναι ο αριθμός

$$s_n = [x] + \frac{x_1}{p} + \dots + \frac{x_n}{p^n} = X_N p^N + \dots + X_1 p + X_0 + \frac{x_1}{p} + \dots + \frac{x_n}{p^n}$$

και, προφανώς, ισχύει

$$s_n \leq x < s_n + \frac{1}{p^n} \quad \text{για κάθε } n.$$

Ορισμός 9.7. Το p -αδικό ανάπτυγμα $\langle X_N \dots X_0.x_1x_2\dots \rangle_p$ χαρακτηρίζεται **περιοδικό**, αν υπάρχουν $m \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $x_{k+l} = x_k$ για κάθε $k \geq m$. Αυτό σημαίνει ότι μετά από το τμήμα $x_m x_{m+1} \dots x_{m+l-1}$, το οποίο αποτελείται από l ψηφία, του p -αδικού αναπτύγματος ακολουθεί το ίδιο τμήμα $x_m x_{m+1} \dots x_{m+l-1}$ και αμέσως μετά από αυτό ακολουθεί το ίδιο τμήμα, και ούτω καθεξής. Δηλαδή, το p -αδικό ανάπτυγμα έχει τη μορφή

$$\langle X_N \dots X_0.x_1 \dots x_{m-1} \underbrace{x_m \dots x_{m+l-1}}_{\text{επανάληψη}} \underbrace{x_m \dots x_{m+l-1}}_{\text{επανάληψη}} \underbrace{x_m \dots x_{m+l-1}}_{\text{επανάληψη}} \dots \rangle_p.$$

Χρησιμοποιούμε και τη συντομογραφία

$$\langle X_N \dots X_0.x_1 \dots x_{m-1} \overline{x_m \dots x_{m+l-1}} \rangle_p.$$

Η Πρόταση 9.11 στην περίπτωση $p = 10$, δηλαδή για τα δεκαδικά αναπτύγματα, είναι γνωστή από το Δημοτικό Σχολείο, χωρίς απόδειξη, φυσικά.

Πρόταση 9.11. Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ και $x \geq 0$. Τότε το p -αδικό ανάπτυγμα του x είναι περιοδικό, αν και μόνο αν το x είναι ρητός.

Απόδειξη. Έστω ότι το x έχει περιοδικό p -αδικό ανάπτυγμα:

$$x = \langle X_N \dots X_0.x_1 \dots x_{m-1} \underbrace{x_m \dots x_{m+l-1}}_{\text{period}} \underbrace{x_m \dots x_{m+l-1}}_{\text{period}} \underbrace{x_m \dots x_{m+l-1}}_{\text{period}} \dots \rangle_p.$$

Τότε

$$\begin{aligned} x &= X_N p^N + \dots + X_0 + \frac{x_1}{p} + \dots + \frac{x_{m-1}}{p^{m-1}} \\ &\quad + \left(\frac{x_m}{p^m} + \frac{x_m}{p^{m+l}} + \frac{x_m}{p^{m+2l}} + \dots \right) + \dots + \left(\frac{x_{m+l-1}}{p^{m+l-1}} + \frac{x_{m+l-1}}{p^{m+2l-1}} + \frac{x_{m+l-1}}{p^{m+3l-1}} + \dots \right) \\ &= X_N p^N + \dots + X_0 + \frac{x_1}{p} + \dots + \frac{x_{m-1}}{p^{m-1}} \\ &\quad + \frac{x_m}{p^m} \left(1 + \frac{1}{p^l} + \frac{1}{p^{2l}} + \dots \right) + \dots + \frac{x_{m+l-1}}{p^{m+l-1}} \left(1 + \frac{1}{p^l} + \frac{1}{p^{2l}} + \dots \right) \\ &= X_N p^N + \dots + X_0 + \frac{x_1}{p} + \dots + \frac{x_{m-1}}{p^{m-1}} + \left(\frac{x_m}{p^m} + \dots + \frac{x_{m+l-1}}{p^{m+l-1}} \right) \left(1 + \frac{1}{p^l} + \frac{1}{p^{2l}} + \dots \right) \\ &= X_N p^N + \dots + X_0 + \frac{x_1}{p} + \dots + \frac{x_{m-1}}{p^{m-1}} + \left(\frac{x_m}{p^m} + \dots + \frac{x_{m+l-1}}{p^{m+l-1}} \right) \frac{1}{1 - \frac{1}{p^l}}, \end{aligned}$$

οπότε είναι φανερό ότι το x είναι ρητός, αφού είναι πεπερασμένο άθροισμα ρητών.

Αντιστρόφως, έστω ότι το $x \geq 0$ είναι ρητός: $x = \frac{a}{b}$, όπου τα $a \geq 0$ και $b \geq 1$ είναι ακέραιοι. Γράφουμε

$$p = p_1^{n_1} \dots p_r^{n_r},$$

όπου τα $p_1, \dots, p_r$ είναι οι πρώτοι παράγοντες του p και τα $n_1, \dots, n_r$ είναι φυσικοί. Ομοίως, γράφουμε

$$b = p_1^{l_1} \dots p_r^{l_r} b',$$

όπου τα $l_1, \dots, l_r$ είναι ακέραιοι ≥ 0 (αν κάποιο p_j δεν είναι πρώτος παράγων του b , τότε το αντίστοιχο l_j είναι 0), και το b' είναι φυσικός σχετικά πρώτος με το p , δηλαδή τα p, b' δεν έχουν κανέναν κοινό παράγοντα > 1 . Επιλέγουμε έναν οποιονδήποτε φυσικό m αρκετά μεγάλο ώστε να ισχύει $(m-1)n_j \geq l_j$ για $j = 1, \dots, r$. Ορίζουμε $m_j = (m-1)n_j - l_j$, οπότε κάθε m_j είναι ακέραιος ≥ 0 . Τότε

$$x = \frac{a}{b} = \frac{a}{p_1^{l_1} \dots p_r^{l_r} b'} = \frac{ap_1^{m_1} \dots p_r^{m_r}}{(p_1^{n_1} \dots p_r^{n_r})^{m-1} b'} = \frac{a'}{p^{m-1} b'},$$

όπου το $a' = ap_1^{m_1} \dots p_r^{m_r}$ είναι ακέραιος ≥ 0 . Τώρα, θεωρούμε τους αριθμούς $p, p^2, p^3, \dots$ και τους διαιρούμε με το b' . Τα πιθανά υπόλοιπα αυτών των διαιρέσεων, δηλαδή τα $0, 1, \dots, b'-1$, είναι πεπερασμένα, αλλά οι αριθμοί είναι άπειροι, οπότε τουλάχιστον δύο από αυτούς θα δώσουν το ίδιο υπόλοιπο όταν διαιρεθούν με το b' . Δηλαδή, υπάρχουν φυσικοί t, s , με $t < s$, ώστε $p^t = q_t b' + z$ και $p^s = q_s b' + z$, όπου τα q_t, q_s είναι ακέραιοι και το z είναι ένα από τα $0, 1, \dots, b'-1$. Συνεπώς $p^t(p^{s-t} - 1) = p^s - p^t = (q_s - q_t)b'$, οπότε το b' διαιρεί το $p^t(p^{s-t} - 1)$. Επειδή τα b', p είναι σχετικά πρώτοι φυσικοί, το b' διαιρεί το $p^{s-t} - 1$, δηλαδή υπάρχει φυσικός b'' ώστε $b'b'' = p^{s-t} - 1$. Ορίζουμε τον φυσικό $k = s - t$ και τότε έχουμε $b'b'' = p^k - 1$, οπότε

$$x = \frac{a'b''}{p^{m-1}b'b''} = \frac{a''}{p^{m-1}(p^k-1)},$$

όπου το $a'' = a'b''$ είναι ακέραιος ≥ 0 . Κατόπιν διαιρούμε το a'' με το $p^k - 1$ και παίρνουμε $a'' = w(p^k - 1) + u$, όπου το w είναι ακέραιος ≥ 0 και το u είναι ένα από τα $0, 1, \dots, p^k - 2$. Τέλος, γράφουμε τα p -αδικά αναπτύγματα των w, u στη μορφή

$$w = X_N p^{N+m-1} + \dots + X_0 p^{m-1} + x_1 p^{m-2} + \dots + x_{m-1}, \quad u = x_m p^{k-1} + \dots + x_{m+k-1},$$

και παρατηρούμε ότι τα $x_m, \dots, x_{m+k-1}$ δεν είναι όλα ίσα με $p-1$, διότι αλλιώς θα ήταν $u = (p-1)p^{k-1} + \dots + (p-1)p + (p-1) = p^k - 1$. Συμπεραίνουμε

$$\begin{aligned} x &= \frac{a''}{p^{m-1}(p^k-1)} = \frac{w(p^k-1)+u}{p^{m-1}(p^k-1)} = \frac{w}{p^{m-1}} + \frac{u}{p^{m-1}(p^k-1)} \\ &= \frac{X_N p^{N+m-1} + \dots + X_0 p^{m-1} + x_1 p^{m-2} + \dots + x_{m-1}}{p^{m-1}} + \frac{x_m p^{k-1} + \dots + x_{m+k-1}}{p^{m-1}(p^k-1)} \\ &= X_N p^N + \dots + X_0 + \frac{x_1}{p} + \dots + \frac{x_{m-1}}{p^{m-1}} + \left(\frac{x_m}{p^m} + \dots + \frac{x_{m+k-1}}{p^{m+k-1}} \right) \frac{1}{1 - \frac{1}{p^k}} \\ &= X_N p^N + \dots + X_0 + \frac{x_1}{p} + \dots + \frac{x_{m-1}}{p^{m-1}} + \left(\frac{x_m}{p^m} + \dots + \frac{x_{m+k-1}}{p^{m+k-1}} \right) \left(1 + \frac{1}{p^k} + \frac{1}{p^{2k}} + \dots \right) \\ &= \langle X_N \dots X_0 . x_1 \dots x_{m-1} \underbrace{x_m \dots x_{m+k-1}}_{x_m \dots x_{m+k-1}} \underbrace{x_m \dots x_{m+k-1}}_{x_m \dots x_{m+k-1}} \underbrace{x_m \dots x_{m+k-1}}_{x_m \dots x_{m+k-1}} \dots \rangle_p, \end{aligned}$$

δηλαδή ότι το x έχει περιοδικό p -αδικό ανάπτυγμα. □

Ασκήσεις

9.27. Βρείτε το δυαδικό, το τριαδικό, το δεκαεξαδικό και το εκατονταδικό ανάπτυγμα του 87.

9.28. Υπολογίστε το δυαδικό, το τετραδικό και το δεκαεξαδικό ανάπτυγμα των $\frac{7}{16}$ και $\frac{31}{32}$.

9.29. Βρείτε την έκτη δεκαδική και την έκτη δυαδική προσέγγιση του $\sqrt{2}$.

9.30. Θεωρήστε τα περιοδικά αναπτύγματα $32.34\overline{239}$, $\langle 2.0\overline{1201} \rangle_3$ και $\langle 1001.\overline{101} \rangle_2$ και υπολογίστε τους αντίστοιχους ρητούς αριθμούς.

9.31. Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ και $x \geq 0$, $y \geq 0$. Αν για κάποιο n οι n -οστές p -αδικές προσεγγίσεις των x, y είναι ίδιες, αποδείξτε ότι $|x - y| < \frac{1}{p^n}$.

9.32. Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ και $x \geq 0$. Αν s_n είναι η n -οστή p -αδική προσέγγιση του x , τότε ποια είναι τα p -αδικά αναπτύγματα των $x - s_n$ και $p^n(x - s_n)$;

9.33. Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ και $x \geq 0$, $y \geq 0$. Αποδείξτε ότι το σφάλμα στον υπολογισμό του $x + y$ με την αντικατάσταση των x, y από τις n -οστές p -αδικές προσεγγίσεις τους είναι $< \frac{2}{p^n}$ και ότι το αντίστοιχο σφάλμα στον υπολογισμό του xy είναι $< \frac{2}{p^n} - \frac{1}{p^{2n}}$.

9.34. Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, και συγκεκριμένο p -αδικό ψηφίο r . Αποδείξτε ότι το σύνολο των αριθμών στο $[0, 1)$ των οποίων το n -οστό p -αδικό ψηφίο είναι ίσο με r είναι η ένωση p^{n-1} διαστημάτων τύπου $[a, b)$. Ποια ακριβώς είναι αυτά τα διαστήματα και τι μήκος έχει καθένα από αυτά; Ποιο είναι το συνολικό μήκος αυτών των διαστημάτων;

9.35. Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Αν s_n είναι η n -οστή p -αδική προσέγγιση του $x \geq 0$ και αν ορίσουμε $t_n = s_n + \frac{1}{p^n}$, αποδείξτε ότι η (s_n) είναι αύξουσα ακολουθία, ότι η (t_n) είναι φθίνουσα ακολουθία και ότι και οι δύο ακολουθίες συγκλίνουν στο x .

9.4 Κριτήρια σύγκλισης σειρών

Ορισμός 9.8. Λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ **συγκλίνει απολύτως**, αν η σειρά με μη-αρνητικούς όρους $\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|$ συγκλίνει ή, ισοδύναμα, αν $\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k| < +\infty$.

Κριτήριο απόλυτης σύγκλισης. Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ συγκλίνει απολύτως, τότε αυτή συγκλίνει και

$$\left| \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|.$$

Απόδειξη. Ισχύει

$$0 \leq x_k + |x_k| \leq 2|x_k| \quad \text{για κάθε } k.$$

Αρα, επειδή η $\sum_{k=1}^{+\infty} 2|x_k|$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι και η $\sum_{k=1}^{+\infty} (x_k + |x_k|)$ συγκλίνει. Επομένως, συγκλίνει και η διαφορά της τελευταίας σειράς με τη $\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|$, δηλαδή η $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$.

Τώρα, επειδή ισχύει $-|x_k| \leq x_k \leq |x_k|$ για κάθε $k \geq 1$, έχουμε ότι

$$-\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|,$$

$$\text{οπότε } \left| \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|.$$

□

Αν δούμε την ανισότητα $\left| \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|$ ως γενίκευση των $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$, $|x_1 + x_2 + x_3| \leq |x_1| + |x_2| + |x_3|$ κ.τ.λ., τότε δικαιολογείται ο όρος **τριγωνική ανισότητα** για σειρές για την ανισότητα αυτή.

Παράδειγμα 9.25. Η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ συγκλίνει, διότι συγκλίνει απολύτως:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \right| = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty.$$

Πρόταση 9.12. (i) Αν ισχύει $|x_k| \leq y_k$ για κάθε k και αν η $\sum_{k=1}^{+\infty} y_k$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ συγκλίνει απολύτως, οπότε συγκλίνει. Επίσης,

$$\left| \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} y_k.$$

(ii) Έστω ότι ισχύει $y_k > 0$ για κάθε k και ότι η $\left(\frac{|x_k|}{y_k} \right)$ συγκλίνει ή, πιο γενικά, ότι είναι φραγμένη. Αν η $\sum_{k=1}^{+\infty} y_k$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ συγκλίνει απολύτως, οπότε συγκλίνει.

Απόδειξη. (i) Επειδή η $\sum_{k=1}^{+\infty} y_k$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι η $\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|$ συγκλίνει. Επομένως, η $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ συγκλίνει και

$$\left| \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |x_k| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} y_k.$$

(ii) Άμεση συνέπεια της Πρότασης 9.6 και του κριτηρίου απόλυτης σύγκλισης. □

Παράδειγμα 9.26. Συγκρίνουμε τη $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-2)^k}{3^{k+2k}}$ με τη $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k$. Επειδή $\left| \frac{(-2)^k}{3^{k+2k}} \right| = \frac{3^k}{3^{k+2k}} \rightarrow 1$ και επειδή η $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k$ συγκλίνει, η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-2)^k}{3^{k+2k}}$ συγκλίνει και, μάλιστα, απολύτως.

Θα δούμε τώρα δύο κριτήρια για σύγκλιση σειρών.

Κριτήριο λόγου (d' Alembert). Έστω $x_k \neq 0$ για κάθε k . Υποθέτουμε ότι υπάρχει το $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right|$ και είναι ίσο με a , οπότε $0 \leq a \leq +\infty$.

(i) Αν $a < 1$, τότε η $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ συγκλίνει απολύτως, οπότε συγκλίνει.

(ii) Αν $a > 1$, τότε η $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ αποκλίνει.

Απόδειξη. (i) Έστω $a < 1$. Επιλέγουμε b έτσι ώστε $a < b < 1$. Τότε υπάρχει k_0 ώστε να ισχύει $\left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right| \leq b$ για κάθε $k \geq k_0$. Συνεπάγεται ότι ισχύει $\frac{|x_{k+1}|}{b^{k+1}} \leq \frac{|x_k|}{b^k}$ για κάθε $k \geq k_0$. Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία $\left(\frac{|x_k|}{b^k} \right)$ είναι φθίνουσα από τον k_0 -οστό όρο της και πέρα, οπότε είναι φραγμένη. Άρα, επειδή η $\sum_{k=1}^{+\infty} b^k$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι η $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ συγκλίνει απολύτως.

(ii) Έστω $a > 1$. Τότε υπάρχει k_0 ώστε να ισχύει $\left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right| \geq 1$ για κάθε $k \geq k_0$. Επομένως, η ακολουθία $(|x_k|)$ είναι αύξουσα από τον k_0 -οστό όρο της και πέρα, οπότε δεν μπορεί να ισχύει $x_k \rightarrow 0$, οπότε η $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ αποκλίνει. □

Παράδειγμα 9.27. Η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{k!}$ συγκλίνει, διότι $\left| \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} \right| = \frac{2}{k+1} \rightarrow 0 < 1$.

Παράδειγμα 9.28. Η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^k}{k!}$ αποκλίνει, διότι $\left| \frac{(k+1)^{k+1}}{\frac{k^k}{k!}} \right| = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \rightarrow e > 1$.

Παρατηρήστε ότι στο κριτήριο λόγου δεν αναφέρεται η περίπτωση $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right| = 1$. Θα δούμε αμέσως δύο παραδείγματα τα οποία εμπίπτουν σε αυτήν την περίπτωση, όπου στο ένα παράδειγμα η σειρά συγκλίνει, ενώ στο άλλο η σειρά αποκλίνει.

Παράδειγμα 9.29. Η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει και $\left| \frac{\frac{1}{(k+1)^2}}{\frac{1}{k^2}} \right| = \frac{k^2}{(k+1)^2} \rightarrow 1$.

Παράδειγμα 9.30. Η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει και $\left| \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} \right| = \frac{k}{k+1} \rightarrow 1$.

Κριτήριο ρίζας (Cauchy). Υποθέτουμε ότι υπάρχει το $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|x_k|}$ και είναι ίσο με a , τότε $0 \leq a \leq +\infty$.

(i) Αν $a < 1$, τότε η $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ συγκλίνει απολύτως, οπότε συγκλίνει.

(ii) Αν $a > 1$, τότε η $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ αποκλίνει.

Απόδειξη. (i) Αν $a < 1$, τότε παίρνουμε b ώστε $a < b < 1$. Τότε υπάρχει k_0 ώστε να ισχύει $\sqrt[k]{|x_k|} \leq b$ για κάθε $k \geq k_0$, οπότε ισχύει $|x_k| \leq b^k$ για κάθε $k \geq k_0$. Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία $(\frac{|x_k|}{b^k})$ είναι φραγμένη. Άρα, επειδή η $\sum_{k=1}^{+\infty} b^k$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι η $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ συγκλίνει απολύτως.

(ii) Αν $a > 1$, τότε υπάρχει k_0 ώστε να ισχύει $\sqrt[k]{|x_k|} \geq 1$ για κάθε $k \geq k_0$. Άρα ισχύει $|x_k| \geq 1$ για κάθε $k \geq k_0$, οπότε δεν ισχύει $x_k \rightarrow 0$, οπότε η $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ αποκλίνει. $\square$

Παράδειγμα 9.31. Η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^3}{2^k}$ συγκλίνει, διότι $\sqrt[k]{\left| \frac{k^3}{2^k} \right|} = \frac{(\sqrt[k]{k})^3}{2} \rightarrow \frac{1}{2} < 1$.

Παράδειγμα 9.32. Η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-2)^k}{k}$ αποκλίνει, διότι $\sqrt[k]{\left| \frac{(-2)^k}{k} \right|} = \frac{2}{\sqrt[k]{k}} \rightarrow 2 > 1$.

Παρατηρήστε ότι, όπως στο κριτήριο λόγου, στο κριτήριο ρίζας δεν αναφέρεται καθόλου η περίπτωση $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|x_k|} = 1$. Θα δούμε δύο παραδείγματα τα οποία εμπίπτουν σε αυτήν την περίπτωση, όπου στο ένα παράδειγμα η σειρά συγκλίνει, ενώ στο άλλο η σειρά αποκλίνει.

Παράδειγμα 9.33. Η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει και $\sqrt[k]{\left| \frac{1}{k^2} \right|} = \frac{1}{(\sqrt[k]{k})^2} \rightarrow 1$.

Παράδειγμα 9.34. Η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει και $\sqrt[k]{\left| \frac{1}{k} \right|} = \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \rightarrow 1$.

Στα δύο προηγούμενα κριτήρια, του λόγου και της ρίζας, υπάρχει η προϋπόθεση της ύπαρξης του ορίου $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right|$ και του ορίου $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|x_k|}$, αντιστοίχως. Υπάρχουν ακριβέστερες εκδοχές των δύο αυτών κριτηρίων στην ενότητα 11.15 του κεφαλαίου 11, στις οποίες δεν απαιτείται η ύπαρξη αυτών των ορίων.¹

Πριν από το επόμενο κριτήριο θα αποδείξουμε μία χρήσιμη σχέση ανάμεσα σε αθροίσματα.

Λήμμα 9.2. Ισχύει

$$\sum_{k=m}^n (s_k - s_{k-1})t_k = \sum_{k=m}^n s_k(t_k - t_{k+1}) - s_{m-1}t_m + s_nt_{n+1}.$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n (s_k - s_{k-1})t_k &= \sum_{k=m}^n s_k t_k - \sum_{k=m}^n s_{k-1} t_k = \sum_{k=m}^n s_k t_k - \sum_{k=m-1}^{n-1} s_k t_{k+1} \\ &= \sum_{k=m}^n s_k t_k - \sum_{k=m}^n s_k t_{k+1} - s_{m-1} t_m + s_n t_{n+1} \\ &= \sum_{k=m}^n s_k (t_k - t_{k+1}) - s_{m-1} t_m + s_n t_{n+1}. \end{aligned}$$

$\square$

¹ Για αυτές τις ακριβέστερες εκδοχές των δύο κριτηρίων, με χρήση των εννοιών των $\liminf$ και $\limsup$, δείτε και τις σημειώσεις «Ανάλυση» [1].

Κριτήριο Dirichlet. Έστω ακολουθίες (a_k) και (b_k) και έστω $s_k = a_1 + \cdots + a_k$ τα μερικά αθροίσματα της πρώτης. Αν η (b_k) είναι φθίνουσα, αν $b_k \rightarrow 0$ και αν η (s_k) είναι φραγμένη, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k$ συγκλίνει.

Απόδειξη. Εκτός από τη σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k$, θεωρούμε και τη σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} s_k(b_k - b_{k+1})$, καθώς και τα μερικά αθροίσματα των δύο σειρών:

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k, \quad v_n = \sum_{k=1}^n s_k(b_k - b_{k+1}).$$

Θα συσχετίσουμε τα u_n με τα v_n , εφαρμόζοντας το Λήμμα 9.2 στην τέταρτη ισότητα παρακάτω:

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^n a_k b_k = a_1 b_1 + \sum_{k=2}^n a_k b_k = a_1 b_1 + \sum_{k=2}^n (s_k - s_{k-1}) b_k \\ &= s_1 b_1 + \sum_{k=2}^n s_k(b_k - b_{k+1}) - s_1 b_2 + s_n b_{n+1} \\ &= s_1(b_1 - b_2) + \sum_{k=2}^n s_k(b_k - b_{k+1}) + s_n b_{n+1} \\ &= v_n + s_n b_{n+1}. \end{aligned} \tag{9.3}$$

Επειδή $b_{n+1} \rightarrow 0$ και η (s_n) είναι φραγμένη, ισχύει $s_n b_{n+1} \rightarrow 0$. Άρα, αν αποδείξουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} s_k(b_k - b_{k+1})$ συγκλίνει, θα συμπεράνουμε ότι η (v_n) συγκλίνει και τότε από την (9.3) συνεπάγεται ότι και η (u_n) συγκλίνει, οπότε η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k$ συγκλίνει.

Βάσει του κριτηρίου απόλυτης σύγκλισης, για να αποδείξουμε ότι η $\sum_{k=1}^{+\infty} s_k(b_k - b_{k+1})$ συγκλίνει, αρκεί να αποδείξουμε ότι συγκλίνει απολύτως.

Τώρα, επειδή η (s_k) είναι φραγμένη, υπάρχει $M \geq 0$ ώστε να ισχύει $|s_k| \leq M$ για κάθε k . Επίσης, η (b_k) είναι φθίνουσα, οπότε ισχύει $b_k \geq b_{k+1}$ για κάθε k . Άρα έχουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |s_k(b_k - b_{k+1})| = \sum_{k=1}^{+\infty} |s_k|(b_k - b_{k+1}) \leq M \sum_{k=1}^{+\infty} (b_k - b_{k+1}). \tag{9.4}$$

Για τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\sum_{k=1}^{+\infty} (b_k - b_{k+1})$ ισχύει

$$(b_1 - b_2) + \cdots + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1} \rightarrow b_1.$$

Άρα η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} (b_k - b_{k+1})$ συγκλίνει, δηλαδή $\sum_{k=1}^{+\infty} (b_k - b_{k+1}) < +\infty$. Επομένως, από την (9.4) συνεπάγεται $\sum_{k=1}^{+\infty} |s_k(b_k - b_{k+1})| < +\infty$, δηλαδή η $\sum_{k=1}^{+\infty} s_k(b_k - b_{k+1})$ συγκλίνει απολύτως. $\square$

Κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων. Αν η ακολουθία (b_k) είναι φθίνουσα και αν $b_k \rightarrow 0$, τότε η σειρά

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} b_k = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots$$

συγκλίνει.

Απόδειξη. Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο Dirichlet με $a_k = (-1)^{k-1}$. Αν $s_k = a_1 + \cdots + a_k$ είναι τα μερικά αθροίσματα της (a_k) , τότε είναι εύκολο να δούμε ότι $s_k = 0$, αν το k είναι άρτιο, και $s_k = 1$, αν το k είναι περιττό. Άρα η (s_k) είναι φραγμένη. $\square$

Παράδειγμα 9.35. Έστω $p > 0$. Η σειρά

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^p} = 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \cdots$$

συγκλίνει, όπως προκύπτει από το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων.

Αν $p > 1$, τότε η σειρά συγκλίνει απολύτως, αφού

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^{k-1}}{k^p} \right| = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p} < +\infty.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει και δεν χρειάζεται το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων για να αποδειχτεί η σύγκλιση της $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^p}$.

Όμως, αν $0 < p \leq 1$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^p}$ δεν συγκλίνει απολύτως.

Ειδικότερα, η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ συγκλίνει, ενώ η αρμονική σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ αποκλίνει στο $+\infty$. Με αυτό το παράδειγμα βλέπουμε ότι δεν ισχύει το αντίστροφο του κριτηρίου απόλυτης σύγκλισης.

Στο σημείο αυτό θα κάνουμε κάποια σχόλια για την έννοια της σύγκλισης σειράς.

Πρώτον, έστω μια σειρά με *μη-αρνητικούς* όρους. Το να συγκλίνει η σειρά είναι ισοδύναμο με το να είναι φραγμένα τα μερικά αθροίσματά της. Αυτά τα μερικά αθροίσματα δημιουργούνται με διαδοχική άθροιση των όρων της σειράς, οπότε είναι φανερό ότι για να είναι τα μερικά αθροίσματα φραγμένα πρέπει το μέγεθος των όρων, δηλαδή των προσθετέων, να είναι αρκετά μικρό: *όταν προσθέτουμε μεγάλους αριθμούς βρίσκουμε μεγάλα αθροίσματα, ενώ όταν προσθέτουμε μικρότερους αριθμούς βρίσκουμε μικρότερα αθροίσματα*. Αυτό φαίνεται και από την Πρόταση 9.1, η οποία λέει ότι, αν μια σειρά συγκλίνει, τότε οι όροι της τείνουν στο 0. Όμως, η απλή σύγκλιση των όρων στο 0 δεν είναι αρκετή από μόνη της για να κάνει τη σειρά να συγκλίνει. Για παράδειγμα, και στις δύο σειρές $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ και $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ οι όροι τείνουν στο 0, αλλά η πρώτη συγκλίνει, ενώ η δεύτερη δεν συγκλίνει. Παρατηρήστε ότι οι όροι της πρώτης σειράς είναι *πολύ μικρότεροι* από τους αντίστοιχους όρους της δεύτερης σειράς. Πράγματι: $\frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k}} \rightarrow 0$. Δηλαδή, το μέγεθος των όρων της πρώτης σειράς είναι τόσο μικρό ώστε η σειρά συγκλίνει, ενώ το μέγεθος των όρων της δεύτερης σειράς δεν είναι τόσο μικρό όσο θα έπρεπε για να συγκλίνει και αυτή. Αυτό το «παιχνίδι» με το μέγεθος των όρων φαίνεται καθαρά και στην Πρόταση 9.6. Το βασικό της συμπέρασμα είναι ότι αν μια σειρά με μεγαλύτερους όρους συγκλίνει, τότε και η σειρά με τους μικρότερους όρους συγκλίνει.

Δεύτερον, όλα τα προηγούμενα έχουν ως βασική προϋπόθεση ότι αναφερόμαστε σε σειρές με *μη-αρνητικούς* όρους: *ένας μη-αρνητικός αριθμός ταυτίζεται με το μέγεθός του*.

Η κατάσταση αλλάζει κάπως όταν εργαζόμαστε με σειρές των οποίων οι όροι έχουν μεταβλητό πρόσημο. Και πάλι, για να συγκλίνει μια σειρά, πρέπει οι όροι της να τείνουν στο 0, οπότε το μέγεθός τους συνεχίζει να παίζει ρόλο. Όμως, το μέγεθος των όρων δεν παίζει πια τον καθοριστικό ρόλο. Εξετάστε, για παράδειγμα, τις σειρές $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ και $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$. Οι όροι τους έχουν ακριβώς το ίδιο μέγεθος. Όμως, ενώ το μέγεθος αυτό δεν είναι αρκετά μικρό ώστε να συγκλίνει η δεύτερη σειρά, είναι αρκετά μικρό ώστε να συγκλίνει η πρώτη σειρά. Ο λόγος είναι ότι από τα διαφορετικά πρόσημα προκαλείται αλληλοαναίρεση των όρων κατά την άθροισή τους και έτσι τα μερικά αθροίσματα παραμένουν «υπό έλεγχο». Το μέγεθος των όρων της $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ δεν είναι αρκετά μικρό ώστε να συγκλίνει η σειρά απολύτως, δηλαδή να συγκλίνει η σειρά των μεγεθών των όρων, αλλά είναι αρκετά μικρό, ώστε *μετά και από τις αλληλοαναιρέσεις λόγω διαφορετικών προσήμων* η σειρά να συγκλίνει. Έτσι, το κριτήριο απόλυτης σύγκλισης φαίνεται λογικό: αν το μέγεθος των όρων μιας σειράς είναι αρκετά μικρό ώστε η σειρά των μεγεθών αυτών να συγκλίνει, τότε είναι αρκετά μικρό, ώστε μετά και από τις αλληλοαναιρέσεις λόγω διαφορετικών προσήμων η σειρά των ίδιων των όρων να συγκλίνει.

Ασκήσεις

9.36. Εφαρμόστε το κριτήριο λόγου σε όποιες από τις σειρές $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+2}{2^{\frac{k}{2}}}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} k e^k$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k!}{3^k}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^k}{k!}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{k^k}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^k}{2^k k!}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^k}{4^k k!}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2k)!}{(k!)^2}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k!)^2}{2^{k^2}}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3k-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4k-3)}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^k}{e^k k!}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2}$ είναι αυτό δυνατόν.

Υπόδειξη: Οι δύο τελευταίες σειρές είναι οι μόνες για τις οποίες δεν προκύπτει συμπέρασμα από το κριτήριο λόγου.

9.37. Εφαρμόστε το κριτήριο ρίζας σε όποιες από τις σειρές $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{k+1}{2k-1}\right)^k$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{3k-1}{2k+1}\right)^{2k}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^3}{e^k}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} (k+2)^3 2^k$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{(k+1)^k}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{(\sqrt[k]{k}+1)^k}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k 3^k}{(\sqrt[k]{k}+1)^k}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k 2^k}{(\sqrt[k]{k}+1)^k}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} e^k \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$ είναι αυτό δυνατόν.

Υπόδειξη: Οι δύο τελευταίες σειρές είναι οι μόνες για τις οποίες δεν προκύπτει συμπέρασμα από το κριτήριο ρίζας.

9.38. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση τις σειρές $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^{\frac{4}{3}}}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^{\frac{3}{4}}}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} \sqrt{k}}{k+1}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k+1}}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} k^2}{3^k}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}}{2^k}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}}{k}$, $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k \log k}$, $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k \log^2 k}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{\log k}{k}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \log(1 + \frac{1}{k})$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt[k]{k}}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \sin \frac{1}{k}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} (1 - \cos \frac{1}{k})$, $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} k(1 - \cos \frac{1}{k})$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{1+k} \sin^{\frac{1}{2}} \frac{1}{k}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \tan \frac{1}{k}$. Σε περιπτώσεις κατά τις οποίες μια σειρά δεν συγκλίνει απολύτως, μπορεί να φανεί χρήσιμο το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων.

9.39. Αν $\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k| < +\infty$, αποδείξτε ότι οι $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k \cos(kx)$ και $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k \sin(kx)$ συγκλίνουν.

9.40. Βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1+x^{2k}}$ συγκλίνει.

9.41. (i) Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2k} \geq \int_1^{k+1} \frac{1}{2t} dt = \log \sqrt{k+1}$ για κάθε k .

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το Λήμμα 9.1.

Κατόπιν, με την ανισότητα $1+x \leq e^x$ αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \dots \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ για κάθε k .

Αποδείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2k)}$ συγκλίνει εφαρμόζοντας το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων.

(ii) Αποδείξτε ότι ισχύει $1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2k-1} \leq 1 + \int_1^k \frac{1}{2t-1} dt = 1 + \log \sqrt{2k-1}$ για κάθε k . Κατόπιν με την ανισότητα $1+x \leq e^x$ αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \dots \frac{2k-1}{2k} \geq \frac{1}{e \sqrt{2k-1}}$ για κάθε k .

Αποδείξτε ότι η σειρά στο (i), δηλαδή η $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2k)}$, δεν συγκλίνει απολύτως.

9.42. Βρείτε ακολουθία (b_k) ώστε να ισχύει $b_k > 0$ για κάθε k , ώστε $b_k \rightarrow 0$ και ώστε η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} b_k$ να αποκλίνει.

9.43. Βρείτε $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ η οποία συγκλίνει ώστε η $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k^2$ να αποκλίνει.

9.44. Θεωρήστε τις σειρές

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \cos(kx), \quad \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(kx).$$

Αν η (b_k) είναι φθίνουσα και $b_k \rightarrow 0$, αποδείξτε ότι η πρώτη σειρά συγκλίνει για κάθε x το οποίο δεν είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π και ότι η δεύτερη σειρά συγκλίνει για κάθε x .

Υπόδειξη: Μελετήστε την άσκηση 1.39 και εφαρμόστε το κριτήριο Dirichlet.

9.45. Έστω ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{k^p}$ συγκλίνει. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{k^{p'}}$ συγκλίνει, αν $p' > p$, και συγκλίνει απολύτως, αν $p' > p+1$.

9.5 Δυναμοσειρές και σειρές Taylor

9.5.1 Γενικά για δυναμοσειρές

Ορισμός 9.9. Κάθε σειρά της μορφής

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - \xi)^k = a_0 + a_1 (x - \xi) + a_2 (x - \xi)^2 + \dots + a_k (x - \xi)^k + \dots$$

ονομάζεται **δυναμοσειρά με κέντρο ξ και συντελεστές $a_0, a_1, a_2, \dots$**

Αν για κάποιο x η δυναμοσειρά συγκλίνει ή συγκλίνει απολύτως, τότε λέμε ότι το x είναι **σημείο σύγκλισης** ή **σημείο απόλυτης σύγκλισης**, αντιστοίχως, της δυναμοσειράς. Αν για κάποιο x η δυναμοσειρά αποκλίνει, τότε λέμε ότι το x είναι **σημείο απόκλισης** της δυναμοσειράς.

Το σύνολο των σημείων σύγκλισης λέγεται **σύνολο σύγκλισης** της δυναμοσειράς.

Μελέτη μιας δυναμοσειράς σημαίνει, κατ' αρχάς, να βρεθούν εκείνες οι τιμές του x για τις οποίες η δυναμοσειρά συγκλίνει και, κατόπιν, να βρεθεί συνοπτικός τύπος για το άθροισμά της το οποίο, φυσικά, εξαρτάται από το x . Θα δούμε ότι για το πρώτο ζήτημα υπάρχει μία σχετικά γενική απάντηση, ενώ για το δεύτερο υπάρχει απάντηση μόνο κατά περίπτωση.

Παράδειγμα 9.36. Η δυναμοσειρά

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 0(x-\xi)^k = 0 + 0(x-\xi) + 0(x-\xi)^2 + \cdots + 0(x-\xi)^k + \cdots,$$

με όλους τους συντελεστές ίσους με 0, ονομάζεται **μηδενική δυναμοσειρά** και, προφανώς, συγκλίνει για κάθε x και έχει άθροισμα ίσο με 0. Το σύνολο σύγκλισης της μηδενικής δυναμοσειράς είναι το $(-\infty, +\infty)$.

Παράδειγμα 9.37. Η γεωμετρική δυναμοσειρά με κέντρο ξ ,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (x-\xi)^k = 1 + (x-\xi) + (x-\xi)^2 + \cdots + (x-\xi)^k + \cdots,$$

με όλους τους συντελεστές ίσους με 1, έχει ήδη μελετηθεί στη μορφή $\sum_{k=0}^{+\infty} a^k$, δηλαδή με $a = x-\xi$. Η δυναμοσειρά αυτή συγκλίνει, μόνο αν $-1 < x-\xi < 1$, δηλαδή $\xi-1 < x < \xi+1$, και το άθροισμά της είναι τότε ίσο με $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-(x-\xi)}$. Δηλαδή,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (x-\xi)^k = \frac{1}{1-(x-\xi)} \quad \text{αν } \xi-1 < x < \xi+1.$$

Το σύνολο σύγκλισης της γεωμετρικής δυναμοσειράς με κέντρο ξ είναι το διάστημα $(\xi-1, \xi+1)$.

Είναι προφανές ότι, αν $x = \xi$, τότε όλοι οι όροι της δυναμοσειράς $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-\xi)^k$ είναι ίσοι με το 0 εκτός από τον πρώτο όρο a_0 . Δηλαδή, το κέντρο μιας δυναμοσειράς είναι πάντοτε σημείο σύγκλισής της και το άθροισμα της δυναμοσειράς στο κέντρο της είναι ίσο με a_0 .

Υπάρχουν παραδείγματα όπου το κέντρο ξ είναι το μοναδικό σημείο σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-\xi)^k$, δηλαδή το σύνολο σύγκλισής της είναι το $\{\xi\}$.

Παράδειγμα 9.38. Θεωρούμε τη δυναμοσειρά

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^k x^k$$

με κέντρο το 0.

Εφαρμόζουμε το κριτήριο ρίζας: έχουμε ότι $\sqrt[k]{|k^k x^k|} = \sqrt[k]{k^k |x|^k} = k|x| \rightarrow +\infty$ όταν $x \neq 0$, οπότε κάθε $x \neq 0$ είναι σημείο απόκλισης της δυναμοσειράς. Άρα το σύνολο σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το $\{0\}$.

Τώρα έστω ότι μια δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-\xi)^k$ έχει τουλάχιστον ένα σημείο σύγκλισης διαφορετικό από το κέντρο της ξ και έστω x οποιοδήποτε τέτοιο σημείο σύγκλισης $\neq \xi$. Θέτουμε $r = |x-\xi| > 0$ και θεωρούμε $x' \in (\xi-r, \xi+r)$, οπότε $|x'-\xi| < r$. Επειδή το x είναι σημείο σύγκλισης, η σειρά αριθμών $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-\xi)^k$ συγκλίνει. Συνεπάγεται ότι $a_k(x-\xi)^k \rightarrow 0$, οπότε η ακολουθία $(a_k(x-\xi)^k)$ είναι φραγμένη. Δηλαδή, υπάρχει κάποιο $M \geq 0$ ώστε να ισχύει

$$|a_k| r^k = |a_k| |x-\xi|^k = |a_k(x-\xi)^k| \leq M \quad \text{για κάθε } k.$$

Τότε

$$|a_k(x'-\xi)^k| = |a_k| r^k \left(\frac{|x'-\xi|}{r}\right)^k \leq M \left(\frac{|x'-\xi|}{r}\right)^k = M a^k \quad \text{για κάθε } k,$$

όπου θέσαμε $a = \frac{|x'-\xi|}{r}$. Επειδή $0 \leq a < 1$, η γεωμετρική σειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} a^k$ συγκλίνει, οπότε και η $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k(x'-\xi)^k|$ συγκλίνει. Δηλαδή, η $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x'-\xi)^k$ συγκλίνει απολύτως.

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι

Αν το $x \neq \xi$ είναι σημείο σύγκλισης της δυναμοσειράς και αν $r = |x-\xi| > 0$, τότε κάθε σημείο του ανοικτού διαστήματος $(\xi-r, \xi+r)$ είναι σημείο απόλυτης σύγκλισης της δυναμοσειράς.

Βλέπουμε δηλαδή ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα ανοικτό διάστημα κάθε σημείο του οποίου είναι σημείο απόλυτης σύγκλισης της δυναμοσειράς. Τώρα θα θεωρήσουμε το μέγιστο τέτοιο ανοικτό διάστημα $(\xi - R, \xi + R)$. Θα θεωρήσουμε δηλαδή το μέγιστο $R > 0$ ώστε κάθε σημείο του $(\xi - R, \xi + R)$ να είναι σημείο απόλυτης σύγκλισης της δυναμοσειράς.

Υπάρχουν παραδείγματα όπου το μέγιστο τέτοιο ανοικτό διάστημα $(\xi - R, \xi + R)$ έχει $R = +\infty$. Αυτό σημαίνει ότι $(\xi - R, \xi + R) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ ή, με άλλα λόγια, ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε x .

Παράδειγμα 9.39. Θεωρούμε τη δυναμοσειρά

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^k} x^k$$

με κέντρο το 0.

Εφαρμόζουμε το κριτήριο ρίζας: ισχύει $\sqrt[k]{\left|\frac{x^k}{k^k}\right|} = \sqrt[k]{\frac{|x|^k}{k^k}} = \frac{|x|}{k} \rightarrow 0$, οπότε για κάθε x η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως, οπότε $R = +\infty$.

Μένει η περίπτωση $0 < R < +\infty$, δηλαδή όταν το μέγιστο ανοικτό διάστημα $(\xi - R, \xi + R)$, κάθε σημείο του οποίου είναι σημείο απόλυτης σύγκλισης της δυναμοσειράς, έχει πεπερασμένη ακτίνα. Θα δούμε παραδείγματα σε λίγο. Τότε παίρνουμε οποιοδήποτε x έξω από το κλειστό διάστημα $[\xi - R, \xi + R]$, οπότε $|x - \xi| > R$, και θέτουμε $r = |x - \xi| > R$. Αν το x είναι σημείο σύγκλισης της δυναμοσειράς, τότε, σύμφωνα με ό,τι έχουμε αποδείξει προηγουμένως, κάθε σημείο του ανοικτού διαστήματος $(\xi - r, \xi + r)$ είναι σημείο απόλυτης σύγκλισης της δυναμοσειράς. Αυτό είναι άτοπο, αφού το διάστημα $(\xi - r, \xi + r)$ είναι γνήσια μεγαλύτερο από το $(\xi - R, \xi + R)$. Βλέπουμε λοιπόν ότι κάθε x έξω από το κλειστό διάστημα $[\xi - R, \xi + R]$ είναι σημείο απόκλισης της δυναμοσειράς.

Αρα στην περίπτωση $0 < R < +\infty$ το ανοικτό διάστημα $(\xi - R, \xi + R)$ αποτελείται από σημεία απόλυτης σύγκλισης της δυναμοσειράς, ενώ όλα τα σημεία έξω από το $[\xi - R, \xi + R]$ είναι σημεία απόκλισης της δυναμοσειράς. Για τα άκρα $\xi - R$ και $\xi + R$ υπάρχουν διάφορες περιπτώσεις: μπορεί να είναι και τα δύο σημεία σύγκλισης ή και τα δύο σημεία απόκλισης ή το ένα σημείο σύγκλισης και το άλλο σημείο απόκλισης. Θα δούμε παραδείγματα σε πολύ λίγο.

Πριν συνοψίσουμε, θα πούμε ότι στην αρχική περίπτωση, κατά την οποία το μοναδικό σημείο σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το κέντρο ξ , το ανοικτό διάστημα $(\xi - 0, \xi + 0)$, με μηδενική ακτίνα $R = 0$, είναι το κενό σύνολο και το κλειστό διάστημα $[\xi - 0, \xi + 0]$ είναι το $\{\xi\}$, δηλαδή το σύνολο σύγκλισης της δυναμοσειράς. Στη δεύτερη περίπτωση, όπου είναι $R = +\infty$, το ανοικτό διάστημα $(\xi - (+\infty), \xi + (+\infty))$, με άπειρη ακτίνα, είναι ολόκληρο το $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ και είναι το σύνολο σύγκλισης της δυναμοσειράς.

Η πρόταση η οποία ακολουθεί συνοψίζει όσα αποδείξαμε μέχρι τώρα.

Πρόταση 9.13. Έστω δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x - \xi)^k$. Τότε υπάρχει $R \in [0, +\infty]$ ώστε:

- (i) αν $R = 0$, τότε το σύνολο σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το $[\xi - R, \xi + R] = \{\xi\}$.
- (ii) αν $0 < R < +\infty$, τότε κάθε σημείο του ανοικτού διαστήματος $(\xi - R, \xi + R)$ είναι σημείο απόλυτης σύγκλισης της δυναμοσειράς και κάθε σημείο έξω από το κλειστό διάστημα $[\xi - R, \xi + R]$ είναι σημείο απόκλισης της δυναμοσειράς. Τα άκρα $\xi \pm R$ μπορεί να είναι και τα δύο σημεία σύγκλισης ή και τα δύο σημεία απόκλισης ή το ένα σημείο σύγκλισης και το άλλο σημείο απόκλισης. Δηλαδή, το σύνολο σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι ένα από τα διαστήματα $(\xi - R, \xi + R)$, $(\xi - R, \xi + R]$, $[\xi - R, \xi + R)$, $[\xi - R, \xi + R]$.
- (iii) αν $R = +\infty$, τότε κάθε σημείο του ανοικτού διαστήματος $(\xi - R, \xi + R) = (-\infty, +\infty)$ είναι σημείο απόλυτης σύγκλισης της δυναμοσειράς και το διάστημα αυτό είναι και το σύνολο σύγκλισης της δυναμοσειράς.

Ορισμός 9.10. Έστω δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x - \xi)^k$. Το $R \in [0, +\infty]$ της Πρότασης 9.13 ονομάζεται **ακτίνα σύγκλισης** της δυναμοσειράς και το σύνολο σύγκλισης της δυναμοσειράς, το οποίο έχει σε κάθε περίπτωση τη μορφή διαστήματος με κέντρο ξ και ακτίνα R , ονομάζεται **διάστημα σύγκλισης** της δυναμοσειράς.

Για τον υπολογισμό της ακτίνας σύγκλισης δυναμοσειράς υπάρχει συγκεκριμένος γενικός τύπος ο οποίος βρίσκεται στην ενότητα 11.16 του κεφαλαίου 11.² Θα δούμε, όμως, τώρα δύο απλούστερους τύπους για την ακτίνα σύγκλισης, οι οποίοι ισχύουν για τις περισσότερες δυναμοσειρές οι οποίες εμφανίζονται στην πράξη.

Πρόταση 9.14. Έστω δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x - \xi)^k$.

(i) Αν $a_k \neq 0$ για κάθε k και αν υπάρχει το όριο $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$ και είναι ίσο με a , τότε $0 \leq a \leq +\infty$, τότε η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι ίση με $\frac{1}{a}$.

(ii) Αν υπάρχει το όριο $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ και είναι ίσο με a , τότε $0 \leq a \leq +\infty$, τότε η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι ίση με $\frac{1}{a}$.

Και στις δύο περιπτώσεις, το $\frac{1}{a}$ ορίζεται ως 0, αν $a = +\infty$, και ως $+\infty$, αν $a = 0$

Απόδειξη. (i) Εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου στη $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x - \xi)^k$, θεωρώντας $x \neq \xi$. Είναι

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{k+1}(x - \xi)^{k+1}}{a_k(x - \xi)^k} \right| = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| |x - \xi| \right) = \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \right) |x - \xi| = a|x - \xi|.$$

Άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως, αν $|x - \xi| < \frac{1}{a}$, και αποκλίνει, αν $|x - \xi| > \frac{1}{a}$. Επομένως, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι ίση με $\frac{1}{a}$.

(ii) Εφαρμόζουμε το κριτήριο ρίζας στη $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x - \xi)^k$. Είναι

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k(x - \xi)^k|} = \lim_{k \rightarrow +\infty} (\sqrt[k]{|a_k|} |x - \xi|) = \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \right) |x - \xi| = a|x - \xi|.$$

Άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως, αν $|x - \xi| < \frac{1}{a}$, και αποκλίνει, αν $|x - \xi| > \frac{1}{a}$. Επομένως, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι ίση με $\frac{1}{a}$. $\square$

Παράδειγμα 9.40. Θεωρούμε τη γεωμετρική δυναμοσειρά

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k + \cdots$$

με κέντρο το 0. Εφαρμόζουμε και τους δύο τύπους της Πρότασης 9.14 για την ακτίνα σύγκλισης:

$$\left| \frac{1}{1} \right| = 1 \rightarrow 1, \quad \sqrt[k]{|1|} = 1 \rightarrow 1.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το $R = 1$, οπότε το διάστημα σύγκλισής της είναι ένα από τα $(-1, 1)$, $(-1, 1]$, $[-1, 1)$, $[-1, 1]$. Στα άκρα $x = -1$ και $x = 1$ η δυναμοσειρά είναι, αντιστοίχως, η $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k$ και η $\sum_{k=0}^{+\infty} 1$. Και οι δύο σειρές αποκλίνουν, αφού ο k -οστός όρος τους δεν τείνει στο 0. Άρα το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το $(-1, 1)$. Φυσικά, το διάστημα σύγκλισης της γεωμετρικής δυναμοσειράς είναι ήδη γνωστό από το παράδειγμα 9.37.

Παράδειγμα 9.41. Θεωρούμε τη δυναμοσειρά

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2} = x + \frac{x^2}{2^2} + \cdots + \frac{x^k}{k^2} + \cdots$$

με κέντρο το 0. Εφαρμόζουμε και τους δύο τύπους της Πρότασης 9.14 για την ακτίνα σύγκλισης:

$$\left| \frac{\frac{1}{(k+1)^2}}{\frac{1}{k^2}} \right| = \frac{k^2}{(k+1)^2} \rightarrow 1, \quad \sqrt[k]{\left| \frac{1}{k^2} \right|} = \frac{1}{(\sqrt[k]{k})^2} \rightarrow 1.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το $R = 1$, οπότε το διάστημα σύγκλισής της είναι ένα από τα $(-1, 1)$, $(-1, 1]$, $[-1, 1)$, $[-1, 1]$. Στα άκρα $x = -1$ και $x = 1$ η δυναμοσειρά είναι, αντιστοίχως, η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ και η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Γνωρίζουμε ότι η δεύτερη σειρά συγκλίνει. Όμως, και η πρώτη σειρά συγκλίνει, διότι συγκλίνει απολύτως. Άρα το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το $[-1, 1]$.

² Δείτε και τις σημειώσεις «Ανάλυση» [1].

Παράδειγμα 9.42. Θεωρούμε τη δυναμοσειρά

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^k}{k} + \cdots$$

με κέντρο το 0. Εφαρμόζουμε και τους δύο τύπους της Πρότασης 9.14 για την ακτίνα σύγκλισης:

$$\left| \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} \right| = \frac{k}{k+1} \rightarrow 1, \quad \sqrt[k]{\left| \frac{1}{k} \right|} = \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \rightarrow 1.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το $R = 1$, οπότε το διάστημα σύγκλισής της είναι ένα από τα $(-1, 1)$, $(-1, 1]$, $[-1, 1)$, $[-1, 1]$. Στα άκρα $x = -1$ και $x = 1$ η δυναμοσειρά είναι, αντιστοίχως, η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ και η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$. Γνωρίζουμε ότι η δεύτερη σειρά αποκλίνει. Όμως, η πρώτη σειρά συγκλίνει, λόγω του κριτηρίου εναλλασσόμενων προσήμων, όπως είδαμε στο παράδειγμα 9.35. Άρα το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το $[-1, 1)$.

Παράδειγμα 9.43. Για τη δυναμοσειρά

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k}$$

με κέντρο το 0 μπορούμε να επαναλάβουμε ότι κάναμε στο παράδειγμα 9.42 και να εφαρμόσουμε τους τύπους υπολογισμού της ακτίνας σύγκλισης. Μπορούμε, όμως, να χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα του παραδείγματος 9.42 ως εξής. Με την αλλαγή μεταβλητής $t = -x$ η δυναμοσειρά γράφεται

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k}.$$

Είδαμε ότι αυτή συγκλίνει για κάθε $t \in [-1, 1)$, οπότε η αρχική δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \in (-1, 1]$. Άρα το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το $(-1, 1]$ και, φυσικά, η ακτίνα σύγκλισής της είναι το $R = 1$.

Στα τέσσερα τελευταία παραδείγματα είδαμε δυναμοσειρές των οποίων το διάστημα σύγκλισης περιέχει κανένα ή μόνο ένα ή και τα δύο άκρα του.

Παράδειγμα 9.44. Θεωρούμε τη δυναμοσειρά

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots$$

με κέντρο το 0. Εφαρμόζουμε τον πρώτο τύπο της Πρότασης 9.14 για την ακτίνα σύγκλισης:

$$\left| \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} \right| = \frac{1}{k+1} \rightarrow 0.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το $R = +\infty$ και το διάστημα σύγκλισής της είναι το $(-\infty, +\infty)$. Επομένως, η σειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε x .

Παράδειγμα 9.45. Για τη δυναμοσειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} k^k x^k$ με κέντρο το 0 την οποία είδαμε στο παράδειγμα 9.38 οι τύποι της Πρότασης 9.14 δίνουν:

$$\left| \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k} \right| = (k+1) \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \rightarrow (+\infty)e = +\infty, \quad \sqrt[k]{|k^k|} = k \rightarrow +\infty.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = 0$, οπότε το διάστημα σύγκλισης είναι το $\{0\}$.

Παράδειγμα 9.46. Για τη δυναμοσειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^k} x^k$ με κέντρο το 0 την οποία είδαμε στο παράδειγμα 9.38 οι τύποι της Πρότασης 9.14 δίνουν:

$$\left| \frac{\frac{1}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{1}{k^k}} \right| = \frac{1}{(k+1) \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k} \rightarrow 0, \quad \sqrt[k]{\left| \frac{1}{k^k} \right|} = \frac{1}{k} \rightarrow 0.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = +\infty$, οπότε το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-\infty, +\infty)$.

Από μια δυναμοσειρά ορίζεται συνάρτηση:

Ορισμός 9.11. Έστω δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-\xi)^k$ με ακτίνα σύγκλισης $R > 0$, όπου περιλαμβάνεται και η περίπτωση $R = +\infty$, οπότε το διάστημα σύγκλισης I της δυναμοσειράς έχει κέντρο το ξ και ακτίνα $R > 0$, οπότε έχει θετικό μήκος. Τότε ορίζεται συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-\xi)^k \quad \text{για } x \in I.$$

Λέμε ότι η f είναι η **συνάρτηση η οποία ορίζεται από τη δυναμοσειρά** $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-\xi)^k$ στο διάστημα σύγκλισής της.

Παράδειγμα 9.47. Η γεωμετρική δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ έχει διάστημα σύγκλισης το $(-1, 1)$ και για κάθε x στο διάστημα αυτό ισχύει $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$. Άρα η συνάρτηση $\frac{1}{1-x}$ με πεδίο ορισμού το $(-1, 1)$ είναι η συνάρτηση η οποία ορίζεται από τη δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ στο $(-1, 1)$.

Προσέξτε: η συνάρτηση $\frac{1}{1-x}$ ορίζεται, ανεξάρτητα από τη $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$, στο σύνολο $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ το οποίο είναι μεγαλύτερο από το $(-1, 1)$, το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

Υπό προϋποθέσεις, υπάρχει και η αντίστροφη διαδικασία. Από μια συνάρτηση ορίζεται δυναμοσειρά:

Ορισμός 9.12. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ και έστω ότι υπάρχει διάστημα $I \subseteq A$ θετικού μήκους με κέντρο το ξ και δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-\xi)^k$ η οποία συγκλίνει για κάθε $x \in I$ και ισχύει

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-\xi)^k \quad \text{για } x \in I.$$

Τότε λέμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-\xi)^k$ είναι **σειρά Taylor** της f στο ξ .

Παράδειγμα 9.48. Η συνάρτηση $\frac{1}{1-x}$ έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Το διάστημα $(-1, 1)$, με κέντρο το 0, περιέχεται στο σύνολο αυτό και υπάρχει η δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ η οποία συγκλίνει για κάθε $x \in (-1, 1)$ και ισχύει $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ για κάθε $x \in (-1, 1)$. Άρα η $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ είναι η σειρά Taylor της $\frac{1}{1-x}$ στο 0.

Τώρα ανακύπτουν δύο ερωτήματα.

Πρώτο ερώτημα. Έστω ότι έχουμε μια συνάρτηση f και ένα ξ στο πεδίο ορισμού της. Μπορούμε να αποφασίσουμε αν υπάρχει σειρά Taylor της συνάρτησης στο ξ και, αν υπάρχει, να τη βρούμε; Και ένα συμπληρωματικό ερώτημα: αν υπάρχει σειρά Taylor της f στο ξ , τότε είναι αυτή μοναδική;

Δεύτερο ερώτημα. Έστω ότι έχουμε μια δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-\xi)^k$ με διάστημα σύγκλισης I . Όπως είδαμε, ορίζεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-\xi)^k$ για κάθε $x \in I$. Μπορούμε να βρούμε **συνοπτικό** τύπο της συνάρτησης; Για παράδειγμα, η συνάρτηση η οποία ορίζεται από τη $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ στο $(-1, 1)$ έχει τον τύπο $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ αλλά και τον συνοπτικό τύπο $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Αλλά, ακόμη και αν δεν μπορούμε να βρούμε συνοπτικό τύπο για τη συνάρτηση f , μήπως μπορούμε να βγάλουμε χρήσιμα συμπεράσματα για τις ιδιότητές της στο διάστημα σύγκλισής της, π.χ. συνέχεια ή παραγωγισιμότητα;

Ασκήσεις

9.46. Βρείτε τα διαστήματα σύγκλισης των δυναμοσειρών $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k x^k$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{2^k}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} k^3 x^k$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k 2^k}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k x^k}{k^2}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{k x^k}{\sqrt{k^3+1}}$, $\sum_{k=0}^{+\infty} k! x^k$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k x^k}{k!}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{2^k+3^k}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^k x^k}{(k+1)^k}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^k x^k}{(k+1)^{k+1}}$. Μην παραβλέψετε τα άκρα των διαστημάτων σύγκλισης.

9.47. Βρείτε τα διαστήματα σύγκλισης των δυναμοσειρών $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{x^{2m-1}}{2m-1}$, $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{2m-1}$, $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2^m x^{3m}}{4m-3}$, $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{3^m x^{m^2}}{\sqrt{m}}$. Δεν μπορείτε να χρησιμοποιήσετε απευθείας τους τύπους υπολογισμού της ακτίνας σύγκλισης (γιατί;). Μπορείτε, όμως, να δοκιμάσετε κάποια αλλαγή μεταβλητής ή να εφαρμόσετε απευθείας το κριτήριο λόγου ή το κριτήριο ρίζας. Μην παραβλέψετε τα άκρα των διαστημάτων σύγκλισης.

9.5.2 Από συνάρτηση σε δυναμοσειρά: σειρά Taylor

Κατ' αρχάς, θα απαντήσουμε στο πρώτο ερώτημα στο τέλος της προηγούμενης υποενότητας: αν, δεδομένης μιας συνάρτησης f και δεδομένου ενός ξ στο πεδίο ορισμού της, μπορούμε να αποφασίσουμε αν υπάρχει σειρά Taylor της συνάρτησης στο ξ και, αν υπάρχει, να τη βρούμε.

Πρόταση 9.15. Έστω διάστημα I θετικού μήκους με κέντρο το ξ και έστω $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο I . Τότε για κάθε $x \in I$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} (x - \xi)^k + R_n(x; \xi; f),$$

όπου $R_n(x; \xi; f)$ είναι το σφάλμα τάξης n τύπου Lagrange ή ολοκληρωτικού τύπου.

Αν $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x; \xi; f) = 0$ για κάθε $x \in I$, τότε

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} (x - \xi)^k \quad \text{για } x \in I,$$

δηλαδή μια σειρά Taylor της f στο ξ είναι η $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} (x - \xi)^k$.

Απόδειξη. Το πρώτο μέρος είναι απλή συνέπεια των δύο Θεωρημάτων Taylor. Το δεύτερο μέρος είναι προφανές: αν $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x; \xi; f) = 0$ για κάθε $x \in I$, τότε συνεπάγεται

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} (x - \xi)^k = f(x)$$

ή, ισοδύναμα, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} (x - \xi)^k = f(x)$ για κάθε $x \in I$. □

Θυμόμαστε ότι τα σφάλματα τάξης n τύπου Lagrange και ολοκληρωτικού τύπου δίνονται από τους αντίστοιχους τύπους

$$R_n(x; \xi; f) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} (x - \xi)^{n+1}, \quad R_n(x; \xi; f) = \frac{1}{n!} \int_{\xi}^x f^{(n+1)}(t) (x - t)^n dt,$$

για $x \in I$ και η ανάμεσα στα x και ξ .

Ως προς το συμπληρωματικό ερώτημα, δηλαδή σχετικά με τη μοναδικότητα μιας σειράς Taylor, η απάντηση είναι *καταφατική*, και θα την αποδείξουμε λίγο πιο μετά, στην επόμενη υποενότητα. Μπορούμε, λοιπόν, να λέμε η σειρά Taylor μιας συνάρτησης σε ένα σημείο.

Παράδειγμα 9.49. Έστω $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_N x^N$ οποιοδήποτε πολυώνυμο βαθμού N και έστω οποιοδήποτε ξ . Για κάθε x και κάθε $n \geq N$ ισχύει $p^{(n+1)}(x) = 0$, οπότε το σφάλμα τύπου Lagrange είναι

$$R_n(x; \xi; p) = \frac{p^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} (x - \xi)^{n+1} = 0.$$

Άρα $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x; \xi; p) = 0$ για κάθε x και συμπεραίνουμε ότι η σειρά Taylor της συνάρτησης $p(x)$ στο ξ είναι η

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{p^{(k)}(\xi)}{k!} (x - \xi)^k = p(\xi) + \frac{p'(\xi)}{1!} (x - \xi) + \dots + \frac{p^{(N)}(\xi)}{N!} (x - \xi)^N.$$

Δηλαδή,

$$p(x) = p(\xi) + \frac{p'(\xi)}{1!} (x - \xi) + \dots + \frac{p^{(N)}(\xi)}{N!} (x - \xi)^N \quad \text{για } -\infty < x < +\infty.$$

Αυτό είναι το λεγόμενο *ανάπτυγμα πολυωνύμου σε δυνάμεις του $x - \xi$* . Φυσικά, στην περίπτωση $\xi = 0$ έχουμε $p(x) = p(0) + \frac{p'(0)}{1!} x + \dots + \frac{p^{(N)}(0)}{N!} x^N$. Αυτό το γνωρίζουν ήδη όσοι έχουν λύσει την άσκηση 6.87: εκεί αναφέρονται οι ισότητες $p^{(n)}(0) = n! a_n$ για $n = 0, 1, \dots, N$.

Παράδειγμα 9.50. Θεωρούμε την εκθετική συνάρτηση e^x η οποία είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty, +\infty)$ και ισχύει $\frac{d^k e^x}{dx^k} = e^x$ για κάθε k και κάθε x . Ειδικότερα, ισχύει $\frac{d^k e^x}{dx^k} \Big|_{x=0} = 1$ για κάθε k , οπότε η πιθανή σειρά Taylor της e^x στο 0 είναι η $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$. Παίρνουμε $\xi = 0$ και υπολογίζουμε το σφάλμα τύπου Lagrange

$$R_n(x; 0; e^x) = \frac{e^\eta}{(n+1)!} x^{n+1},$$

όπου το η είναι αριθμός ανάμεσα στα 0 και x . Αν $x > 0$, τότε $0 < \eta < x$, οπότε

$$|R_n(x; 0; e^x)| = \frac{e^\eta x^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Αν $x < 0$, τότε $x < \eta < 0$, οπότε

$$|R_n(x; 0; e^x)| = \frac{e^\eta |x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Στο παράδειγμα 3.89 έχουμε αποδείξει ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ για κάθε a , οπότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x; 0; e^x) = 0$ για κάθε x . Άρα η σειρά Taylor της e^x στο 0 είναι η $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$. Δηλαδή,

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad \text{για } -\infty < x < +\infty.$$

Βλέπουμε ότι η συνάρτηση η οποία ορίζεται από τη δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ στο $(-\infty, +\infty)$ είναι η εκθετική συνάρτηση e^x . Γι' αυτόν τον λόγο η δυναμοσειρά αυτή ονομάζεται **εκθετική δυναμοσειρά**.

Προσέξτε ότι με $x = 1$ ξαναβρίσκουμε, με διαφορετική απόδειξη, την ισότητα $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$ της Πρότασης 9.7.

Παράδειγμα 9.51. Τώρα θα βρούμε τις σειρές Taylor των $\cos x$ και $\sin x$.

Η $\cos x$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty, +\infty)$ και ισχύει $\frac{d^k \cos x}{dx^k} = \pm \cos x$ ή $\pm \sin x$. Ειδικότερα, είναι

$$\frac{d^k \cos x}{dx^k} \Big|_{x=0} = \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}}, & \text{αν το } k \text{ είναι άρτιο,} \\ 0, & \text{αν το } k \text{ είναι περιττό.} \end{cases}$$

Επομένως, η πιθανή σειρά Taylor της $\cos x$ στο 0 είναι η $\sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}$. Παίρνουμε $\xi = 0$ και υπολογίζουμε το σφάλμα τύπου Lagrange

$$R_n(x; 0; \cos x) = \frac{\pm \cos \eta}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \text{ή} \quad \frac{\pm \sin \eta}{(n+1)!} x^{n+1},$$

όπου η είναι αριθμός ανάμεσα στα 0 και x . Άρα

$$|R_n(x; 0; \cos x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!},$$

οπότε συνεπάγεται $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x; 0; \cos x) = 0$ για κάθε x . Άρα η σειρά Taylor της $\cos x$ στο 0 είναι η $\sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}$ στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$. Δηλαδή,

$$\cos x = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad \text{για } -\infty < x < +\infty.$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε τη σειρά Taylor της $\sin x$ στο 0:

$$\sin x = \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad \text{για } -\infty < x < +\infty.$$

Επομένως, από τις δυναμοσειρές $\sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}$ και $\sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$ ορίζονται οι συναρτήσεις $\cos x$ και $\sin x$, αντιστοίχως, στο $(-\infty, +\infty)$ και γι' αυτό ονομάζονται **δυναμοσειρά του συνημιτόνου** και **δυναμοσειρά του ημιτόνου**.³

Παράδειγμα 9.52. Θεωρούμε την $\log \frac{1}{1-x} = -\log(1-x)$ η οποία είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 1)$ με παραγώγους

$$\frac{d^k}{dx^k} \log \frac{1}{1-x} = \frac{(k-1)!}{(1-x)^k}$$

για κάθε $k \geq 1$ και κάθε $x \in (-\infty, 1)$. Ειδικότερα,

$$\frac{d^k}{dx^k} \log \frac{1}{1-x} \Big|_{x=0} = (k-1)!$$

για $k \geq 1$, οπότε η πιθανή σειρά Taylor της $\log \frac{1}{1-x}$ στο 0 είναι η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k-1)!x^k}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$. Το σφάλμα ολοκληρωτικού τύπου είναι

$$R_n(x; 0; \log \frac{1}{1-x}) = \frac{1}{n!} \int_0^x \frac{n!}{(1-t)^{n+1}} (x-t)^n dt = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+1}} dt.$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $t = \frac{x-s}{1-s}$, βρίσκουμε

$$R_n(x; 0; \log \frac{1}{1-x}) = \int_0^x \frac{s^n}{1-s} ds. \quad (9.5)$$

Αν $0 \leq x < 1$, τότε

$$0 \leq \int_0^x \frac{s^n}{1-s} ds \leq \int_0^x \frac{s^n}{1-s} ds = x^n \log \frac{1}{1-x} \rightarrow 0$$

όταν $n \rightarrow +\infty$. Αν $-1 \leq x \leq 0$, τότε, με την αλλαγή μεταβλητής $s = -u$,

$$\left| \int_0^x \frac{s^n}{1-s} ds \right| = \int_0^{-x} \frac{u^n}{1+u} du \leq \int_0^{-x} u^n du = \frac{(-x)^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

όταν $n \rightarrow +\infty$. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x; 0; \log \frac{1}{1-x}) = 0$ για $x \in [-1, 1)$, οπότε η σειρά Taylor της $\log \frac{1}{1-x}$ στο 0 είναι η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} x^k$. Δηλαδή,

$$\log \frac{1}{1-x} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots \quad \text{για } -1 \leq x < 1.$$

Η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$ ονομάζεται **λογαριθμική δυναμοσειρά**.

Έχουμε ήδη δει στο παράδειγμα 9.42 ότι το διάστημα σύγκλισης της $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$ είναι ακριβώς το $[-1, 1)$ και μόλις τώρα αποδείξαμε ότι η συνάρτηση η οποία ορίζεται από τη $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$ στο σύνολο σύγκλισής της είναι η $\log \frac{1}{1-x}$.

Αν αντικαταστήσουμε στην τελευταία ισότητα το x με το $-x$, τότε βρίσκουμε έναν παρόμοιο τύπο:

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad \text{για } -1 < x \leq 1.$$

Ομοίως, αν αντικαταστήσουμε το x με το $1-x$, τότε βρίσκουμε

$$\log x = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{(x-1)^k}{k} = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots \quad \text{για } 0 < x \leq 2.$$

Ειδική περίπτωση αυτών των ισοδύναμων ισοτήτων είναι ο ενδιαφέρων τύπος

$$\log 2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

³Ο τρόπος με τον οποίο ορίσαμε τις συναρτήσεις $\cos x$ και $\sin x$ είναι γεωμετρικός: με τον τριγωνομετρικό κύκλο. Ένας καθαρά αναλυτικός τρόπος είναι μέσω των σειρών Taylor των δύο συναρτήσεων. Δηλαδή, ορίζουμε το $\cos x$ να είναι το άθροισμα της δυναμοσειράς $\sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}$ και το $\sin x$ να είναι το άθροισμα της δυναμοσειράς $\sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$. Τότε οι διάφορες ιδιότητες των συναρτήσεων αυτών προκύπτουν όλες από ιδιότητες αυτών των δύο δυναμοσειρών. Για παράδειγμα, οι ιδιότητες συνέχειας και παραγωγισιμότητας προκύπτουν από την Πρόταση 9.16 την οποία θα δούμε στην επόμενη υποενότητα. Για όλα αυτά μελετήστε την ενότητα 11.17 του κεφαλαίου 11.

Θα δούμε τώρα έναν δεύτερο τρόπο υπολογισμού της σειράς Taylor της $\log \frac{1}{1-x}$ στο 0 χωρίς να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 9.15. Αυτός ο τρόπος θα εφαρμοστεί στο επόμενο παράδειγμα, όπου θα είναι δύσκολη η εφαρμογή της Πρότασης 9.15.

Αρχίζουμε με τον γνωστό τύπο $\frac{1-s^n}{1-s} = 1 + s + \dots + s^{n-1}$ ο οποίος ισχύει για κάθε $s \neq 1$ και τον γράφουμε

$$\frac{1}{1-s} = 1 + s + \dots + s^{n-1} + \frac{s^n}{1-s}.$$

Επομένως,

$$\int_0^x \frac{1}{1-s} ds = \int_0^x ds + \int_0^x s ds + \dots + \int_0^x s^{n-1} ds + \int_0^x \frac{s^n}{1-s} ds$$

για κάθε $x < 1$, οπότε

$$\log \frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + \int_0^x \frac{s^n}{1-s} ds$$

για κάθε $x < 1$. Τώρα παρατηρούμε ότι το $\int_0^x \frac{s^n}{1-s} ds$ εμφανίζεται στην (9.5) και έχουμε ήδη αποδείξει ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{s^n}{1-s} ds = 0$ για κάθε $x \in [-1, 1)$. Άρα

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n}) = \log \frac{1}{1-x},$$

δηλαδή $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = \log \frac{1}{1-x}$ για κάθε $x \in [-1, 1)$.

Παράδειγμα 9.53. Η $\arctan x$ έχει παράγωγο $\frac{1}{x^2+1}$, αλλά ο υπολογισμός των παραγώγων ανώτερης τάξης είναι περίπλοκος και δεν είναι βολική η εφαρμογή της Πρότασης 9.15.⁴ Γι' αυτό καταφεύγουμε σε ένα τέχνασμα παρόμοιο με αυτό το οποίο χρησιμοποιήσαμε στο τέλος του παραδείγματος 9.52. Γράφουμε

$$\frac{1-(-1)^n s^{2n}}{1+s^2} = \frac{1-(-s^2)^n}{1-(-s^2)} = 1 - s^2 + s^4 - \dots + (-1)^{n-1} s^{2n-2},$$

οπότε

$$\frac{1}{1+s^2} = 1 - s^2 + s^4 - \dots + (-1)^{n-1} s^{2n-2} + (-1)^n \frac{s^{2n}}{1+s^2}$$

για κάθε s . Άρα

$$\int_0^x \frac{1}{1+s^2} ds = \int_0^x ds - \int_0^x s^2 ds + \int_0^x s^4 ds - \dots + (-1)^{n-1} \int_0^x s^{2n-2} ds + (-1)^n \int_0^x \frac{s^{2n}}{1+s^2} ds,$$

δηλαδή

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \int_0^x \frac{s^{2n}}{1+s^2} ds.$$

Αν $|x| \leq 1$, τότε

$$\left| (-1)^n \int_0^x \frac{s^{2n}}{1+s^2} ds \right| = \int_0^{|x|} \frac{s^{2n}}{1+s^2} ds \leq \int_0^{|x|} s^{2n} ds = \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1} \leq \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0$$

όταν $n \rightarrow +\infty$. Άρα

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}) = \arctan x$$

για κάθε $x \in [-1, 1]$, οπότε

$$\arctan x = \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{2m-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad \text{για } -1 \leq x \leq 1.$$

Δηλαδή, η σειρά Taylor της $\arctan x$ στο 0 είναι η $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1} x^{2m-1}$.

Από την άλλη μεριά, είναι εύκολο να δούμε, π.χ. με το κριτήριο λόγου, ότι η $\sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{2m-1}$

⁴Ένα απλό τέχνασμα είναι να γράψουμε $\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{(x-i)(x+i)} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right)$ και να υπολογίσουμε τις παραγώγους ως εξής: $\frac{d^{k+1} \arctan x}{dx^{k+1}} = \frac{d^k}{dx^k} \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2i} \left(\frac{(-1)^k}{(x-i)^{k+1}} - \frac{(-1)^k}{(x+i)^{k+1}} \right)$. Άρα $\frac{d^{k+1} \arctan x}{dx^{k+1}} \Big|_{x=0} = \frac{1}{2i} \left(-\frac{1}{i^{k+1}} + \frac{(-1)^{k+1}}{i^{k+1}} \right) = \frac{(-1)^{k+1}-1}{2i^{k+2}}$ το οποίο είναι $= (-1)^m$, αν $k = 2m$, και $= 0$, αν $k = 2m-1$. Έτσι βρίσκουμε τους συντελεστές της σειράς Taylor, αλλά πρέπει πρώτα να αιτιολογήσουμε τις προηγούμενες παραγωγίσεις των μιγαδικών συναρτήσεων.

συγκλίνει, αν και μόνο αν $x \in [-1, 1]$. Δηλαδή, το διάστημα σύγκλισης της $\sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{2m-1}$ είναι ακριβώς το $[-1, 1]$ και μόλις τώρα αποδείξαμε ότι η συνάρτηση η οποία ορίζεται από αυτήν τη δυναμοσειρά στο $[-1, 1]$ είναι η $\arctan x$. Η συγκεκριμένη δυναμοσειρά ονομάζεται **δυναμοσειρά της τόξο εφαπτομένης**.

Ειδική περίπτωση, για $x = 1$, είναι η ενδιαφέρουσα ισότητα

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{m-1} \frac{1}{2m-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

Ασκήσεις

9.48. Αναπτύξτε το πολυώνυμο $1 + 2x - x^2 - 4x^3 + x^4 + 13x^5 - 2x^6 + 5x^7$ σε δυνάμεις του $x - 1$ με δύο τρόπους: με τον αλγεβρικό τρόπο καθώς και με τη σειρά Taylor στο παράδειγμα 9.49. Ποιος από τους δύο τρόπους απαιτεί λιγότερες πράξεις;

9.49. Χρησιμοποιώντας κάποια γνωστή σειρά Taylor, βρείτε τις σειρές Taylor στο 0 των $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ και $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ οι οποίες συμβολίζονται $\cosh x$ και $\sinh x$ στην άσκηση 5.44.

9.50. Βρείτε τους αρχικούς όρους των σειρών Taylor στο 0 των $\tan x$, $\frac{1}{\cos x}$, $\arcsin x$, $\arccos x$.

9.51. Γνωρίζουμε από την άσκηση 6.124 ότι η $h(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{αν } x > 0, \\ 0, & \text{αν } x \leq 0, \end{cases}$ είναι άπειρες φορές παρα-

γωγίσιμη στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$ και ότι ισχύει $h^{(k)}(0) = 0$ για κάθε $k \geq 0$. Είναι η $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} x^k$ η σειρά Taylor της h στο 0;

9.5.3 Από δυναμοσειρά σε συνάρτηση

Η απάντηση στο δεύτερο ερώτημα της προπροηγούμενης υποενότητας, δηλαδή το να βρούμε συνοπτικό τύπο για τη συνάρτηση η οποία ορίζεται από μια δυναμοσειρά στο διάστημα σύγκλισής της, εξαρτάται κάθε φορά από τη συγκεκριμένη δυναμοσειρά και μπορεί να δοθεί για πολύ λίγες δυναμοσειρές. Ο πιο άμεσος τρόπος είναι να βρούμε συνοπτικό τύπο για κάθε μερικό άθροισμα $\sum_{k=0}^n a_k(x - \xi)^k$ και μετά να βρούμε το όριο των μερικών αθροισμάτων όταν $n \rightarrow +\infty$. Στο παράδειγμα με τη γεωμετρική δυναμοσειρά τυχαίνει να γνωρίζουμε τον τύπο $1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$ για το n -οστό μερικό άθροισμά της, οπότε, παίρνοντας όριο, βρίσκουμε $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, αν $-1 < x < 1$. Αυτό, όμως, είναι ανέφικτο για τις περισσότερες δυναμοσειρές, όπως, για παράδειγμα, για τη σημαντική εκθετική σειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ για τα μερικά αθροίσματα $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ της οποίας δεν έχουμε συνοπτικό τύπο.

Η Πρόταση 9.16 δίνει σημαντικές πληροφορίες για τη συνάρτηση η οποία ορίζεται από μια δυναμοσειρά οι οποίες, μάλιστα, αυτές πληροφορίες επιτρέπουν σε κάποιες περιπτώσεις να βρούμε συνοπτικό τύπο γι' αυτήν.

Πρόταση 9.16. Έστω ότι η δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x - \xi)^k$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R > 0$. Γνωρίζουμε ότι, αν $0 < R < +\infty$, τότε το διάστημα σύγκλισης I είναι ένα από τα $(\xi - R, \xi + R)$, $(\xi - R, \xi + R]$, $[\xi - R, \xi + R)$, $[\xi - R, \xi + R]$, και, αν $R = +\infty$, τότε το διάστημα σύγκλισης I είναι το $(-\infty, +\infty)$. Τώρα, έστω f η συνάρτηση η οποία ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο διάστημα σύγκλισης I . Τότε:

(i) η f είναι συνεχής στο I .

(ii) η f είναι παραγωγίσιμη στο $(\xi - R, \xi + R)$ και ισχύει

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k(x - \xi)^{k-1}$$

για κάθε $x \in (\xi - R, \xi + R)$.

Απόδειξη. (i) Κατ' αρχάς, θα αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο $(\xi - R, \xi + R)$. Θεωρούμε $x \in (\xi - R, \xi + R)$, δηλαδή $|x - \xi| < R$. Κατόπιν επιλέγουμε r, R_1 ώστε $|x - \xi| < r < R_1 < R$ και ονομάζουμε x_1 ένα από τα $\xi \pm R_1$. Τότε $x_1 \in (\xi - R, \xi + R)$, οπότε η σειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x_1 - \xi)^k$ συγκλίνει. Συνεπώς $a_k(x_1 - \xi)^k \rightarrow 0$, οπότε η ακολουθία $(a_k(x_1 - \xi)^k)$ είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M \geq 0$ ώστε να ισχύει

$$|a_k|R_1^k = |a_k||x_1 - \xi|^k = |a_k(x_1 - \xi)^k| \leq M \quad \text{για κάθε } k. \quad (9.6)$$

Τώρα θεωρούμε οποιοδήποτε y ώστε $|y - \xi| < r$. Παρατηρούμε ότι τα x, y ανήκουν στο διάστημα $(\xi - r, \xi + r)$ το οποίο περιέχεται στο διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς μας. Τότε

$$f(y) - f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(y - \xi)^k - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x - \xi)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k((y - \xi)^k - (x - \xi)^k). \quad (9.7)$$

Τώρα χρησιμοποιούμε τον αλγεβρικό τύπο

$$b^k - a^k = (b - a)(b^{k-1} + b^{k-2}a + \dots + ba^{k-2} + a^{k-1})$$

με $b = y - \xi$ και $a = x - \xi$. Είναι $b - a = y - x$, $|b| < r$, $|a| < r$, οπότε

$$\begin{aligned} |b^k - a^k| &\leq |b - a|(|b|^{k-1} + |b|^{k-2}|a| + \dots + |b||a|^{k-2} + |a|^{k-1}) \\ &\leq |y - x|(r^{k-1} + r^{k-2}r + \dots + rr^{k-2} + r^{k-1}) = |y - x|kr^{k-1}. \end{aligned}$$

Τώρα, βάσει της τελευταίας σχέσης, οι (9.6) και (9.7) συνεπάγονται

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| |(y - \xi)^k - (x - \xi)^k| \leq |y - x| \sum_{k=1}^{+\infty} k|a_k|r^{k-1} \\ &\leq \frac{M}{R_1} |y - x| \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{r}{R_1}\right)^{k-1}. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Επειδή $0 < \frac{r}{R_1} < 1$, εύκολα βλέπουμε, π.χ. με το κριτήριο λόγου, ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{r}{R_1}\right)^{k-1}$ συγκλίνει. Το άθροισμα αυτής της σειράς και ο παράγον $\frac{M}{R_1}$ στην (9.8) δεν εξαρτώνται από το y στο διάστημα $(\xi - r, \xi + r)$. Επομένως, η (9.8) δίνει

$$\lim_{y \rightarrow x} f(y) = f(x),$$

οπότε η f είναι συνεχής στο x .

Κατόπιν, υποθέτουμε ότι το $\xi + R$ περιέχεται στο σύνολο σύγκλισης I και θα δούμε ότι η f είναι συνεχής στο $\xi + R$.

Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή η σειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x - \xi)^k$ συγκλίνει για $x = \xi + R$, έχουμε ότι

$$f(\xi + R) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k R^k.$$

Βάσει της πρότασης 9.2, αν θέσουμε $t_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k R^k$, συνεπώς $t_n \rightarrow 0$. Δηλαδή, υπάρχει N ώστε να ισχύει $|t_n| \leq \frac{\epsilon}{4}$ για κάθε $n \geq N$.

Τώρα θεωρούμε οποιοδήποτε $x \in [\xi, \xi + R)$ και θέτουμε $r = x - \xi$, οπότε $0 \leq r < R$.

Κατόπιν, εφαρμόζουμε το Λήμμα 9.2 και για κάθε $n \geq N$ βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{k=N}^n a_k r^n &= \sum_{k=N}^n a_k R^k \left(\frac{r}{R}\right)^k = \sum_{k=N}^n (t_k - t_{k+1}) \left(\frac{r}{R}\right)^k \\ &= \sum_{k=N}^n t_k \left(\left(\frac{r}{R}\right)^k - \left(\frac{r}{R}\right)^{k-1}\right) + t_N \left(\frac{r}{R}\right)^{N-1} - t_{n+1} \left(\frac{r}{R}\right)^n. \end{aligned}$$

Παίρνοντας όριο όταν $n \rightarrow +\infty$, έχουμε ότι

$$\sum_{k=N}^{+\infty} a_k r^n = \sum_{k=N}^{+\infty} t_k \left(\left(\frac{r}{R}\right)^k - \left(\frac{r}{R}\right)^{k-1}\right) + t_N \left(\frac{r}{R}\right)^{N-1}.$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=N}^{+\infty} a_k r^n \right| &\leq \sum_{k=N}^{+\infty} |t_k| \left| \left(\frac{r}{R}\right)^k - \left(\frac{r}{R}\right)^{k-1} \right| + |t_N| \left(\frac{r}{R}\right)^{N-1} = \sum_{k=N}^{+\infty} |t_k| \left(\left(\frac{r}{R}\right)^{k-1} - \left(\frac{r}{R}\right)^k \right) + |t_N| \left(\frac{r}{R}\right)^{N-1} \\ &\leq \frac{\epsilon}{4} \sum_{k=N}^{+\infty} \left(\left(\frac{r}{R}\right)^{k-1} - \left(\frac{r}{R}\right)^k \right) + \frac{\epsilon}{4} \left(\frac{r}{R}\right)^{N-1} = \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^{N-1} \leq \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Με άλλα λόγια, έχουμε ότι

$$\left| \sum_{k=N}^{+\infty} a_k(x - \xi)^k \right| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \text{για κάθε } x \in [\xi, \xi + R]. \quad (9.9)$$

Τώρα θεωρούμε την πολυωνμική, και άρα συνεχή, συνάρτηση $p(x) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k(x - \xi)^k$. Τότε υπάρχει δ με $0 < \delta < R$ ώστε να ισχύει

$$\left| \sum_{k=0}^{N-1} a_k(x - \xi)^k - \sum_{k=0}^{N-1} a_k R^k \right| = |p(x) - p(\xi + R)| \leq \frac{\epsilon}{4} \quad \text{για κάθε } x \in (\xi + R - \delta, \xi + R]. \quad (9.10)$$

Τέλος, συνδυάζουμε τις (9.9) και (9.10) και βρίσκουμε

$$\begin{aligned} |f(x) - f(\xi + R)| &= \left| \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x - \xi)^k - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k R^k \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{N-1} a_k(x - \xi)^k + \sum_{k=N}^{+\infty} a_k(x - \xi)^k - \sum_{k=0}^{N-1} a_k R^k - \sum_{k=N}^{+\infty} a_k R^k \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=0}^{N-1} a_k(x - \xi)^k - \sum_{k=0}^{N-1} a_k R^k \right| + \left| \sum_{k=N}^{+\infty} a_k(x - \xi)^k \right| + \left| \sum_{k=N}^{+\infty} a_k R^k \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=0}^{N-1} a_k(x - \xi)^k - \sum_{k=0}^{N-1} a_k R^k \right| + \left| \sum_{k=N}^{+\infty} a_k(x - \xi)^k \right| + |t_N| \\ &\leq \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon \quad \text{για κάθε } x \in (\xi + R - \delta, \xi + R]. \end{aligned}$$

Άρα (!) η f είναι συνεχής στο $\xi + R$. Με την ίδια διαδικασία αποδεικνύεται ότι, αν το $\xi - R$ περιέχεται στο σύνολο σύγκλισης I , τότε η f είναι συνεχής στο $\xi - R$.

(ii) Κατ' αρχάς θα αποδείξουμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k(x - \xi)^{k-1}$ συγκλίνει για κάθε $x \in (\xi - R, \xi + R)$. Θεωρούμε, λοιπόν, ένα τέτοιο x , δηλαδή με $|x - \xi| < R$, και παίρνουμε r, R_1 ώστε $|x - \xi| < r < R_1 < R$. Επαναλαμβάνουμε την αρχή της απόδειξης του (i) και φτάνουμε στην (9.5). Συνεπώς

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |k a_k(x - \xi)^{k-1}| = \sum_{k=1}^{+\infty} k |a_k| |x - \xi|^{k-1} \leq \frac{M}{R_1} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{|x - \xi|}{R_1} \right)^{k-1}.$$

Επειδή $0 \leq \frac{|x - \xi|}{R_1} < 1$, η τελευταία σειρά συγκλίνει. Επομένως, η $\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k(x - \xi)^{k-1}$ συγκλίνει απολύτως, οπότε συγκλίνει.

Τώρα θεωρούμε πάλι y με $|y - \xi| < r$, μετά χρησιμοποιούμε την (9.7) και βρίσκουμε

$$f(y) - f(x) - (y - x) \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k(x - \xi)^{k-1} = \sum_{k=2}^{+\infty} a_k((y - \xi)^k - (x - \xi)^k - k(y - x)(x - \xi)^{k-1}). \quad (9.11)$$

Ξαναθέτουμε $b = y - \xi$ και $a = x - \xi$, οπότε $b - a = y - x$, $|b| < r$, $|a| < r$, και χρησιμοποιούμε τον αλγεβρικό τύπο (αποδείξτε τον!)

$$b^k - a^k - k(b - a)a^{k-1} = (b - a)^2(b^{k-2} + 2b^{k-3}a + \dots + (k - 2)ba^{k-3} + (k - 1)a^{k-2}).$$

Άρα

$$\begin{aligned} |b^k - a^k - k(b - a)a^{k-1}| &\leq (b - a)^2(|b|^{k-2} + 2|b|^{k-3}|a| + \dots + (k - 2)|b||a|^{k-3} + (k - 1)|a|^{k-2}) \\ &\leq (y - x)^2(r^{k-2} + 2r^{k-2} + \dots + (k - 2)r^{k-2} + (k - 1)r^{k-2}) \\ &\leq (y - x)^2(kr^{k-2} + kr^{k-2} + \dots + kr^{k-2} + kr^{k-2}) = (y - x)^2 k^2 r^{k-2}. \end{aligned}$$

Βάσει της τελευταίας σχέσης οι (9.6) και (9.11) συνεπάγονται

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x) - (y - x) \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k(x - \xi)^{k-1}| &\leq \sum_{k=2}^{+\infty} |a_k| |(y - \xi)^k - (x - \xi)^k - k(y - x)(x - \xi)^{k-1}| \\ &\leq \frac{M}{R_1^2} (y - x)^2 \sum_{k=2}^{+\infty} k^2 \left(\frac{r}{R_1} \right)^{k-2}. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} - \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k(x - \xi)^{k-1} \right| \leq \frac{M}{R_1^2} |y - x| \sum_{k=2}^{+\infty} k^2 \left(\frac{r}{R_1} \right)^{k-2}. \quad (9.12)$$

Επειδή $0 < \frac{r}{R_1} < 1$, η σειρά $\sum_{k=2}^{+\infty} k^2 \left(\frac{r}{R_1}\right)^{k-2}$ συγκλίνει, π.χ. βάσει του κριτηρίου λόγου. Το άθροισμα αυτής της σειράς και ο παράγωγος $\frac{M}{R_1^2}$ στην (9.12) δεν εξαρτώνται από το y στο διάστημα $(\xi - r, \xi + r)$. Επομένως, η (9.12) δίνει

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k (x - \xi)^{k-1},$$

οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x και $f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k (x - \xi)^{k-1}$. $\square$

Η ισότητα στο (ii) της Πρότασης 9.16 μπορεί να γραφτεί

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - \xi)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k (x - \xi)^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d}{dx} (a_k (x - \xi)^k)$$

και εκφράζει την εναλλαγή των συμβόλων $\frac{d}{dx}$ της παραγωγίσιμης και $\sum_{k=0}^{+\infty}$ της άθροισης.

Μπορούμε να συμπληρώσουμε την Πρόταση 9.16 ως εξής. Η $\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k (x - \xi)^{k-1}$ είναι και αυτή δυναμοσειρά και συγκλίνει στο διάστημα $(\xi - R, \xi + R)$, οπότε η συνάρτηση η οποία ορίζεται από αυτήν, δηλαδή η $f'(x)$, είναι παραγωγίσιμη στο $(\xi - R, \xi + R)$ και ισχύει

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) a_k (x - \xi)^{k-2}$$

για κάθε $x \in (\xi - R, \xi + R)$. Προφανώς, αυτή η διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί βρίσκοντας διαδοχικές παραγώγους της f και συμπεραίνουμε ότι:

Η συνάρτηση f η οποία ορίζεται από τη δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - \xi)^k$ με ακτίνα σύγκλισης $R > 0$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $(\xi - R, \xi + R)$ και για κάθε $m \geq 1$ ισχύει

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{+\infty} k(k-1) \cdots (k-m+1) a_k (x - \xi)^{k-m} \quad \text{για κάθε } x \in (\xi - R, \xi + R).$$

Ειδικότερα, με $x = \xi$ βρίσκουμε ότι

$$f^{(m)}(\xi) = m! a_m.$$

Μετά από αυτό το αποτέλεσμα μπορούμε να αποδείξουμε, σαν συμπλήρωμα στην Πρόταση 9.15, ότι η σειρά Taylor μίας συνάρτησης $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ στο διάστημα I με κέντρο το ξ είναι μοναδική, οπότε δικαιολογείται το ότι κάθε φορά λέμε: η, και όχι μια ή κάποια, σειρά Taylor μιας συνάρτησης. Διότι, αν υποθέσουμε ότι η $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - \xi)^k$ είναι οποιαδήποτε σειρά Taylor της f στο I , τότε έχουμε ότι $a_m = \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}$ για κάθε $m \geq 0$, οπότε οι συντελεστές a_m είναι μονοσήμαντα καθορισμένοι από τη συνάρτηση f .

Παράδειγμα 9.54. Έστω, πάλι, η δυναμοσειρά

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots.$$

Γνωρίζουμε από το παράδειγμα 9.42 ότι η δυναμοσειρά έχει ακτίνα σύγκλισης $R = 1$ και διάστημα σύγκλισης το $[-1, 1)$.

Έστω f η συνάρτηση η οποία ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο $[-1, 1)$, δηλαδή

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$$

για κάθε $x \in [-1, 1)$. Βάσει της Πρότασης 9.16 η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ και ισχύει

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k x^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) + \log(1 - x)$ και τότε ισχύει

$$h'(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x} = 0$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$, οπότε η h είναι σταθερή στο $(-1, 1)$. Άρα ισχύει

$$f(x) + \log(1-x) = h(x) = h(0) = f(0) = 0,$$

οπότε $f(x) = -\log(1-x) = \log \frac{1}{1-x}$ για κάθε $x \in (-1, 1)$. Πάλι βάσει της Πρότασης 9.16, η συνάρτηση f η οποία ορίζεται από τη δυναμοσειρά είναι συνεχής στο $[-1, 1)$. Το ίδιο, όμως, ισχύει και για την $\log \frac{1}{1-x}$, οπότε, επειδή οι δύο συναρτήσεις ταυτίζονται στο διάστημα $(-1, 1)$, συνεπάγεται ότι ταυτίζονται στο $[-1, 1)$. Άρα

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = \log \frac{1}{1-x} \quad \text{για } -1 \leq x < 1.$$

Προηγουμένως αποδείξαμε τον ίδιο τύπο βασισμένοι στην Πρόταση 9.15. Τώρα τον αποδείξαμε βασισμένοι στην Πρόταση 9.16.

Παράδειγμα 9.55. Έστω, πάλι, η δυναμοσειρά

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Έχουμε ήδη βρει στο παράδειγμα 9.44 ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = +\infty$, οπότε το διάστημα σύγκλισής της είναι το $(-\infty, +\infty)$.

Τώρα, έστω f η συνάρτηση η οποία ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο $(-\infty, +\infty)$. Δηλαδή, έστω ότι ισχύει

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

για κάθε x . Βάσει της Πρότασης 9.16 η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, +\infty)$ και ισχύει

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = f(x)$$

για κάθε x . Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = e^{-x}f(x)$ και τότε ισχύει

$$h'(x) = -e^{-x}f(x) + e^{-x}f'(x) = 0$$

για κάθε x , οπότε η h είναι σταθερή στο $(-\infty, +\infty)$. Άρα ισχύει

$$e^{-x}f(x) = h(x) = h(0) = f(0) = 1,$$

οπότε $f(x) = e^x$ για κάθε x . Άρα

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \quad \text{για } -\infty < x < +\infty.$$

Προηγουμένως αποδείξαμε τον ίδιο τύπο βασισμένοι στην Πρόταση 9.15. Τώρα τον αποδείξαμε βασισμένοι στην Πρόταση 9.16.

Παράδειγμα 9.56. Θεωρούμε, πάλι, τις δυναμοσειρές

$$\sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots, \quad \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο λόγου, μπορούμε να δούμε ότι και οι δύο δυναμοσειρές έχουν ακτίνα σύγκλισης το $R = +\infty$. Π.χ. για την πρώτη δυναμοσειρά έχουμε ότι, προφανώς, συγκλίνει όταν $x = 0$ και, όταν $x \neq 0$, τότε είναι

$$\left| \frac{(-1)^{m+1} \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}}{(-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}} \right| = x^2 \frac{(2m)!}{(2m+2)!} = \frac{x^2}{(2m+1)(2m+2)} \rightarrow 0 < 1,$$

οπότε η σειρά συγκλίνει. Δηλαδή, η σειρά συγκλίνει για κάθε x , οπότε έχει διάστημα σύγκλισης το $(-\infty, +\infty)$. Το ίδιο ισχύει και για τη δεύτερη δυναμοσειρά.

Ονομάζουμε, αντιστοίχως, $f(x)$ και $g(x)$ τις συναρτήσεις οι οποίες ορίζονται από τις δυναμοσειρές στο διάστημα σύγκλισής τους $(-\infty, +\infty)$. Δηλαδή,

$$f(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}, \quad g(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$$

για κάθε x . Βάσει της Πρότασης 9.16 οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο $(-\infty, +\infty)$ και ισχύει

$$f'(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^m \frac{2mx^{2m-1}}{(2m)!} = \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^m \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} = - \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} = -g(x)$$

$$g'(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{m-1} \frac{(2m-1)x^{2m-2}}{(2m-1)!} = \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!} = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} = f(x)$$

για κάθε x . Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = (f(x) - \cos x)^2 + (g(x) - \sin x)^2$ και έχουμε ότι

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2(f(x) - \cos x)(f'(x) + \sin x) + 2(g(x) - \sin x)(g'(x) - \cos x) \\ &= 2(f(x) - \cos x)(-g(x) + \sin x) + 2(g(x) - \sin x)(f(x) - \cos x) = 0 \end{aligned}$$

για κάθε x . Άρα η h είναι σταθερή στο $(-\infty, +\infty)$, οπότε

$$(f(x) - \cos x)^2 + (g(x) - \sin x)^2 = h(x) = h(0) = (f(0) - 1)^2 + g(0)^2 = 0$$

για κάθε x . Συνεπάγεται ότι $f(x) = \cos x$ και $g(x) = \sin x$ για κάθε x , δηλαδή

$$\sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} = \cos x, \quad \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} = \sin x \quad \text{για } -\infty < x < +\infty.$$

Προηγουμένως αποδείξαμε τους ίδιους τύπους βασισμένοι στην Πρόταση 9.15. Τώρα τους αποδείξαμε βασισμένοι στην Πρόταση 9.16.

Μελετήστε την άσκηση 9.57 για τον παρόμοιο χειρισμό, βάσει της Πρότασης 9.16, της δυναμοσειράς της τόξο εφαπτομένης. Αυτήν την είδαμε και στο παράδειγμα 9.53 με βάση την Πρόταση 9.15.

Παράδειγμα 9.57. Έστω η δυναμοσειρά

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \dots,$$

όπου οι αριθμοί $\binom{\alpha}{k}$ ορίζονται με τους τύπους

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \quad \text{για } k \in \mathbb{N}.$$

Είναι φανερό ότι το σύμβολο $\binom{\alpha}{k}$ είναι επέκταση του γνωστού συμβόλου $\binom{n}{k}$ το οποίο είχε οριστεί για $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$, με $0 \leq k \leq n$, και ονομάζεται και αυτό **διωνυμικός συντελεστής**. Παρατηρήστε ότι αν $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha \geq 0$, τότε $\binom{\alpha}{k} = 0$ για κάθε $k \geq \alpha + 1$, οπότε οι όροι της δυναμοσειράς μηδενίζονται από τον δείκτη $k = \alpha + 1$ και πέρα. Δηλαδή, αν $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha \geq 0$, τότε η δυναμοσειρά είναι ένα πεπερασμένο άθροισμα και γράφεται

$$\binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \dots + \binom{\alpha}{\alpha-1} x^{\alpha-1} + \binom{\alpha}{\alpha} x^{\alpha} = (1+x)^{\alpha}$$

για κάθε x βάσει του διωνυμικού τύπου του Newton στο παράδειγμα 1.22. Επομένως, αν $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha \geq 0$, τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε x και το διάστημα σύγκλισής της είναι το $(-\infty, +\infty)$. Αν $\alpha \geq 0$, $\alpha \notin \mathbb{Z}$ ή αν $\alpha < 0$, τότε

$$\left| \frac{\binom{\alpha}{k+1}}{\binom{\alpha}{k}} \right| = \left| \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(\alpha-k)k!}{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(k+1)!} \right| = \left| \frac{\alpha-k}{k+1} \right| \rightarrow 1.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι ίση με 1 και το διάστημα σύγκλισής της είναι ένα από τα: $(-1, 1)$, $(-1, 1]$, $[-1, 1)$, $[-1, 1]$.

Τώρα πρέπει να εξεταστεί αν η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x = 1$ ή $x = -1$.

Κατ' αρχάς, ας δούμε τί γίνεται στα $x = \pm 1$ όταν $\alpha \leq -1$. Θέτουμε $\beta = -\alpha$, οπότε $\beta \geq 1$, και τότε η απόλυτη τιμή του k -οστού όρου της σειράς γράφεται

$$\left| \binom{\alpha}{k} (\pm 1)^k \right| = \left| \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \right| = \frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+k-1)}{k!} \geq \frac{1(1+1)\cdots(1+k-1)}{k!} = 1.$$

Άρα ο k -οστός όρος της σειράς δεν τείνει στο 0, οπότε η δυναμοσειρά αποκλίνει.

Τώρα, έστω $-1 < \alpha < 0$ και $x = -1$. Πάλι θέτουμε $\beta = -\alpha$, οπότε $0 < \beta < 1$. Τότε ο k -οστός όρος της σειράς γράφεται

$$\binom{\alpha}{k} (-1)^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} (-1)^k = \frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+k-1)}{k!} > \frac{\beta(0+1)\cdots(0+k-1)}{k!} = \frac{\beta \cdot 1 \cdots (k-1)}{k!} = \frac{\beta}{k}$$

για $k \geq 1$. Επειδή η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\beta}{k} = \beta \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει, η $\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} (-1)^k$ και αυτή αποκλίνει.

Κατόπιν, έστω $-1 < \alpha < 0$ και $x = 1$. Πάλι θέτουμε $\beta = -\alpha$, οπότε $0 < \beta < 1$. Τότε ο k -οστός όρος της σειράς γράφεται

$$\binom{\alpha}{k} 1^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+k-1)}{k!} = (-1)^k \left(1 - \frac{1-\beta}{1}\right) \left(1 - \frac{1-\beta}{2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1-\beta}{k}\right)$$

για $k \geq 1$. Έτσι προκύπτει μια σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k x_k$ με εναλλασσόμενα πρόσημα, όπου

$$x_k = \left(1 - \frac{1-\beta}{1}\right) \left(1 - \frac{1-\beta}{2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1-\beta}{k}\right).$$

Είναι προφανές ότι ισχύει $x_k > 0$ για κάθε $k \geq 1$. Επίσης, η (x_k) είναι φθίνουσα, αφού

$$x_{k+1} = x_k \left(1 - \frac{1-\beta}{k+1}\right) < x_k.$$

Ακόμη, χρησιμοποιώντας την ανισότητα $1 + x \leq e^x$, καθώς και το Λήμμα 9.1, έχουμε ότι

$$0 < x_k \leq e^{-(1-\beta)(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k})} \leq e^{-(1-\beta) \int_1^{k+1} \frac{1}{t} dt} = e^{-(1-\beta) \log(k+1)} = \frac{1}{(k+1)^{1-\beta}}.$$

Άρα $x_k \rightarrow 0$, οπότε η σειρά συγκλίνει.

Τέλος, έστω $\alpha \geq 0$, $\alpha \notin \mathbb{Z}$ και $x = \pm 1$. Τότε υπάρχει ακέραιος $m \geq 0$ ώστε $m < \alpha < m+1$ και τότε, όταν $k \geq m+2$, η απόλυτη τιμή του k -οστού όρου της σειράς γράφεται

$$\left| \binom{\alpha}{k} (\pm 1)^k \right| = \left| \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-m)(\alpha-m-1)\cdots(\alpha-k+1)}{(m+1)!(m+2)\cdots k} \right| = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-m)}{(m+1)!} \frac{(m+1-\alpha)\cdots(k-1-\alpha)}{(m+2)\cdots k} = c \left(1 - \frac{1+\alpha}{m+2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1+\alpha}{k}\right),$$

όπου $c = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-m)}{(m+1)!}$. Χρησιμοποιώντας, πάλι, την ανισότητα $1 + x \leq e^x$ καθώς και το Λήμμα 9.1, έχουμε ότι

$$\left(1 - \frac{1+\alpha}{m+2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1+\alpha}{k}\right) \leq e^{-(1+\alpha)(\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{k})} \leq e^{-(1+\alpha) \int_{m+2}^{k+1} \frac{1}{t} dt} = e^{-(1+\alpha) \log \frac{k+1}{m+2}} = \frac{(m+2)^{1+\alpha}}{(k+1)^{1+\alpha}}.$$

Επειδή $1 + \alpha > 1$, η σειρά $\sum_{k=m+2}^{+\infty} \frac{(m+2)^{1+\alpha}}{(k+1)^{1+\alpha}} = (m+2)^{1+\alpha} \sum_{k=m+3}^{+\infty} \frac{1}{k^{1+\alpha}}$ συγκλίνει, οπότε η σειρά $\sum_{k=m+2}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} (\pm 1)^k$ συγκλίνει απολύτως, οπότε η $\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} (\pm 1)^k$ συγκλίνει και αυτή απολύτως.

Συνοψίζουμε τα συμπεράσματά μας:

- (i) Αν $\alpha \leq -1$, τότε το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-1, 1)$,
- (ii) αν $-1 < \alpha < 0$, τότε το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-1, 1]$, και
- (iii) αν $\alpha \geq 0$ και $\alpha \notin \mathbb{Z}$, τότε το διάστημα σύγκλισης είναι το $[-1, 1]$.

Τώρα, έστω f η συνάρτηση η οποία ορίζεται από τη δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ στο διάστημα σύγκλισης της. Δηλαδή, έστω ότι ισχύει

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$ και πιθανόν και σε κάποιο από τα ± 1 , ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου α . Βάσει της Πρότασης 9.16 ισχύει

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \binom{\alpha}{k} x^{k-1} = \alpha \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha-1}{k} x^k$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$. Με λίγες πράξεις (δοκιμάστε) βρίσκουμε ότι

$$(1+x)f'(x) = \alpha f(x)$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$. Ορίζουμε τη συνάρτηση h με τύπο $h(x) = (1+x)^{-\alpha} f(x)$ για $x \in (-1, 1)$ και έχουμε ότι ισχύει

$$h'(x) = -\alpha(1+x)^{-\alpha-1} f(x) + (1+x)^{-\alpha} f'(x) = 0$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$. Άρα η h είναι σταθερή στο $(-1, 1)$, οπότε ισχύει

$$(1+x)^{-\alpha} f(x) = h(x) = h(0) = (1+0)^{-\alpha} f(0) = 1$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$. Άρα ισχύει $f(x) = (1+x)^\alpha$ για κάθε $x \in (-1, 1)$.

Αν $-1 < \alpha < 0$, τότε το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το $(-1, 1]$. Σύμφωνα με την Πρόταση 9.16, η συνάρτηση f η οποία ορίζεται από τη δυναμοσειρά είναι συνεχής στο $(-1, 1]$. Το ίδιο, όμως, ισχύει και για την $(1+x)^\alpha$, οπότε, επειδή οι δύο συναρτήσεις ταυτίζονται στο διάστημα $(-1, 1)$, συνεπάγεται ότι ταυτίζονται στο $(-1, 1]$. Ομοίως, αν $\alpha \geq 0$ και $\alpha \notin \mathbb{Z}$, τότε το διάστημα σύγκλισης είναι το $[-1, 1)$ οπότε η f είναι συνεχής στο $[-1, 1)$. Το ίδιο ισχύει και για την $(1+x)^\alpha$, οπότε, επειδή οι δύο συναρτήσεις ταυτίζονται στο διάστημα $(-1, 1)$, συνεπάγεται ότι ταυτίζονται στο $[-1, 1)$. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι ισχύει

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad \begin{cases} \text{για } -1 < x < 1, & \text{αν } \alpha \leq -1, \\ \text{για } -1 < x \leq 1, & \text{αν } -1 < \alpha < 0, \\ \text{για } -1 \leq x < 1, & \text{αν } \alpha \geq 0 \text{ και } \alpha \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Η τελευταία σχέση ονομάζεται **γενικός διωνυμικός τύπος** του Newton και η $\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ ονομάζεται **διωνυμική σειρά**.

Ξεχωρίζουμε τις ειδικές περιπτώσεις με $\alpha = \frac{1}{2}$ και $\alpha = -\frac{1}{2}$:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2k)} \frac{x^k}{2k-1} \quad \text{για } -1 \leq x \leq 1,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2k)} x^k \quad \text{για } -1 < x \leq 1.$$

Μάλιστα, με $x = 1$ παίρνουμε την ενδιαφέρουσα ισότητα

$$\sqrt{2} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2k)} \frac{1}{2k-1} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{1}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \frac{1}{7} + \cdots$$

Ασκήσεις

9.52. Βρείτε συνοπτικούς τύπους για τις δυναμοσειρές $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^k$, $\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 x^k$, $\sum_{k=1}^{+\infty} k^3 x^k$ στα διαστήματα σύγκλισής τους.

Υπόδειξη: Βρείτε πρώτα συνοπτικούς τύπους για τα μερικά αθροίσματά τους παραγωγίζοντας την $1 + x + \cdots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$. Αλλιώς, εφαρμόστε την Πρόταση 9.16 στην $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$.

9.53. Χρησιμοποιήστε γνωστές σειρές Taylor για να βρείτε συνοπτικούς τύπους για τις δυναμοσειρές $\sum_{k=1}^{+\infty} (1-2^k)x^k$, $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{x^{2m-1}}{2m-1}$, $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{2m}$, $\sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{m!}$, $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(k-1)x^k}{k!}$, $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$, $\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!}$, $\sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^{m-1} \frac{2^{2m} x^{2m}}{(2m)!}$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\log^k a)x^k}{k!}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3k-2)x^k}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots (3k)}$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k)! x^k}{2^k (k!)^2}$.

9.54. Χρησιμοποιώντας γνωστές σειρές Taylor, βρείτε τις σειρές Taylor στο 0 των $\sin(x^3)$, $\sin^3 x$, $\sin x \sin(3x)$, $\sin^6 x + \cos^6 x$, $\log \frac{1+x}{1-x}$, $\log(1+x+x^2)$, $\frac{1}{1-5x+6x^2}$, $\frac{e^x}{1-x}$, $x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2)$, $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$.

9.55. Χρησιμοποιώντας τον γενικό διωνυμικό τύπο του Newton με $a = -\frac{1}{2}$ και x^2 στη θέση του x , αποδείξτε ότι ισχύει

$$\log(x + \sqrt{1+x^2}) = \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{m-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1) x^{2m-1}}{2^{m-1} (m-1)! (2m-1)^2} \quad \text{για } -1 \leq x \leq 1.$$

Αυτή είναι η συνάρτηση $\operatorname{arcsinh} x$ της άσκησης 5.44.

9.56. Θεωρήστε τη δυναμοσειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)}$. Βρείτε το διάστημα σύγκλισής της και έναν συνοπτικό τύπο για τη συνάρτηση η οποία ορίζεται από αυτήν, αφού πρώτα βρείτε βάσει της Πρότασης 9.16 έναν συνοπτικό τύπο για τη δεύτερη παράγωγό της στο εσωτερικό του διαστήματος σύγκλισης. Υπάρχει, όμως, και δεύτερος πολύ πιο εύκολος τρόπος να βρείτε τον ίδιο συνοπτικό τύπο.

9.57. Ξεκινήστε με τη δυναμοσειρά $\sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{2m-1}$ και αποδείξτε ότι ορίζει τη συνάρτηση $\arctan x$ χρησιμοποιώντας την Πρόταση 9.16 ως εξής. Ονομάστε $f(x)$ τη συνεχή συνάρτηση η οποία ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο διάστημα σύγκλισής της $[-1, 1]$ και αποδείξτε, χρησιμοποιώντας και τη γεωμετρική σειρά, ότι ισχύει $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ για κάθε $x \in (-1, 1)$.

9.58. Έστω $R > 0$ και έστω ότι ισχύει $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ για $x \in (-R, R)$.

- (i) Αποδείξτε ότι η f είναι άρτια στο $(-R, R)$, αν και μόνο αν ισχύει $a_k = 0$ για κάθε περιττό k .
- (ii) Αποδείξτε ότι η f είναι περιττή στο $(-R, R)$, αν και μόνο αν ισχύει $a_k = 0$ για κάθε άρτιο k .

9.6 Βιβλιογραφία

Βασική βιβλιογραφία

- Anton, H. (1984). *Calculus with Analytic Geometry*. Wiley.
- Apostol, T. (1967). *Calculus, Vol I*. Wiley.
- Courant, R. (1988). *Differential and Integral Calculus, Vol I*. Wiley.
- Courant, R., John, F. (1989). *Introduction to Calculus and Analysis, Vol I*. Springer.
- Ghoshpade, S., Limaye, B. (2006). *A Course in Calculus and Real Analysis*. Springer.
- Goldberg, R. (1976). *Methods of Real Analysis*. Wiley.
- Goursat, E. (2006). *A Course in Mathematical Analysis, Vol I*. Dover.
- Hardy, G. (2008). *A Course of Pure Mathematics*. Cambridge Univ. Press.
- Krantz, S. (2013). *Real Analysis and Foundations*. Chapman and Hall.
- Landau, E. (2001). *Differential and Integral Calculus*. American Math. Society & Chelsea.
- Nikolsky, S. (1977). *A Course of Mathematical Analysis, Vol I*. Mir Publishers.
- Smirnov, V. I. (1964). *A Course of Higher Mathematics, Vol I*. Pergamon Press.
- Spiegel, M. (1963). *Schaum's Outline of Advanced Calculus*. McGraw Hill.
- Spivak, M. (1994). *Calculus*. Cambridge Univ. Press.
- Thomas, G. (2018). *Calculus*. Pearson.
- Toeplitz, O. (2007). *The Calculus, A Genetic Approach*. The University of Chicago Press.

Προχωρημένη ή εξειδικευμένη βιβλιογραφία

- Beckenbach, E., Bellman, R. (1961). *Inequalities*. Springer.
- Bromwich, T. (1991). *An Introduction to the Theory of Infinite Series*. American Math. Society & Chelsea.
- Hardy, G., Littlewood, J., Polya, G. (1952). *Inequalities*. Cambridge Univ. Press.
- Knopp, K. (1990). *Theory and Application of Infinite Series*. Dover.
- Knopp, K. (1956). *Infinite Sequences and Series*. Dover.

- Mitrinović, D. (1964). *Elementary Inequalities*. Noordhoff.
- Mitrinović, D., Pečarić, J., Fink, A. (1993). *Classical and New Inequalities in Analysis*. Springer.
- Osgood, W. (1897). *Introduction to Infinite Series*. Harvard University.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

ΚΑΠΟΙΕΣ ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

10.1 Σύνοψη

Το κεφάλαιο αυτό αρχίζει με την έννοια της διαφορικής εξίσωσης (δ.ε.), την έννοια της λύσης μιας δ.ε. και την έννοια της τάξης μιας δ.ε. Αναφέρουμε τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και αποδεικνύουμε ότι οι λύσεις μιας ομογενούς γραμμικής δ.ε. αποτελούν γραμμικό χώρο συναρτήσεων ενώ οι λύσεις μιας (όχι αναγκαστικά ομογενούς) γραμμικής δ.ε. αποτελούν γραμμική πολλαπλότητα συναρτήσεων. Κατόπιν, μελετάμε, δίνοντας πολλά παραδείγματα, κάποιες κατηγορίες δ.ε. πρώτης τάξης: με χωριζόμενες μεταβλητές, ομογενείς βαθμού 0, γραμμικές. Μετά περνάμε στις γραμμικές δ.ε. δεύτερης τάξης και αναφέρουμε (χωρίς απόδειξη) το ότι κάθε τέτοια δ.ε. έχει μοναδική λύση με δεδομένες αρχικές τιμές. Ορίζουμε την ορίζουσα Wronski μιας γραμμικής δ.ε. δεύτερης τάξης και αναφέρουμε τον ρόλο της στον έλεγχο της γραμμικής ανεξαρτησίας δύο λύσεων της δ.ε. αλλά και στον τύπο της γενικής λύσης της δ.ε. μέσω της μεθόδου των μεταβλητών παραμέτρων. Τέλος, εξετάζουμε την ειδική περίπτωση γραμμικής δ.ε. δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές.

Προαπαιτούμενη γνώση: Τα προηγούμενα κεφάλαια.

10.2 Ορισμοί

Παράδειγμα 10.1. Θεωρούμε την εξίσωση

$$y' + 2xy = 0$$

στη δεξιά μεριά της οποίας εμφανίζεται μια συνάρτηση $F(x, y, y') = y' + 2xy$ τριών μεταβλητών. Θα πούμε ότι η εξίσωση αυτή είναι *διαφορική εξίσωση*, αν ψάχνουμε να βρούμε συνάρτηση $y(x)$ παραγωγίσιμη σε διάστημα I η οποία ικανοποιεί την εξίσωση με την εξής έννοια: αντικαθιστώντας τα y, y' με τα $y(x), y'(x)$ προκύπτει η ισότητα

$$y'(x) + 2xy(x) = 0 \quad \text{για κάθε } x \in I.$$

Για κάθε τέτοια συνάρτηση $y(x)$ θα λέμε ότι είναι *λύση* της διαφορικής εξίσωσης στο διάστημα I . Βλέπουμε ότι η $y(x) = e^{-x^2}$ είναι λύση της συγκεκριμένης διαφορικής εξίσωσης στο $(-\infty, +\infty)$, διότι ισχύει

$$y'(x) + 2xy(x) = -2xe^{-x^2} + 2xe^{-x^2} = 0 \quad \text{για κάθε } x \in (-\infty, +\infty).$$

Παράδειγμα 10.2. Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, η συνάρτηση $F(x, y, y', y'') = y'' + y$ ορίζει τη διαφορική εξίσωση

$$y'' + y = 0,$$

Παπαδημητράκης, Μ. (2024) «Απειροστικός Λογισμός».

Αθήνα: Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. <http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-1011>

 Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Μη Εμπορική Χρήση - Παρόμοια Διανομή 4.0

η οποία έχει ως λύση την $y(x) = \sin x$ στο $(-\infty, +\infty)$, διότι ισχύει

$$y''(x) + y(x) = -\sin x + \sin x = 0 \quad \text{για κάθε } x \in (-\infty, +\infty).$$

Επειδή y'' είναι η παράγωγος μέγιστης τάξης η οποία εμφανίζεται στη διαφορική εξίσωση, λέμε ότι η διαφορική εξίσωση έχει τάξη 2. Ομοίως, στο προηγούμενο παράδειγμα η διαφορική εξίσωση έχει τάξη 1, αφού y' είναι η παράγωγος μέγιστης τάξης η οποία εμφανίζεται σε αυτήν.

Ορισμός 10.1. Με τον όρο *διαφορική εξίσωση* χαρακτηρίζουμε την

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

όπου η $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$ είναι συνάρτηση $n + 2$ μεταβλητών.

Αν υπάρχει συνάρτηση $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι n φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα I έτσι ώστε να ισχύει

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad \text{για κάθε } x \in I,$$

τότε λέμε ότι η συνάρτηση y είναι *λύση* της διαφορικής εξίσωσης στο διάστημα I .

Τάξη μίας διαφορικής εξίσωσης είναι η μέγιστη τάξη παραγώγου η οποία εμφανίζεται σε αυτήν.

Παράδειγμα 10.3. Η συνάρτηση $F(x, y, y') = e^y y' - 1$ ορίζει τη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$e^y y' = 1,$$

η οποία έχει ως λύση την $y(x) = \log x$ στο $(0, +\infty)$, διότι ισχύει

$$e^{y(x)} y'(x) = e^{\log x} \frac{1}{x} = \frac{x}{x} = 1 \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Ορισμός 10.2. Η διαφορική εξίσωση $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ χαρακτηρίζεται *γραμμική*, αν η συνάρτηση $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$ έχει τη μορφή

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = L(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) - p(x),$$

όπου η $L(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$ είναι γραμμική συνάρτηση, με την ορολογία της Γραμμικής Άλγεβρας, του διανύσματος $(y, y', y'', \dots, y^{(n)})$ των $n + 1$ τελευταίων μεταβλητών, δηλαδή αν

$$L(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = p_0(x)y + p_1(x)y' + p_2(x)y'' + \dots + p_n(x)y^{(n)} = \sum_{k=0}^n p_k(x)y^{(k)}.$$

Τότε η διαφορική εξίσωση γράφεται, ισοδύναμα,

$$L(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = p(x) \quad \text{ή} \quad \sum_{k=0}^n p_k(x)y^{(k)} = p(x).$$

Αν η $p(x)$ είναι η μηδενική συνάρτηση, τότε η γραμμική διαφορική εξίσωση γράφεται

$$L(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad \text{ή} \quad \sum_{k=0}^n p_k(x)y^{(k)} = 0$$

και χαρακτηρίζεται *ομογενής*.

Παράδειγμα 10.4. Στα παραδείγματα 10.1 και 10.2 οι συναρτήσεις $L(x, y, y') = 2xy + y'$ και $L(x, y, y', y'') = y + y''$ είναι γραμμικές συναρτήσεις των αντίστοιχων διανυσμάτων (y, y') και (y, y', y'') , οπότε οι διαφορικές εξισώσεις είναι γραμμικές και, μάλιστα, ομογενείς.

Η διαφορική εξίσωση στο παράδειγμα 10.3 δεν είναι γραμμική.

Η γραμμικότητα της $L(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \sum_{k=0}^n p_k(x)y^{(k)}$ εκφράζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} L(x, c_1 y_1 + c_2 y_2, c_1 y'_1 + c_2 y'_2, \dots, c_1 y_1^{(n)} + c_2 y_2^{(n)}) \\ = c_1 L(x, y_1, y'_1, \dots, y_1^{(n)}) + c_2 L(x, y_2, y'_2, \dots, y_2^{(n)}) \end{aligned}$$

για κάθε $(y_1, y_1', \dots, y_1^{(n)}), (y_2, y_2', \dots, y_2^{(n)})$, κάθε c_1, c_2 και κάθε x στο κοινό πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} L(x, c_1 y_1 + c_2 y_2, c_1 y_1' + c_2 y_2', \dots, c_1 y_1^{(n)} + c_2 y_2^{(n)}) &= \sum_{k=0}^n p_k(x)(c_1 y_1^{(k)} + c_2 y_2^{(k)}) \\ &= c_1 \sum_{k=0}^n p_k(x) y_1^{(k)} + c_2 \sum_{k=0}^n p_k(x) y_2^{(k)} \\ &= c_1 L(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n)}) + c_2 L(x, y_2, y_2', \dots, y_2^{(n)}). \end{aligned}$$

Στη γραμμικότητα της $L(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ οφείλεται το επόμενο αποτέλεσμα.

Πρόταση 10.1. *Αν οι y_1, y_2 είναι δύο λύσεις μίας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης στο διάστημα I , τότε κάθε γραμμικός συνδυασμός $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, όπου c_1, c_2 είναι δύο σταθεροί αριθμοί ανεξάρτητοι της μεταβλητής x , είναι επίσης λύση της ίδιας διαφορικής εξίσωσης στο I .*

Απόδειξη. Επειδή ισχύει $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ για κάθε $x \in I$, συνεπάγεται ότι ισχύει $y^{(k)}(x) = c_1 y_1^{(k)}(x) + c_2 y_2^{(k)}(x)$ για κάθε $x \in I$ και κάθε $k = 1, \dots, n$. Επομένως, λόγω γραμμικότητας της $L(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} L(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) &= c_1 L(x, y_1(x), y_1'(x), \dots, y_1^{(n)}(x)) + c_2 L(x, y_2(x), y_2'(x), \dots, y_2^{(n)}(x)) \\ &= c_1 0 + c_2 0 = 0 \end{aligned}$$

για κάθε $x \in I$. □

Φυσικά, είναι στοιχειώδες το ότι η μηδενική συνάρτηση $y(x) = 0$ στο διάστημα I είναι λύση οποιασδήποτε ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης. Πράγματι,

$$L(x, 0, 0', 0'', \dots, 0^{(n)}) = \sum_{k=0}^n p_k(x) 0 = 0$$

για κάθε $x \in I$, αφού όλες οι παράγωγοι της μηδενικής συνάρτησης είναι μηδενικές συναρτήσεις.

Χρησιμοποιώντας στην Πρόταση 10.1 τη μηδενική συνάρτηση ως y_2 , βλέπουμε ότι αν η y είναι λύση μίας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης στο διάστημα I , τότε κάθε πολλαπλάσιο $c y$, όπου c είναι σταθερός αριθμός ανεξάρτητος της μεταβλητής x , είναι επίσης λύση της ίδιας διαφορικής εξίσωσης στο I .

Πρόταση 10.2. *Έστω $L(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = p(x)$ μια μη-ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση και $L(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ η αντίστοιχη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση.*

(i) *Αν η $y_2 - y_1$ είναι λύση της ομογενούς εξίσωσης στο διάστημα I και η μία από τις y_1, y_2 είναι λύση της μη-ομογενούς εξίσωσης στο I , τότε και η άλλη είναι λύση της μη-ομογενούς εξίσωσης στο I .*

(ii) *Αν οι y_1, y_2 είναι λύσεις της μη-ομογενούς εξίσωσης στο διάστημα I , τότε η $y_2 - y_1$ είναι λύση της ομογενούς εξίσωσης στο I .*

Απόδειξη. (i) Έστω $y = y_2 - y_1$ στο διάστημα I . Αν η y_1 είναι λύση της μη-ομογενούς εξίσωσης στο I και η y είναι λύση της ομογενούς εξίσωσης στο I , τότε λόγω της $y_2 = y + y_1$ και λόγω της γραμμικότητας της $L(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} L(x, y_2(x), y_2'(x), \dots, y_2^{(n)}(x)) &= L(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) + L(x, y_1(x), y_1'(x), \dots, y_1^{(n)}(x)) \\ &= 0 + p(x) = p(x) \end{aligned}$$

για κάθε $x \in I$, οπότε η y_2 είναι λύση της μη-ομογενούς εξίσωσης στο I .

(ii) Αν οι y_1, y_2 είναι λύσεις της μη-ομογενούς εξίσωσης στο I , τότε για την $y = y_2 - y_1$ έχουμε

$$\begin{aligned} L(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) &= L(x, y_2(x), y_2'(x), \dots, y_2^{(n)}(x)) - L(x, y_1(x), y_1'(x), \dots, y_1^{(n)}(x)) \\ &= p(x) - p(x) = 0 \end{aligned}$$

για κάθε $x \in I$, οπότε η y είναι λύση της ομογενούς εξίσωσης στο I . □

Το αποτέλεσμα αυτό διατυπώνεται και ως εξής.

Έστω ότι η συνάρτηση y_s είναι μία συγκεκριμένη λύση της μη-ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης στο διάστημα I . Τότε το σύνολο όλων των λύσεων της μη-ομογενούς εξίσωσης στο I αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $y + y_s$, όπου y είναι οποιαδήποτε λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης στο I , και από καμία άλλη συνάρτηση.

Σχηματικά: λύσεις της μη-ομογενούς εξίσωσης = λύσεις της ομογενούς εξίσωσης + y_s .

Με τη γλώσσα της Γραμμικής Άλγεβρας:

*Η Πρόταση 10.1 λέει ότι το σύνολο των λύσεων μιας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης είναι ένας **γραμμικός χώρος**, ενώ η Πρόταση 10.2 λέει ότι το σύνολο των λύσεων μιας μη-ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης είναι η **γραμμική πολλαπλότητα** η οποία προκύπτει από τον γραμμικό χώρο των λύσεων της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης με μεταφορά, δηλαδή πρόσθεση, κατά μία συγκεκριμένη λύση της μη-ομογενούς εξίσωσης.*

Παράδειγμα 10.5. Από κάθε άποψη η πιο απλή διαφορική εξίσωση είναι η γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης $y' - p(x) = 0$ ή, ισοδύναμα,

$$y' = p(x),$$

όπου η $p(x)$ ορίζεται σε κάποιο διάστημα I . Παρατηρήστε ότι $L(x, y, y') = y' = 0y + 1y'$, οπότε οι συντελεστές των y και y' είναι 0 και 1, αντιστοίχως, και είναι ανεξάρτητοι του x . Λύση της εξίσωσης αυτής στο I είναι οποιαδήποτε συνάρτηση y η οποία είναι παραγωγίσιμη στο I και ικανοποιεί την

$$y'(x) = p(x)$$

για κάθε $x \in I$, δηλαδή οποιαδήποτε παράγουσα της $p(x)$ στο I . Αν η $p(x)$ είναι συνεχής στο I , τότε σύμφωνα με το Θεμελιώδες Θεώρημα οι λύσεις αυτής της εξίσωσης, δηλαδή οι παράγουσες της $p(x)$ στο I , είναι οι ίδιες με τα αόριστα ολοκληρώματα της $p(x)$ στο I . Με άλλα λόγια, η γενική λύση της $y' = p(x)$ στο I είναι η

$$y(x) = \int p(x) dx = \int_{x_0}^x p(t) dt + c, \quad x \in I,$$

όπου x_0 είναι ένα οποιοδήποτε σταθερό σημείο του I και η c είναι μια αυθαίρετη σταθερά.

Δείτε πώς συγκεκριμενοποιούνται όσα γενικά είπαμε παραπάνω: η συνάρτηση $\int_{x_0}^x p(t) dt$ είναι μία ειδική λύση της μη-ομογενούς εξίσωσης $y' = p(x)$ και η αυθαίρετη σταθερά c είναι η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης $y' = 0$.

Ένας τυπικός τρόπος να απομονώσουμε κάποιες από τις άπειρες αυτές λύσεις της διαφορικής εξίσωσης είναι να επιλέξουμε κάποιον αριθμό y_0 και να αναζητήσουμε τις λύσεις οι οποίες έχουν τιμή y_0 στο x_0 , δηλαδή τις συναρτήσεις y οι οποίες ικανοποιούν το «σύστημα»

$$y'(x) = p(x), \quad x \in I, \quad y(x_0) = y_0.$$

Γενικά, όταν προσθέτουμε μια συνθήκη του τύπου $y(x_0) = y_0$ λέμε ότι έχουμε ένα πρόβλημα **αρχικών τιμών**.

Για να βρούμε αυτές τις λύσεις, θέτουμε $x = x_0$ στον τύπο της γενικής λύσης και βρίσκουμε

$$y_0 = y(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} p(t) dt + c = c,$$

δηλαδή προσδιορίζεται μονοσήμαντα η σταθερά c . Επομένως, η λύση είναι μοναδική και είναι η

$$y(x) = \int_{x_0}^x p(t) dt + y_0, \quad x \in I.$$

Δεν θα επιχειρήσουμε συστηματική μελέτη των διαφορικών εξισώσεων: στις επόμενες ενότητες θα περιοριστούμε σε μερικές απλές αλλά βασικές ειδικές περιπτώσεις διαφορικών εξισώσεων πρώτης και δεύτερης τάξης. Η έμφαση θα είναι στην εφαρμογή της ολοκλήρωσης για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων.

Ασκήσεις

10.1. Αποδείξτε ότι για κάθε τιμή της σταθεράς c η $y(x) = x \tan(x + c)$ είναι, στα διαστήματα στα οποία ορίζεται, λύση της $xy' - x^2 - y^2 - y = 0$.

10.2. Αποδείξτε ότι όλες οι λύσεις $y(x)$ της $(x^2 + 1)y' = 1$ στο $(-\infty, +\infty)$ έχουν την ιδιότητα ότι τα $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x)$ υπάρχουν και είναι αριθμοί. Υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x)$.

10.3. Αν η $y(x)$ ικανοποιεί την αλγεβρική εξίσωση $x + (1 + cx)y^3 = 0$ για κάθε x σε κάποιο διάστημα I , όπου c είναι σταθερά, αποδείξτε ότι η $y(x)$ είναι λύση της $y^4 + 3x^2y' = 0$ στο I .

Υπόδειξη: Μετασχηματίστε την $x + (1 + cx)y^3 = 0$ έτσι ώστε όταν, στη νέα μορφή της, την παραγωγίσετε να απαλείψετε τη σταθερά c .

10.4. Αν η $y(x)$ ικανοποιεί την αλγεβρική εξίσωση $x(x + y) = ce^y$ για κάθε x στο διάστημα I , όπου c είναι σταθερά, αποδείξτε ότι η $y(x)$ είναι λύση της $x(x + y - 1)y' = 2x + y$ στο I .

10.3 Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης

10.3.1 Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης με χωριζόμενες μεταβλητές

Είναι φανερό γιατί οι διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης του τύπου

$$g(y)y' = h(x)$$

χαρακτηρίζονται διαφορικές εξισώσεις με χωριζόμενες μεταβλητές. Οι συναρτήσεις $g(y)$ και $h(x)$ θεωρούνται γνωστές και το να είναι η συνάρτηση $y(x)$ λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης σε κάποιο διάστημα I σημαίνει να ισχύει

$$g(y(x))y'(x) = h(x)$$

για κάθε $x \in I$. Η επόμενη πρόταση περιγράφει πώς λύνεται μια τέτοια διαφορική εξίσωση.

Πρόταση 10.3. Έστω παράγουσα $G(y)$ της $g(y)$ στο διάστημα J και παράγουσα $H(x)$ της $h(x)$ στο διάστημα I . Τότε οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$g(y)y' = h(x)$$

στο I είναι οι ίδιες με τις λύσεις της αλγεβρικής εξίσωσης

$$G(y) = H(x) + c$$

στο I , με αυθαίρετη σταθερά c , οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο I .

Απόδειξη. Έστω ότι η συνάρτηση $y(x)$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης $g(y)y' = h(x)$ στο I . Δηλαδή, έστω $g(y(x))y'(x) = h(x)$ για κάθε $x \in I$. Τότε ισχύει $y(x) \in J$ για κάθε $x \in I$, αφού ορίζεται το $g(y(x))$ για κάθε $x \in I$. Επίσης, ισχύει

$$(G(y(x)))' = G'(y(x))y'(x) = g(y(x))y'(x) = h(x) = H'(x)$$

για κάθε x στο I . Συνεπάγεται ότι ισχύει $G(y(x)) = H(x) + c$ για κάθε x στο I , με κατάλληλη σταθερά c . Άρα η $y(x)$ είναι λύση της αλγεβρικής εξίσωσης $G(y) = H(x) + c$ στο I και είναι, προφανώς,

παραγωγίσιμη στο I .

Αντιστρόφως, έστω ότι η $y(x)$ ικανοποιεί την εξίσωση $G(y) = H(x) + c$ στο I , δηλαδή ότι ισχύει $G(y(x)) = H(x) + c$ για κάθε $x \in I$, και ότι είναι παραγωγίσιμη στο I . Τότε ισχύει $y(x) \in J$ για κάθε $x \in I$, αφού ορίζεται το $G(y(x))$ για κάθε $x \in I$. Επίσης, συνεπάγεται $G'(y(x))y'(x) = H'(x)$ για κάθε $x \in I$, οπότε

$$g(y(x))y'(x) = G'(y(x))y'(x) = H'(x) = h(x)$$

για κάθε $x \in I$. Άρα η $y(x)$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης $g(y)y' = h(x)$ στο I . $\square$

Επομένως, το να λύσουμε τη διαφορική εξίσωση $g(y)y' = h(x)$ ισοδυναμεί με το να λύσουμε την αλγεβρική εξίσωση $G(y) = H(x) + c$, με αυθαίρετη σταθερά c . Η εξίσωση $G(y) = H(x) + c$ δεν είναι διαφορική εξίσωση, αφού περιέχει μόνο την ίδια την $y = y(x)$ και καμία από τις παραγώγους της. Τώρα, οι συναρτήσεις $G(y)$ και $H(x)$ είναι υποτίθεται γνωστές, αφού είναι παράγουσες των $g(y)$ και $h(x)$. Πάντως, ακόμη και αν δεν μπορούμε να λύσουμε αυτήν την αλγεβρική εξίσωση, η διαφορική εξίσωση μπορεί να θεωρηθεί λυμένη, αφού έχει μετασχηματιστεί σε εξίσωση που δεν περιέχει παραγώγους της άγνωστης συνάρτησης.

Πρακτικά, αν γνωρίζουμε μία παράγουσα $G(y)$ της $g(y)$ και μία παράγουσα $H(x)$ της $h(x)$, τότε για να λύσουμε τη διαφορική εξίσωση

$$g(y)y' = h(x)$$

τη γράφουμε, ισοδύναμα,

$$\frac{dG(y)}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dH(x)}{dx}$$

δηλαδή, ισοδύναμα, βάσει του κανόνα αλυσίδας,

$$\frac{dG(y)}{dx} = \frac{dH(x)}{dx}$$

δηλαδή, ισοδύναμα,

$$G(y) = H(x) + c,$$

με αυθαίρετη σταθερά c . Εννοείται ότι στα προηγούμενα η y δηλώνει συνάρτηση $y(x)$ του x και όταν γράφουμε $\frac{dG(y)}{dy}$ εννοούμε $\frac{dG(y)}{dy} \Big|_{y=y(x)}$.

Παράδειγμα 10.6. Θα λύσουμε τη διαφορική εξίσωση

$$yy' = x.$$

Θεωρούμε την παράγουσα $\frac{1}{2}y^2$ της y στο $(-\infty, +\infty)$, καθώς και την παράγουσα $\frac{1}{2}x^2$ της x στο $(-\infty, +\infty)$. Τότε η διαφορική εξίσωση $yy' = x$ γράφεται, ισοδύναμα,

$$\frac{d}{dy}(\frac{1}{2}y^2) \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\frac{1}{2}x^2)$$

δηλαδή, ισοδύναμα,

$$\frac{d}{dx}(\frac{1}{2}y^2) = \frac{d}{dx}(\frac{1}{2}x^2)$$

δηλαδή, ισοδύναμα,

$$y^2 = x^2 + c,$$

με αυθαίρετη σταθερά c .

Τώρα, για να λύσουμε ως προς y την $y^2 = x^2 + c$, διακρίνουμε διάφορες περιπτώσεις.

Αν $c > 0$, τότε οι $y = \sqrt{x^2 + c}$ και $y = -\sqrt{x^2 + c}$ είναι οι μόνες (γιατί;) παραγωγίσιμες λύσεις στο $(-\infty, +\infty)$.

Αν $c = 0$, τότε οι $y = x$ και $y = -x$ είναι οι μόνες (γιατί;) παραγωγίσιμες λύσεις στο $(-\infty, +\infty)$.

Αν $c < 0$, τότε οι $y = \sqrt{x^2 + c}$ και $y = -\sqrt{x^2 + c}$ είναι οι μόνες (γιατί;) παραγωγίσιμες λύσεις είτε στο $(-\infty, -\sqrt{-c})$ είτε στο $(\sqrt{-c}, +\infty)$. Προσέξτε: στα άκρα $-\sqrt{-c}$ και $\sqrt{-c}$ των δύο διαστημάτων οι δύο συναρτήσεις δεν είναι παραγωγίσιμες.

Παράδειγμα 10.7. Θα λύσουμε τη διαφορική εξίσωση

$$y^2 y' = x.$$

Θεωρούμε την παράγουσα $\frac{1}{3}y^3$ της y^2 στο $(-\infty, +\infty)$, καθώς και την παράγουσα $\frac{1}{2}x^2$ της x στο $(-\infty, +\infty)$. Τότε η διαφορική εξίσωση $y^2 y' = x$ γράφεται, ισοδύναμα,

$$\frac{d}{dy}(\frac{1}{3}y^3) \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\frac{1}{2}x^2)$$

ή, ισοδύναμα,

$$\frac{d}{dx}(\frac{1}{3}y^3) = \frac{d}{dx}(\frac{1}{2}x^2)$$

ή, ισοδύναμα,

$$y^3 = \frac{3}{2}x^2 + c,$$

με αυθαίρετη σταθερά c .

Για να λύσουμε ως προς y την $y^3 = \frac{3}{2}x^2 + c$, διακρίνουμε περιπτώσεις.

Αν $c > 0$, τότε η $y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 + c}$ είναι η μόνη (γιατί;) παραγωγίσιμη λύση στο $(-\infty, +\infty)$.

Αν $c = 0$, τότε η $y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2}$ είναι η μόνη (γιατί;) παραγωγίσιμη λύση στα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

Αν $c < 0$, τότε η $y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 + c}$ είναι η μόνη (γιατί;) παραγωγίσιμη λύση στο $(-\infty, -\sqrt{-\frac{2}{3}c})$ και στο $(\sqrt{-\frac{2}{3}c}, +\infty)$, και η $y = -\sqrt[3]{-\frac{3}{2}x^2 - c}$ είναι η μόνη (γιατί;) παραγωγίσιμη λύση στο $(-\sqrt{-\frac{2}{3}c}, \sqrt{-\frac{2}{3}c})$.

Προσέξτε: στα άκρα όλων αυτών των διαστημάτων οι αντίστοιχες συναρτήσεις δεν είναι παραγωγίσιμες και γι' αυτό τα αφαιρούμε από τα διαστήματα.

Παράδειγμα 10.8. Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$(e^y + 1)y' = 2x.$$

Η $e^y + y$ είναι παράγουσα της $e^y + 1$ στο $(-\infty, +\infty)$ και η x^2 είναι παράγουσα της $2x$ στο $(-\infty, +\infty)$. Έτσι, η διαφορική εξίσωση $(e^y + 1)y' = 2x$ γράφεται, ισοδύναμα,

$$\frac{d(e^y + y)}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dx^2}{dx}$$

δηλαδή, ισοδύναμα,

$$\frac{d(e^y + y)}{dx} = \frac{dx^2}{dx}$$

δηλαδή, ισοδύναμα,

$$e^y + y = x^2 + c,$$

με αυθαίρετη σταθερά c .

Η εξίσωση $e^y + y = x^2 + c$ δεν μπορεί να λυθεί ως προς y συναρτήσει του x , αλλά όταν η εξίσωση έχει πάντως να είναι διαφορική και έχει μετατραπεί σε αλγεβρική θεωρείται λυμένη ως διαφορική εξίσωση.

Μπορούμε, βέβαια, να έχουμε κάποια παραπάνω πληροφορία.

Ορίζουμε την $z = g(y) = e^y + y$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα συνάρτηση του y στο $(-\infty, +\infty)$, και έχουμε ότι $\lim_{y \rightarrow -\infty} g(y) = -\infty$ και $\lim_{y \rightarrow +\infty} g(y) = +\infty$. Άρα το σύνολο τιμών της g

είναι το $(-\infty, +\infty)$. Επομένως, υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση $y = g^{-1}(z)$ και αυτή είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του z στο $(-\infty, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$. Επίσης, η $y = g^{-1}(z)$ είναι και αυτή παραγωγίσιμη ως αντίστροφη παραγωγίσιμης συνάρτησης της οποίας η παράγωγος δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο. Τώρα, η εξίσωση $e^y + y = x^2 + c$ γράφεται, ισοδύναμα, $g(y) = x^2 + c$,

και αυτή γράφεται, ισοδύναμα, $y = g^{-1}(x^2 + c)$.

Άρα ο τύπος της γενικής λύσης της $(e^y + 1)y' = 2x$ στο $(-\infty, +\infty)$ είναι

$$y(x) = g^{-1}(x^2 + c),$$

με αυθαίρετη σταθερά c , όπου η g^{-1} είναι μία συγκεκριμένη συνάρτηση της οποίας τον τύπο δεν τον γνωρίζουμε.

Παράδειγμα 10.9. Θα λύσουμε την ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$y' + p_0(x)y = 0$$

όπου η $p_0(x)$ είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα I . Η εξίσωση γράφεται και

$$\frac{1}{y} y' = -p_0(x)$$

για $y \neq 0$, και με αυτήν τη μορφή είναι διαφορική εξίσωση με χωριζόμενες μεταβλητές. Τώρα θα περιοριστούμε στις λύσεις της $y' + p_0(x)y = 0$ οι οποίες δεν μηδενίζονται σε κανένα σημείο του I και τότε αυτές είναι ίδιες με τις λύσεις της $\frac{1}{y} y' = -p_0(x)$ στο I .

Θεωρούμε την παράγουσα $\log |y|$ της $\frac{1}{y}$ στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$ καθώς και την παράγουσα $-\int_{x_0}^x p_0(t) dt$ της $-p_0(x)$ στο I , όπου x_0 είναι οποιοδήποτε σημείο του I . Τώρα, η διαφορική εξίσωση $\frac{1}{y} y' = -p_0(x)$ γράφεται, ισοδύναμα,

$$\frac{d \log |y|}{dx} = \frac{d}{dx} \left(-\int_{x_0}^x p_0(t) dt \right)$$

δηλαδή, ισοδύναμα,

$$\frac{d \log |y|}{dx} = \frac{d}{dx} \left(-\int_{x_0}^x p_0(t) dt \right)$$

δηλαδή, ισοδύναμα,

$$\log |y| = -\int_{x_0}^x p_0(t) dt + c,$$

δηλαδή

$$|y| = e^{-\int_{x_0}^x p_0(t) dt + c}.$$

Οι παραγωγίσιμες λύσεις πρέπει να έχουν σταθερό πρόσημο στο διάστημα I , επειδή περιορίστηκαμε σε αυτές οι οποίες δεν μηδενίζονται στο I , οπότε είναι η $y(x) = e^c e^{-\int_{x_0}^x p_0(t) dt}$ και η $y(x) = -e^c e^{-\int_{x_0}^x p_0(t) dt}$ στο I . Αν συμβολίσουμε c τον μη-μηδενικό αριθμό $\pm e^c$, τότε μπορούμε να πούμε ότι οι λύσεις της $y' + p_0(x)y = 0$ στο I οι οποίες δεν μηδενίζονται σε κανένα σημείο του I είναι οι

$$y(x) = c e^{-\int_{x_0}^x p_0(t) dt}, \quad x \in I$$

με αυθαίρετη σταθερά $c \neq 0$. Αν επιτρέψουμε και τη σταθερά $c = 0$, τότε βρίσκουμε και τη λύση η οποία είναι σταθερή 0 στο I .

Θα μπορούσε κάποιος να ρωτήσει αν υπάρχουν λύσεις της $y' + p_0(x)y = 0$ οι οποίες μηδενίζονται σε κάποια σημεία του I χωρίς να είναι ταυτοτικά 0 στο I . Δεν υπάρχουν τέτοιες λύσεις, αλλά αυτό θα το δούμε στη μεθεπόμενη υποενότητα, όπου θα λύσουμε με διαφορετικό τρόπο την ίδια διαφορική εξίσωση.

Ασκήσεις

10.5. Λύστε τις διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης με χωριζόμενες μεταβλητές: $y' = e^{-y}$, $y' = y^2$, $y^2 y' = 1$, $(1 + x^2)yy' = 1 + y^2$, $yy' \sqrt{1 - x^2} = x$, $x + yy' = x(xy' - y)y$, $xyy' = (1 + x^2)(1 + y^2)$, $(1 + x^2)y' = 1 + y^2$, $y' = (y - 1)(y - 2)$, $(x - 1)y' = xy$, $(x^2 - 4)y' = y$, $(x + 1)y' + y^2 = 0$, $y^2 + (y')^2 = 1$. Για κάθε εξίσωση βρείτε όλες τις λύσεις της. Προσέξτε: τα διαστήματα τα οποία αντιστοιχούν σε διαφορετικές λύσεις της ίδιας εξίσωσης μπορεί να είναι διαφορετικά.

10.3.2 Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης ομογενείς βαθμού 0

Ορισμός 10.3. Μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$y' = F(x, y)$$

χαρακτηρίζεται **ομογενής βαθμού 0**, αν η συνάρτηση $F(x, y)$, ως συνάρτηση δύο ανεξάρτητων μεταβλητών, έχει την ιδιότητα

$$F(tx, ty) = F(x, y)$$

για κάθε $t \neq 0$. Προσοχή: να μην υπάρξει σύγχυση με τον όρο «ομογενής» στον ορισμό 10.2 ο οποίος αναφέρεται στις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης.

Σε τέτοιου τύπου διαφορικές εξισώσεις μπορούμε να κάνουμε την αλλαγή της εξαρτημένης μεταβλητής από y σε

$$u = \frac{y}{x},$$

για $x \neq 0$. Αυτό σημαίνει ότι αν η $y = y(x)$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης, τότε η $u = u(x) = \frac{y(x)}{x}$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης η οποία θα προκύψει όταν αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή y με την u . Οι y, u εκφράζουν συναρτήσεις του x , οπότε, παραγωγίζοντας τη σχέση

$$y = xu$$

ως προς x , βρίσκουμε $y' = xu' + u$ και η διαφορική εξίσωση μετατρέπεται στην

$$xu' + u = F(x, xu) = F(1, u) \quad \text{για } x \neq 0.$$

Η εξίσωση αυτή γράφεται, υπό τις κατάλληλες προϋποθέσεις,

$$\frac{1}{F(1, u) - u} u' = \frac{1}{x} \quad \text{για } x \neq 0,$$

δηλαδή ως διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης με χωριζόμενες μεταβλητές.

Παράδειγμα 10.10. Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$y' = \frac{x^2 + 2y^2}{xy}.$$

Η εξίσωση αυτή είναι της μορφής $y' = F(x, y)$ με $F(x, y) = \frac{x^2 + 2y^2}{xy}$ για $x \neq 0, y \neq 0$ και είναι εύκολο να δει κανείς ότι ισχύει $F(tx, ty) = F(x, y)$ για κάθε $t \neq 0$ και κάθε $x \neq 0, y \neq 0$.

Γράφουμε

$$y = xu,$$

οπότε $y' = xu' + u$ και η εξίσωση γίνεται

$$xu' + u = \frac{x^2 + 2x^2u^2}{x^2u} = \frac{1 + 2u^2}{u}$$

ή, ισοδύναμα, $xu' = \frac{1 + u^2}{u}$ ή, ισοδύναμα,

$$\frac{u}{1 + u^2} u' = \frac{1}{x}.$$

Προχωρώντας, πρέπει να έχουμε υπόψη τους περιορισμούς $x \neq 0, y \neq 0$ και τον συνεπαγόμενο περιορισμό $u \neq 0$.

Θεωρούμε την παράγουσα $\frac{1}{2} \log(1 + u^2)$ της $\frac{u}{1 + u^2}$ στο $(-\infty, +\infty)$ καθώς και την παράγουσα $\log |x|$ της $\frac{1}{x}$ στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$. Τώρα, η διαφορική εξίσωση $\frac{u}{1 + u^2} u' = \frac{1}{x}$ γράφεται, ισοδύναμα,

$$\frac{d}{du} \left(\frac{1}{2} \log(1 + u^2) \right) \frac{du}{dx} = \frac{d \log |x|}{dx}$$

δηλαδή, ισοδύναμα,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \log(1 + u^2) \right) = \frac{d \log |x|}{dx}$$

δηλαδή, ισοδύναμα,

$$\frac{1}{2} \log(1 + u^2) = \log |x| + c,$$

με αυθαίρετη σταθερά c . Αυτό ισοδυναμεί με $1 + u^2 = e^{2c} x^2$ ή, αλλιώς,

$$1 + u^2 = cx^2,$$

με αυθαίρετη σταθερά $c > 0$. Οι παραγωγίσιμες λύσεις της τελευταίας εξίσωσης είναι η $u(x) = \sqrt{cx^2 - 1}$ και η $u(x) = -\sqrt{cx^2 - 1}$ στα διαστήματα $(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{c}})$ και $(\sqrt{\frac{1}{c}}, +\infty)$. Αυτές οι λύσεις δεν μηδενίζονται πουθενά στα διαστήματα ορισμού τους.

Άρα οι λύσεις της $y' = \frac{x^2 + 2y^2}{xy}$ είναι η $y(x) = x \sqrt{cx^2 - 1}$ και η $y(x) = -x \sqrt{cx^2 - 1}$ στα διαστήματα $(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{c}})$ και $(\sqrt{\frac{1}{c}}, +\infty)$. Αυτές οι τελικές λύσεις δεν μηδενίζονται πουθενά στα διαστήματα ορισμού τους.

Ασκήσεις

10.6. Λύστε τις ομογενείς βαθμού 0 διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης: $y' = 1 + \frac{y}{x}$, $(2y^2 - x^2)y' + 3xy = 0$, $xy' = y - \sqrt{x^2 + y^2}$, $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$, $y' = \frac{y-x}{y+x}$, $x(y + 4x)y' + y(x + 4y) = 0$.

10.3.3 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης

Θα μελετήσουμε τη «γενική» γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$y' + p_0(x)y = p(x),$$

όπου οι συναρτήσεις $p_0(x)$ και $p(x)$ ορίζονται σε κάποιο διάστημα I . Βάζουμε σε εισαγωγικά το «γενική», διότι η γενική εξίσωση πρέπει να έχει τη μορφή $p_1(x)y' + p_0(x)y = p(x)$. Αν η $p_1(x)$ δεν μηδενίζεται πουθενά στο διάστημα I , τότε η εξίσωση γράφεται, ισοδύναμα, $y' + \frac{p_0(x)}{p_1(x)}y = \frac{p(x)}{p_1(x)}$, οπότε μπορούμε να αλλάξουμε τα σύμβολα των συναρτήσεων και να καταλήξουμε στη μορφή της εξίσωσης όπως τη γράψαμε παραπάνω. Στην περίπτωση αυτή, λοιπόν, η εξίσωση την οποία γράψαμε αρχικά είναι η γενική γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης. Αν, όμως, η $p_1(x)$ μηδενίζεται σε κάποια σημεία του διαστήματος I , τα οποία τότε χαρακτηρίζονται **ιδιάζοντα σημεία** της διαφορικής εξίσωσης, τότε δεν μπορούμε να διαιρέσουμε και χάνουμε τη γενικότητα. Για λόγους απλότητας δεν θα ασχοληθούμε με τέτοιες περιπτώσεις και θα μείνουμε στη μορφή $y' + p_0(x)y = p(x)$.

Κατ' αρχάς θα δούμε την *άμεση* διαδικασία επίλυσης της μη-ομογενούς εξίσωσης $y' + p_0(x)y = p(x)$, υποθέτοντας ότι οι συναρτήσεις $p_0(x)$ και $p(x)$ είναι συνεχείς στο διάστημα I .

Ορισμός 10.4. Η συνάρτηση

$$\mu(x) = e^{\int_{x_0}^x p_0(t) dt} \quad \text{για } x \in I,$$

όπου x_0 είναι αυθαίρετο σημείο του I , ονομάζεται **ολοκληρωτικός παράγων** της διαφορικής εξίσωσης $y' + p_0(x)y = p(x)$ στο I .

Η συνάρτηση $\mu(x)$ δεν μηδενίζεται πουθενά στο I και, μάλιστα, έχει μόνο θετικές τιμές και ισχύει

$$\mu'(x) = p_0(x)e^{\int_{x_0}^x p_0(t) dt} = p_0(x)\mu(x)$$

για κάθε $x \in I$.

Τώρα, το ότι η $y(x)$ είναι λύση της $y' + p_0(x)y = p(x)$ στο διάστημα I , δηλαδή ότι ισχύει

$$y'(x) + p_0(x)y(x) = p(x)$$

για $x \in I$, εκφράζεται με τις διαδοχικές ισοδύναμες ισότητες

$$\mu(x)y'(x) + p_0(x)\mu(x)y(x) = p(x)\mu(x)$$

$$\mu(x)y'(x) + \mu'(x)y(x) = p(x)\mu(x)$$

$$(\mu(x)y(x))' = p(x)\mu(x)$$

$$\mu(x)y(x) = \int_{x_0}^x p(t)\mu(t) dt + c,$$

οπότε η γενική λύση είναι η

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \int_{x_0}^x p(t)\mu(t) dt + \frac{c}{\mu(x)}, \quad x \in I \quad (10.1)$$

με αυθαίρετη σταθερά c . Τονίζουμε, όμως, ότι είναι προτιμότερο να μην θυμόμαστε τον τύπο αυτόν αλλά μόνο τη μέθοδο επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης.

Θεωρώντας τη μηδενική συνάρτηση $p(x) = 0$ στον παραπάνω τύπο, βρίσκουμε τη γενική λύση

$$y(x) = \frac{c}{\mu(x)} = ce^{-\int_{x_0}^x p_0(t) dt}, \quad x \in I \quad (10.2)$$

της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης $y' + p_0(x)y = 0$. Έτσι επιβεβαιώνεται ότι οι λύσεις της ίδιας εξίσωσης τις οποίες βρήκαμε στο παράδειγμα 10.9 είναι όλες οι δυνατές λύσεις.

Αν θέλουμε να βρούμε τις λύσεις της διαφορικής εξίσωσης οι οποίες ικανοποιούν το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' + p_0(x)y = p(x), \quad x \in I, \quad y(x_0) = y_0,$$

θέτουμε $x = x_0$ στον τύπο της γενικής λύσης και βρίσκουμε

$$y_0 = y(x_0) = \frac{1}{\mu(x_0)} \int_{x_0}^{x_0} p(t)\mu(t) dt + \frac{c}{\mu(x_0)} = c,$$

αφού είναι φανερό ότι $\mu(x_0) = e^{\int_{x_0}^{x_0} p_0(t) dt} = 1$. Άρα η λύση είναι μοναδική και είναι η

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \int_{x_0}^x p(t)\mu(t) dt + \frac{y_0}{\mu(x)}, \quad x \in I.$$

Παράδειγμα 10.11. Θα λύσουμε την

$$y' - 2xy = 0.$$

Οι συναρτήσεις $-2x$ και 0 είναι συνεχείς στο $(-\infty, +\infty)$ και θεωρούμε τον ολοκληρωτικό παράγοντα

$$\mu(x) = e^{\int_0^x (-2t) dt} = e^{-x^2}$$

στο $(-\infty, +\infty)$. Το ότι η $y(x)$ είναι λύση της $y' - 2xy = 0$ στο $(-\infty, +\infty)$ γράφεται με τις διαδοχικές ισοδύναμες ισότητες

$$y'(x) - 2xy(x) = 0$$

$$e^{-x^2} y'(x) - 2xe^{-x^2} y(x) = 0$$

$$(e^{-x^2} y(x))' = 0$$

$$e^{-x^2} y(x) = c$$

$$y(x) = ce^{x^2}$$

για κάθε x , όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά. Άρα η γενική λύση της $y' - 2xy = 0$ στο $(-\infty, +\infty)$ είναι η $y(x) = ce^{x^2}$, με αυθαίρετη σταθερά c .

Αν θέλουμε να βρούμε τη μοναδική λύση με την ιδιότητα $y(0) = -2$, τότε θέτουμε $x = 0$ στον τύπο $y(x) = ce^{x^2}$. Βρίσκουμε $-2 = y(0) = c$ και η λύση είναι η $y(x) = -2e^{x^2}$.

Παράδειγμα 10.12. Θα λύσουμε την

$$x^2 y' + y = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}}, & \text{αν } x \neq 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0. \end{cases}$$

Κατ' αρχάς, αγνοούμε το $x = 0$ και προσπαθούμε να λύσουμε τη διαφορική εξίσωση στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ ξεχωριστά. Κατόπιν, θα δούμε πώς θα συνδυάσουμε τις λύσεις τις οποίες βρήκαμε ώστε να προκύψουν, αν είναι εφικτό, λύσεις στο $(-\infty, +\infty)$.

Εξαιρώντας, λοιπόν, το $x = 0$, γράφουμε την εξίσωση στη μορφή

$$y' + \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{|x|}} \quad \text{για } x \neq 0.$$

Οι $\frac{1}{x^2}$ και $\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{|x|}}$ είναι συνεχείς στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$.

Κατ' αρχάς, εργαζόμαστε στο διάστημα $(0, +\infty)$ και θεωρούμε τον ολοκληρωτικό παράγοντα

$$\mu(x) = e^{\int_1^x \frac{1}{t^2} dt} = e^{1-\frac{1}{x}}$$

στο $(0, +\infty)$, με $x_0 = 1$. Το ότι η $y(x)$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης στο $(0, +\infty)$ γράφεται με τις διαδοχικές ισοδύναμες ισότητες

$$\begin{aligned} y'(x) + \frac{1}{x^2}y(x) &= \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} \\ e^{1-\frac{1}{x}}y'(x) + \frac{1}{x^2}e^{1-\frac{1}{x}}y(x) &= \frac{1}{x^2}e^{1-\frac{2}{x}} \\ (e^{1-\frac{1}{x}}y(x))' &= \frac{1}{x^2}e^{1-\frac{2}{x}} \\ e^{1-\frac{1}{x}}y(x) &= \int_1^x \frac{1}{t^2}e^{1-\frac{2}{t}} dt + c = \frac{e}{2}e^{-\frac{2}{x}} + c \\ y(x) &= \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{x}} + ce^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

για κάθε $x > 0$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά. Άρα η γενική λύση της $x^2 y' + y = e^{-\frac{1}{|x|}}$ στο $(0, +\infty)$ είναι η

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{x}} + ce^{\frac{1}{x}} \quad \text{για } x \in (0, +\infty)$$

με αυθαίρετη σταθερά c .

Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο στο $(-\infty, 0)$ με $x_0 = -1$, βρίσκουμε ότι η γενική λύση της $x^2 y' + y = e^{-\frac{1}{|x|}}$ στο $(-\infty, 0)$ έχει τύπο

$$y(x) = -\frac{1}{2}e^{\frac{1}{x}} + ce^{\frac{1}{x}} \quad \text{για } x \in (-\infty, 0)$$

με αυθαίρετη σταθερά c .

Τέλος, ας δούμε αν υπάρχει λύση της αρχικής διαφορικής εξίσωσης

$$x^2 y' + y = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}}, & \text{αν } x \neq 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0, \end{cases}$$

στο $(-\infty, +\infty)$.

Αν η $y(x)$ είναι μια τέτοια λύση, τότε αυτή είναι, προφανώς, λύση της εξίσωσης και στα μικρότερα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$. Άρα ισχύει $y(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{x}} + c_1 e^{\frac{1}{x}}$ στο $(0, +\infty)$ για κατάλληλη σταθερά c_1 και $y(x) = -\frac{1}{2}e^{\frac{1}{x}} + c_2 e^{\frac{1}{x}}$ στο $(-\infty, 0)$ για κατάλληλη σταθερά c_2 . Η $y(x)$ πρέπει να είναι συνεχής στο 0, οπότε πρέπει να είναι $\lim_{x \rightarrow 0+} y(x) = y(0) = \lim_{x \rightarrow 0-} y(x)$. Βρίσκουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0+} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{x}} + c_1 e^{\frac{1}{x}} \right) = \begin{cases} c_1(+\infty), & \text{αν } c_1 \neq 0, \\ 0, & \text{αν } c_1 = 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} + c_2 e^{\frac{1}{x}} \right) = 0,$$

οπότε συνεπάγεται $c_1 = 0$ και $y(0) = 0$.

Επομένως, αν υπάρχει λύση της εξίσωσης στο $(-\infty, +\infty)$, τότε αυτή πρέπει να είναι η συνεχής συνάρτηση

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{αν } x > 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0, \\ -\frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} + c_2 e^{\frac{1}{x}}, & \text{αν } x < 0. \end{cases}$$

Κατόπιν, έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2x} e^{-\frac{1}{x}} = 0,$$

οπότε η $y(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 0 από τα δεξιά του και $y'_+(0) = 0$. Επίσης,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} + c_2 \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} \right) = 0.$$

Άρα η $y(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 0 και από τα αριστερά του και $y'_-(0) = 0$. Άρα η $y(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $y'(0) = 0$, οπότε ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση και στο 0.

Συνοψίζουμε. Η διαφορική εξίσωση έχει άπειρες λύσεις σε καθένα από τα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$. Επίσης, έχει άπειρες λύσεις στο $(-\infty, +\infty)$, οι οποίες είναι όλες ίσες με την ίδια συνάρτηση στο $[0, +\infty)$ και διαφέρουν στο $(-\infty, 0)$.

Παράδειγμα 10.13. Το παράδειγμα αυτό αποτελεί μία σημαντική ειδική περίπτωση διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης του τύπου $y' + p_0(x)y = p(x)$. Έστω η διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$y' + ky = p(x)$$

όπου k είναι ένας σταθερός αριθμός και η $p(x)$ είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα I . Θεωρούμε τον ολοκληρωτικό παράγοντα

$$\mu(x) = e^{\int_{x_0}^x k dt} = e^{k(x-x_0)}$$

στο I για κάποιο $x_0 \in I$. Το ότι η $y(x)$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης στο I γράφεται με τις διαδοχικές ισοδύναμες ισότητες

$$\begin{aligned} y'(x) + ky(x) &= p(x) \\ (e^{k(x-x_0)} y(x))' &= p(x) e^{k(x-x_0)} \\ e^{k(x-x_0)} y(x) &= \int_{x_0}^x p(t) e^{k(t-x_0)} dt + c, \end{aligned}$$

οπότε η γενική λύση είναι η

$$y(x) = e^{-kx} \int_{x_0}^x p(t) e^{kt} dt + c e^{-k(x-x_0)}, \quad x \in I,$$

με αυθαίρετη σταθερά c . Στην περίπτωση κατά την οποία η λύση έχει τιμή y_0 στο x_0 , δηλαδή αν $y(x_0) = y_0$, τότε προσδιορίζεται η σταθερά c , θέτοντας $x = x_0$, και βρίσκουμε $c = y_0$.

Πριν προχωρήσουμε, θα εξετάσουμε το γενικό αποτέλεσμά μας για τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης υπό το πρίσμα των Προτάσεων 10.1 και 10.2.

Κατ' αρχάς, υπενθυμίζουμε ότι βάσει του τύπου (10.2) η ομογενής εξίσωση $y' + p_0(x)y = 0$, όπου η $p_0(x)$ είναι συνεχής σε διάστημα I , έχει τη γενική λύση

$$y(x) = c e^{-\int_{x_0}^x p_0(t) dt}, \quad x \in I,$$

με αυθαίρετη σταθερά c . Παρατηρούμε ότι με $c = 1$ έχουμε μία από τις λύσεις, την

$$y_1(x) = e^{-\int_{x_0}^x p_0(t) dt}, \quad x \in I,$$

η οποία δεν είναι η μηδενική λύση, και ότι κάθε άλλη λύση είναι πολλαπλάσιο αυτής με αυθαίρετο αριθμό c . Με τη γλώσσα της Γραμμικής Άλγεβρας αυτό λέει ότι ο γραμμικός χώρος των λύσεων της ομογενούς εξίσωσης παράγεται από μία από τις λύσεις, η οποία είναι μη-μηδενική, οπότε έχει διάσταση 1.

Τώρα, για να βρούμε το σύνολο των λύσεων της μη-ομογενούς εξίσωσης $y' + p_0(x)y = p(x)$ είναι αρκετό να βρούμε μία συγκεκριμένη λύση, μία **ειδική λύση**, $y_s(x)$ της μη-ομογενούς εξίσωσης και να την προσθέσουμε στη γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης. Μία μέθοδος εύρεσης ειδικής λύσης της μη-ομογενούς εξίσωσης είναι η **μέθοδος των μεταβλητών παραμέτρων**: θεωρούμε τη γενική λύση $y(x) = cy_1(x)$ της ομογενούς εξίσωσης, αντικαθιστούμε τον σταθερό αριθμό c με μια *συνάρτηση* $c(x)$, υποθέτουμε ότι η προκύπτουσα συνάρτηση $y_s(x) = c(x)y_1(x)$ ικανοποιεί τη μη-ομογενή εξίσωση και βρίσκουμε τη συνάρτηση $c(x)$. Έστω, λοιπόν, ότι η

$$y_s(x) = c(x)y_1(x) = c(x)e^{-\int_{x_0}^x p_0(t) dt}, \quad x \in I,$$

ικανοποιεί την $y' + p_0(x)y = p(x)$, δηλαδή ότι

$$y'_s(x) + p_0(x)y_s(x) = p(x)$$

για $x \in I$. Χρησιμοποιώντας ότι η $y_1(x)$ είναι λύση της ομογενούς εξίσωσης, έχουμε τις διαδοχικές ισοδύναμες ισότητες

$$\begin{aligned} c'(x)y_1(x) + c(x)y'_1(x) + p_0(x)c(x)y_1(x) &= p(x) \\ c'(x)y_1(x) + c(x)(y'_1(x) + p_0(x)y_1(x)) &= p(x) \\ c'(x)y_1(x) &= p(x) \\ c'(x) &= \frac{p(x)}{y_1(x)} \\ c(x) &= \int_{x_0}^x \frac{p(t)}{y_1(t)} dt + c \end{aligned}$$

για $x \in I$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά. Όμως, επειδή μας ενδιαφέρει να βρούμε *μία* λύση της μη-ομογενούς εξίσωσης, θεωρούμε μία συγκεκριμένη τιμή της σταθεράς c , για παράδειγμα $c = 0$, και βρίσκουμε

$$c(x) = \int_{x_0}^x \frac{p(t)}{y_1(t)} dt, \quad x \in I.$$

Τώρα θυμόμαστε ότι η συνάρτηση $\mu(x) = e^{\int_{x_0}^x p_0(t) dt} = \frac{1}{y_1(x)}$ είναι ο γνωστός μας ολοκληρωτικός παράγων. Επομένως, $y_1(x) = \frac{1}{\mu(x)}$ και $c(x) = \int_{x_0}^x p(t)\mu(t) dt$. Άρα μία ειδική λύση της μη-ομογενούς εξίσωσης είναι η

$$y_s(x) = c(x)y_1(x) = \frac{1}{\mu(x)} \int_{x_0}^x p(t)\mu(t) dt, \quad x \in I.$$

Τέλος, η γενική λύση της μη-ομογενούς εξίσωσης είναι η

$$y(x) = y_s(x) + cy_1(x) = \frac{1}{\mu(x)} \int_{x_0}^x p(t)\mu(t) dt + \frac{c}{\mu(x)}, \quad x \in I,$$

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά. Αυτή είναι η γενική λύση την οποία βρήκαμε εξαρχής, όπως φαίνεται στον τύπο (10.1).

Αυτό το οποίο πρέπει να θυμόμαστε από αυτήν τη διαδικασία είναι (i) η εύρεση μίας λύσης $y_1(x)$ της ομογενούς εξίσωσης η οποία παράγει το σύνολο των λύσεων $y(x) = cy_1(x)$ της ομογενούς εξίσωσης, (ii) η εύρεση μίας ειδικής λύσης $y_s(x) = c(x)y_1(x)$ της μη-ομογενούς εξίσωσης με τη μέθοδο των μεταβλητών παραμέτρων και (iii) το ότι η γενική λύση της μη-ομογενούς εξίσωσης είναι η $y(x) = y_s(x) + cy_1(x)$.

Πρέπει να τονίσουμε ότι η διαδικασία την οποία περιγράψαμε στην τελευταία παράγραφο δεν έχει ιδιαίτερη αξία στην περίπτωση των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, διότι υπάρχει η απλούστερη και αμεσότερη διαδικασία μέσω του ολοκληρωτικού παράγοντα, την οποία περιγράψαμε στην αρχή αυτής της υποενότητας. Όμως, η διαδικασία με την επίλυση της ομογενούς και με την ειδική λύση της μη-ομογενούς διαφορικής εξίσωσης θα παίξει σημαντικό ρόλο στην επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης στην επόμενη ενότητα.

Ασκήσεις

10.7. Αποδείξτε ότι κάθε λύση της $y' + ky = 0$ στο $(-\infty, +\infty)$ έχει όριο 0 όταν $x \rightarrow +\infty$, αν και μόνο αν $k > 0$.

10.8. Για ποια m ισχύει ότι κάθε λύση της $y' + 3y = e^{mx}$ στο $(-\infty, +\infty)$ έχει όριο 0 όταν $x \rightarrow +\infty$;

10.9. Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης $y' + y = xe^{2x}$, $y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}$, $y' - \frac{1}{x}y = 1$, $y' + xy = x^3$, $y' + \frac{3}{x(x-1)}y = \frac{x-2}{x-1}$, $y' + y \tan x = \cos x$, $y' + y \cot x = \cos x$. Για κάθε εξίσωση βρείτε όλες τις λύσεις και τα αντίστοιχα διαστήματα.

10.10. Βρείτε τις λύσεις της $y(x) = 1 - x \int_1^x y(t) dt$ στο $(0, +\infty)$.

Υπόδειξη: Μετατρέψτε την εξίσωση σε γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης.

10.11. Μετατρέψτε τις $y' - x \cot y = \frac{x+1}{\sin y}$, $yy' + (1+x^2)y^2 = e^x$, $1 + e^y + 2xe^y y' = 0$ σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης, με κατάλληλες αλλαγές μεταβλητής, και λύστε τις.

10.12. Θεωρούμε τη γενική γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$p_1(x)y' + p_0(x)y = p(x).$$

Όπως έχουμε πει, τα σημεία στα οποία μηδενίζεται η συνάρτηση $p_1(x)$ χαρακτηρίζονται *ιδιάζοντα σημεία* της εξίσωσης. Στα επόμενα θα δούμε σχετικά παραδείγματα πάνω στη συμπεριφορά των λύσεων της εξίσωσης στα ιδιάζοντα σημεία.

(i) Αποδείξτε ότι κάθε λύση της $xy' - y = x$ είναι λύση της στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$ και ότι είναι συνεχής, αλλά όχι παραγωγίσιμη στο 0.

(ii) Αποδείξτε ότι κάθε λύση της $xy' - y = x \sin x$ είναι λύση της στο $(-\infty, +\infty)$.

(iii) Βρείτε τις λύσεις της $x(x+1)y' + y = x(x+1)^2 e^{-x^2}$. Αποδείξτε ότι ακριβώς μία λύση είναι λύση της εξίσωσης στο $(-\infty, +\infty)$ και ότι κάθε άλλη λύση είναι λύση της εξίσωσης στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$, αλλά δεν είναι συνεχής στο 0.

(iv) Βρείτε τις λύσεις της $(\sin x)y' + (\cos x)y = 2 \cos x$. Αποδείξτε ότι ακριβώς μία από τις λύσεις είναι λύση της εξίσωσης στο $(-\infty, +\infty)$ και ότι κάθε άλλη λύση είναι λύση της εξίσωσης σε κάθε διάστημα $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, αλλά δεν είναι συνεχής σε κανένα σημείο $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(v) Βρείτε τις λύσεις της $(x-2)(x-3)y' + 2y = (x-1)(x-2)$. Αποδείξτε ότι ακριβώς μία λύση είναι λύση της εξίσωσης στο $(-\infty, +\infty)$ και ότι κάθε άλλη λύση είναι λύση της εξίσωσης στο $(-\infty, 3)$ και στο $(3, +\infty)$, αλλά δεν είναι συνεχής στο 3.

10.13. Διαφορικές εξισώσεις Bernoulli. Αν $a \neq 0$, $a \neq 1$, τότε η διαφορική εξίσωση

$$y' + p(x)y = q(x)y^a$$

λύνεται με την αντικατάσταση $z = y^{1-a}$. Να λυθούν οι $y' + y = e^x \sqrt{y}$, $y - y' = xy^2$, $xy' - y = x \sqrt{y}$, $xy' + y = xy^2 \log x$.

10.14. (i) Διαφορικές εξισώσεις Riccati. Αν η $y(x)$ είναι λύση της

$$y' + p(x)y + r(x)y^2 = q(x)$$

και η $z(x)$ είναι λύση μίας κατάλληλης (ποιας;) απλής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης, αποδείξτε ότι και η $y(x) + \frac{1}{z(x)}$ είναι λύση της $y' + p(x)y + r(x)y^2 = q(x)$.

(ii) Βρείτε δύο σταθερές λύσεις της $y' + 3y - y^2 = 2$. Από καθεμία από αυτές τις λύσεις προσδιορίστε, σύμφωνα με το (i), μία αντίστοιχη οικογένεια λύσεων της $y' + 3y - y^2 = 2$. Αποδείξτε ότι οι δύο αυτές οικογένειες λύσεων είναι ίδιες, δηλαδή ότι αποτελούνται από τις ίδιες λύσεις.

(iii) Λύστε την $y' + 3y - y^2 = 2$ ως εξίσωση με χωριζόμενες μεταβλητές. Τι παρατηρείτε;

10.15. Ένα σώμα μάζας m πραγματοποιεί ελεύθερη κατακόρυφη πτώση υπό την επίδραση της σταθερής δύναμης mg της βαρύτητας και της αντίστασης του αέρα η οποία είναι ανάλογη της ταχύτητας του σώματος με σταθερά αναλογίας $k > 0$. Η θέση του σώματος αποτυπώνεται στον θετικό x -ημιάξονα τον οποίο θεωρούμε κάθετο στο έδαφος, με το σημείο 0 στο έδαφος και με κατεύθυνση προς τα πάνω.

(i) Αν $a(t)$ είναι η επιτάχυνση του σώματος και $v(t)$ είναι η ταχύτητά του κατά τη χρονική στιγμή t , αποδείξτε ότι ισχύει $ma(t) = -mg - kv(t)$ για κάθε $t \geq 0$.

(ii) Αν κατά την αρχική χρονική στιγμή 0 το ύψος του σώματος πάνω από το έδαφος είναι $s(0) = h$ και η ταχύτητά του είναι $v(0) = v_0$, βρείτε τις συναρτήσεις: ύψος $s(t)$, ταχύτητα $v(t)$ και επιτάχυνση $a(t)$ του σώματος.

(iii) Αποδείξτε ότι κάποια χρονική στιγμή το σώμα θα φτάσει στο έδαφος.

10.16. Ο νόμος ψύξης του Newton λέει ότι ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας ενός σώματος είναι ανάλογος της διαφοράς θερμοκρασίας ανάμεσα στο σώμα και στο περιβάλλον, με μία σταθερά αναλογίας $-k < 0$.

(i) Αν $T(t)$ και $\Theta(t)$ είναι οι θερμοκρασίες του σώματος και του περιβάλλοντος, αντιστοίχως, τη χρονική στιγμή t , αποδείξτε ότι ισχύει $T'(t) = -k(T(t) - \Theta(t))$ για κάθε t .

(ii) Αν $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Theta(t) = \Theta_\infty$, αποδείξτε ότι $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) = \Theta_\infty$.

10.17. Ένα απλό κλειστό ηλεκτρικό κύκλωμα περιλαμβάνει μία πηγή ρεύματος η οποία κάθε χρονική στιγμή t παράγει τάση $V(t)$, ένα πηνίο με επαγωγή $L > 0$ και μία αντίσταση $R > 0$. Αν $I(t)$ είναι το ρεύμα το οποίο κυκλοφορεί στο κύκλωμα τη χρονική στιγμή t , τότε ο νόμος του Kirchhoff λέει ότι ισχύει $LI'(t) + RI(t) = V(t)$ κάθε χρονική στιγμή t .

(i) Αν $I(0) = I_0$, βρείτε τη συνάρτηση $I(t)$.

(ii) Αν $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) = V_\infty$, βρείτε το $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t)$.

10.18. Ο νόμος διάσπασης μιας ραδιενεργού ουσίας λέει ότι κάθε χρονική στιγμή η ταχύτητα διάσπασης της ουσίας είναι ανάλογη, με κάποια σταθερά αναλογίας $k > 0$ η οποία εξαρτάται από τη συγκεκριμένη ουσία, της ποσότητας της ουσίας η οποία έχει απομείνει μέχρι εκείνη τη στιγμή.

(i) Αν $q(t)$ είναι ποσότητα της ραδιενεργού ουσίας η οποία έχει απομείνει τη χρονική στιγμή t , αποδείξτε ότι ισχύει $q'(t) = -kq(t)$ για κάθε t .

(ii) Αν q_0 είναι η ποσότητα της ουσίας κατά τη χρονική στιγμή 0, βρείτε το $q(t)$.

(iii) Βρείτε τον χρόνο T ο οποίος χρειάζεται ώστε από τη χρονική στιγμή t_0 μέχρι τη χρονική στιγμή $t_0 + T$ να υποδιπλασιαστεί η ποσότητα της ουσίας. Αποδείξτε ότι ο χρόνος T , ο οποίος ονομάζεται **χρόνος ημιζωής** της ουσίας, είναι ανεξάρτητος του t_0 .

10.4 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης

10.4.1 Η γενική περίπτωση

Θα μελετήσουμε τη «γενική» γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = p(x),$$

όπου οι συναρτήσεις $p_1(x)$, $p_0(x)$, $p(x)$ ορίζονται σε κάποιο διάστημα I . Όπως στην ανάλογη περίπτωση με τις εξισώσεις πρώτης τάξης, βάζουμε σε εισαγωγικά το «γενική», διότι η γενική εξίσωση έχει τη μορφή $p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = p(x)$. Αν η $p_2(x)$ δεν μηδενίζεται στο I , τότε η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $y'' + \frac{p_1(x)}{p_2(x)}y' + \frac{p_0(x)}{p_2(x)}y = \frac{p(x)}{p_2(x)}$ και, αλλάζοντας τα σύμβολα των συναρτήσεων, καταλήγουμε στη μορφή της εξίσωσης την οποία γράψαμε παραπάνω. Αν, όμως, η $p_2(x)$ μηδενίζεται σε κάποια σημεία του I , τα λεγόμενα **ιδιάζοντα σημεία** της διαφορικής εξίσωσης, τότε δεν μπορούμε να διαιρέσουμε και χάνουμε τη γενικότητα. Και πάλι, για λόγους απλότητας, δεν θα ασχοληθούμε με τέτοιες περιπτώσεις.

Κατ' αρχάς, για την ομογενή εξίσωση $y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$ έχουμε το εξής αποτέλεσμα, το οποίο δεν θα αποδείξουμε.

Πρόταση 10.4. Έστω ότι οι $p_1(x), p_0(x)$ είναι συνεχείς στο διάστημα I . Τότε για κάθε $x_0 \in I$ και για κάθε ζευγάρι αριθμών y_0, y'_0 υπάρχει μοναδική λύση $y(x)$ στο διάστημα I της ομογενούς εξίσωσης $y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$, τέτοια ώστε $y(x_0) = y_0$ και $y'(x_0) = y'_0$.

Η Πρόταση 10.4 αναφέρεται σε ένα πρόβλημα **αρχικών τιμών** με *αρχικές συνθήκες* $y(x_0) = y_0$ και $y'(x_0) = y'_0$.

Ορισμός 10.5. Έστω συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο διάστημα I . Η συνάρτηση $W(f, g)$ με τύπο

$$W(f, g)(x) = \det \begin{bmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{bmatrix} = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$$

ονομάζεται **ορίζουσα Wronski** των f, g στο διάστημα I .

Πρόταση 10.5. Έστω ότι οι $p_1(x), p_0(x)$ είναι συνεχείς στο διάστημα I . Αν οι $y_1(x), y_2(x)$ είναι λύσεις της ομογενούς εξίσωσης $y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$ στο I , τότε η $W(y_1, y_2)(x)$ είναι λύση της ομογενούς εξίσωσης πρώτης τάξης $y' + p_1(x)y = 0$ στο I . Επομένως,

$$W(y_1, y_2)(x) = ce^{-\int_{x_0}^x p_1(t) dt}, \quad x \in I,$$

για κάποια κατάλληλη σταθερά c .

(i) Αν $c = 0$, τότε μία από τις $y_1(x), y_2(x)$ είναι σταθερό πολλαπλάσιο της άλλης στο I .

(ii) Αν $c \neq 0$, τότε καμία από τις $y_1(x), y_2(x)$ δεν είναι σταθερό πολλαπλάσιο της άλλης στο I . Επίσης, για κάθε λύση $y(x)$ της ομογενούς εξίσωσης $y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$ υπάρχουν σταθερές c_1, c_2 ώστε να ισχύει $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ για κάθε $x \in I$.

Απόδειξη. Κατ' αρχάς,

$$\begin{aligned} & W(y_1, y_2)'(x) + p_1(x)W(y_1, y_2)(x) \\ &= (y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x))' + p_1(x)(y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)) \\ &= y_1(x)y_2''(x) - y_1'(x)y_2'(x) + p_1(x)y_1(x)y_2'(x) - p_1(x)y_1'(x)y_2(x) \\ &= y_1(x)(y_2''(x) + p_1(x)y_2'(x) + p_0(x)y_2(x)) - y_2(x)(y_1''(x) + p_1(x)y_1'(x) + p_0(x)y_1(x)) \\ &= y_1(x) \cdot 0 - y_2(x) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

για κάθε $x \in I$. Άρα, σύμφωνα με τον τύπο (10.2), υπάρχει σταθερά c ώστε να είναι

$$W(y_1, y_2)(x) = ce^{-\int_{x_0}^x p_1(t) dt}$$

για κάθε $x \in I$.

(i) Έστω $c = 0$, οπότε ισχύει

$$y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = W(y_1, y_2)(x) = 0$$

για κάθε $x \in I$.

Αν η $y_1(x)$ είναι η μηδενική συνάρτηση στο I , τότε ισχύει $y_1(x) = 0 \cdot y_2(x)$ για κάθε $x \in I$, οπότε η $y_1(x)$ είναι σταθερό πολλαπλάσιο της $y_2(x)$ στο I .

Αν η $y_1(x)$ δεν είναι η μηδενική συνάρτηση στο I , τότε υπάρχει $x_0 \in I$ ώστε $y_1(x_0) \neq 0$. Τότε ορίζουμε $\lambda = \frac{y_2(x_0)}{y_1(x_0)}$ και παρατηρούμε ότι σύμφωνα με την Πρόταση 10.1 η $y(x) = y_2(x) - \lambda y_1(x)$ είναι λύση της ομογενούς εξίσωσης $y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$. Επίσης, είναι

$$y(x_0) = y_2(x_0) - \frac{y_2(x_0)}{y_1(x_0)} y_1(x_0) = 0,$$

καθώς και

$$y'(x_0) = y'_2(x_0) - \frac{y_2(x_0)}{y_1(x_0)} y'_1(x_0) = \frac{y_1(x_0)y'_2(x_0) - y'_1(x_0)y_2(x_0)}{y_1(x_0)} = \frac{W(y_1, y_2)(x_0)}{y_1(x_0)} = 0.$$

Άρα η λύση $y(x)$ της ομογενούς εξίσωσης ικανοποιεί τις $y(x_0) = 0$ και $y'(x_0) = 0$. Όμως, και η μηδενική συνάρτηση είναι λύση της ομογενούς εξίσωσης και ικανοποιεί τις ίδιες συνθήκες στο x_0 . Από την Πρόταση 10.4 συνεπάγεται ότι οι δύο αυτές λύσεις της ομογενούς εξίσωσης ταυτίζονται, οπότε ισχύει $y_2(x) - \lambda y_1(x) = 0$ για κάθε $x \in I$. Άρα η $y_2(x)$ είναι σταθερό πολλαπλάσιο της $y_1(x)$ στο I .

(ii) Έστω $c \neq 0$. Υποθέτουμε ότι μία από τις $y_1(x), y_2(x)$ είναι σταθερό πολλαπλάσιο της άλλης στο I , για παράδειγμα $y_2(x) = \lambda y_1(x)$ για κάθε $x \in I$. Τότε

$$W(y_1, y_2)(x) = y_1(x)y'_2(x) - y'_1(x)y_2(x) = \lambda y_1(x)y'_1(x) - \lambda y'_1(x)y_1(x) = 0$$

για κάθε $x \in I$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

Τέλος, έστω οποιαδήποτε λύση $y(x)$ της ομογενούς εξίσωσης. Είναι σαφές ότι το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) &= y(x_0) \\ c_1 y'_1(x_0) + c_2 y'_2(x_0) &= y'(x_0) \end{aligned}$$

έχει μοναδική λύση ως προς τα c_1, c_2 , διότι η ορίζουσά του είναι $W(y_1, y_2)(x_0) = c \neq 0$. Τώρα, όμως, βλέπουμε ότι, με τις τιμές των c_1, c_2 οι οποίες προκύπτουν από το παραπάνω σύστημα, οι συναρτήσεις $y(x)$ και $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ είναι λύσεις της ομογενούς εξίσωσης, ότι έχουν ίδιες τιμές στο x_0 και ότι και οι παράγωγοί τους έχουν ίδιες τιμές στο x_0 . Πάλι από την Πρόταση 10.4 συνεπάγεται ότι οι δύο συναρτήσεις ταυτίζονται στο διάστημα I , δηλαδή ότι ισχύει $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ για κάθε $x \in I$. $\square$

Παρατηρήστε ότι ένα από τα πορίσματα της Πρότασης 10.5 είναι ότι η ορίζουσα Wronski δύο λύσεων της ομογενούς εξίσωσης είτε είναι σταθερή 0 στο διάστημα I είτε δεν μηδενίζεται πουθενά στο I .

Επιμένοντας στην περίπτωση (ii) της Πρότασης 10.5, παρατηρούμε ότι σύμφωνα με την Πρόταση 10.1 κάθε γραμμικός συνδυασμός $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ είναι λύση της ομογενούς εξίσωσης, αλλά και ότι σύμφωνα με την Πρόταση 10.5, αντιστρόφως, κάθε λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι γραμμικός συνδυασμός $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$. Δηλαδή, το σύνολο των λύσεων της ομογενούς εξίσωσης αποτελείται από τους γραμμικούς συνδυασμούς $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ και από καμία άλλη συνάρτηση. Από την άλλη μεριά, η Πρόταση 10.5 λέει επίσης ότι καμία από τις $y_1(x), y_2(x)$ δεν είναι σταθερό πολλαπλάσιο της άλλης στο I . Με τη γλώσσα της Γραμμικής Άλγεβρας, όλα αυτά λένε ότι ο γραμμικός χώρος των λύσεων της ομογενούς εξίσωσης παράγεται από δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις, τις $y_1(x), y_2(x)$, οι οποίες αποτελούν βάση του, οπότε έχει διάσταση 2.

Τώρα αναρωτιόμαστε: υπάρχουν δύο τέτοιες γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς εξίσωσης; Με άλλα λόγια, υπάρχουν δύο λύσεις $y_1(x), y_2(x)$ της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης $y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$ με την ιδιότητα η ορίζουσα Wronski $W(y_1, y_2)(x)$ να μην μηδενίζεται πουθενά στο διάστημα I ; Η απάντηση είναι θετική και η ύπαρξη δύο τέτοιων λύσεων εξασφαλίζεται από την Πρόταση 10.4. Πράγματι, η Πρόταση 10.4 λέει ότι υπάρχουν μοναδικές λύσεις $y_1(x), y_2(x)$ της ομογενούς εξίσωσης ώστε

$$y_1(x_0) = 1, \quad y'_1(x_0) = 0 \quad \text{και} \quad y_2(x_0) = 0, \quad y'_2(x_0) = 1.$$

Τότε γι' αυτές τις δύο λύσεις έχουμε

$$W(y_1, y_2)(x_0) = y_1(x_0)y'_2(x_0) - y'_1(x_0)y_2(x_0) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 \neq 0,$$

οπότε ισχύει $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$.

Συνοψίζουμε:

Αν οι $p_1(x), p_0(x)$ είναι συνεχείς στο διάστημα I , τότε ο γραμμικός χώρος των λύσεων της ομογενούς εξίσωσης $y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$ στο I έχει διάσταση 2, δηλαδή υπάρχουν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις $y_1(x), y_2(x)$ οι οποίες παράγουν τον χώρο των λύσεων. Αυτό σημαίνει ότι καμία από τις λύσεις $y_1(x), y_2(x)$ δεν είναι σταθερό πολλαπλάσιο της άλλης και ότι για κάθε λύση $y(x)$ υπάρχουν σταθερές c_1, c_2 ώστε να ισχύει $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ για κάθε $x \in I$.

Τέλος, θεωρούμε τη μη-ομογενή εξίσωση

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = p(x),$$

όπου οι συναρτήσεις $p_1(x), p_0(x), p(x)$ είναι συνεχείς στο διάστημα I . Υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε δύο λύσεις $y_1(x), y_2(x)$ της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης $y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$ με την ιδιότητα η ορίζουσα Wronski $W(y_1, y_2)(x)$ να μην μηδενίζεται πουθενά στο I ή, ισοδύναμα, οι δύο αυτές λύσεις να παράγουν τον χώρο των λύσεων της ομογενούς εξίσωσης. Τότε βάσει των προηγούμενων γνωρίζουμε όλες τις λύσεις της ομογενούς εξίσωσης, οπότε για να βρούμε τη γενική λύση της μη-ομογενούς εξίσωσης είναι αρκετό να βρούμε μία ειδική λύση $y_s(x)$ της μη-ομογενούς εξίσωσης. Όπως στην περίπτωση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης, θα εφαρμόσουμε τη **μέθοδο των μεταβλητών παραμέτρων**. Αυτό γίνεται ως εξής. Η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι ο γενικός γραμμικός συνδυασμός $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, όπου οι c_1, c_2 είναι σταθεροί αριθμοί. Αντικαθιστούμε αυτές τις σταθερές με συναρτήσεις $c_1(x), c_2(x)$, υποθέτουμε ότι η συνάρτηση

$$y_s(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x), \quad x \in I,$$

είναι λύση της μη-ομογενούς εξίσωσης, δηλαδή ότι

$$y_s''(x) + p_1(x)y_s'(x) + p_0(x)y_s(x) = p(x)$$

για κάθε $x \in I$, και υπολογίζουμε τις κατάλληλες συναρτήσεις $c_1(x), c_2(x)$ για να ισχύει αυτό.

Παραγωγίζοντας την $y_s(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$, βρίσκουμε

$$y_s'(x) = (c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x)) + (c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x)).$$

Για να απλοποιήσουμε τον υπολογισμό της δεύτερης παραγώγου, υποθέτουμε ότι οι προσδιοριστές συναρτήσεις $c_1(x), c_2(x)$ ικανοποιούν τη σχέση

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \quad (10.3)$$

για κάθε $x \in I$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε

$$y_s'(x) = c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x),$$

οπότε

$$y_s''(x) = (c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x)) + (c_1(x)y_1''(x) + c_2(x)y_2''(x)).$$

Άρα

$$\begin{aligned} y_s''(x) + p_1(x)y_s'(x) + p_0(x)y_s(x) &= (c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x)) + (c_1(x)y_1''(x) + c_2(x)y_2''(x)) \\ &\quad + p_1(x)(c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x)) \\ &\quad + p_0(x)(c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)) \\ &= (c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x)) \\ &\quad + c_1(x)(y_1''(x) + p_1(x)y_1'(x) + p_0(x)y_1(x)) \\ &\quad + c_2(x)(y_2''(x) + p_1(x)y_2'(x) + p_0(x)y_2(x)) \\ &= c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x). \end{aligned}$$

Επομένως, η $y_s''(x) + p_1(x)y_s'(x) + p_0(x)y_s(x) = p(x)$ για κάθε $x \in I$ γράφεται ισοδύναμα

$$c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = p(x) \quad (10.4)$$

για κάθε $x \in I$. Άρα οι προσδιοριστέες συναρτήσεις $c_1(x), c_2(x)$ ικανοποιούν το σύστημα της (10.3) και της (10.4), δηλαδή το

$$\begin{aligned} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) &= 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) &= p(x) \end{aligned}$$

για $x \in I$. Αφού παρατηρήσουμε ότι η ορίζουσα του συστήματος αυτού είναι ακριβώς η ορίζουσα Wronski $W(y_1, y_2)(x)$, λύνουμε με στοιχειώδη τρόπο το σύστημα και βρίσκουμε

$$c_1'(x) = -\frac{p(x)y_2(x)}{W(y_1, y_2)(x)}, \quad c_2'(x) = \frac{p(x)y_1(x)}{W(y_1, y_2)(x)}$$

για κάθε $x \in I$. Άρα ένα ζευγάρι συναρτήσεων $c_1(x), c_2(x)$ είναι το

$$c_1(x) = -\int_{x_0}^x \frac{p(t)y_2(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt, \quad c_2(x) = \int_{x_0}^x \frac{p(t)y_1(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt, \quad x \in I,$$

όπου x_0 είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του I . Άρα μία ειδική λύση της μη-ομογενούς εξίσωσης είναι η

$$y_s(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) = \int_{x_0}^x \frac{p(t)(y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t))}{W(y_1, y_2)(t)} dt, \quad x \in I,$$

οπότε η γενική λύση της μη-ομογενούς εξίσωσης είναι η

$$y(x) = \int_{x_0}^x \frac{p(t)(y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t))}{W(y_1, y_2)(t)} dt + c_1y_1(x) + c_2y_2(x), \quad x \in I$$

με αυθαίρετες σταθερές c_1, c_2 .

Όπως στην περίπτωση των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, έχουμε πάλι το εξής προσαρμοσμένο σχήμα: (i) βρίσκουμε δύο λύσεις $y_1(x), y_2(x)$ της ομογενούς εξίσωσης οι οποίες παράγουν το σύνολο των λύσεων $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ της ομογενούς εξίσωσης, (ii) βρίσκουμε μία ειδική λύση $y_s(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$ της μη-ομογενούς εξίσωσης με τη μέθοδο των μεταβλητών παραμέτρων και (iii) καταλήγουμε στο ότι η γενική λύση της μη-ομογενούς εξίσωσης είναι η $y_s(x) + c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$.

10.4.2 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Επειδή η μελέτη της γενικής περίπτωσης βασίστηκε σε σημαντικό βαθμό στην αναπόδεικτη Πρόταση 10.4, θα εξετάσουμε τώρα με πλήρεις αποδείξεις την ειδική, αλλά χρήσιμη, περίπτωση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης

$$y'' + ky' + ly = p(x)$$

όπου k, l είναι σταθερές συναρτήσεις και η $p(x)$ είναι συνεχής σε ένα διάστημα I .

Πρώτα θα ασχοληθούμε με την ομογενή εξίσωση

$$y'' + ky' + ly = 0$$

στο $(-\infty, +\infty)$. Θα περιγράψουμε δύο τρόπους επίλυσης της εξίσωσης: τον *αργό*, «εκ του μηδενός», και τον *γρήγορο*.

Ο αργός τρόπος επίλυσης της ομογενούς εξίσωσης. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις ανάλογα με τον αριθμό πραγματικών ή μιγαδικών λύσεων της αλγεβρικής εξίσωσης δεύτερου βαθμού $t^2 + kt + l = 0$. *Περίπτωση 1.* Έστω $k^2 - 4l > 0$, οπότε η $t^2 + kt + l = 0$ έχει δύο πραγματικές λύσεις, έστω κ_1, κ_2 . Τότε $k = -\kappa_1 - \kappa_2$ και $l = \kappa_1\kappa_2$ και η εξίσωση γράφεται $y'' - (\kappa_1 + \kappa_2)y' + \kappa_1\kappa_2y = 0$. Αν $y(x)$ είναι η γενική λύση, τότε, θεωρώντας $x_0 = 0$ και χρησιμοποιώντας τους τύπους (10.1) και (10.2) για

τις λύσεις της διαφορικής εξίσωσης $y' + p_0(x)y = p(x)$ και της αντίστοιχης ομογενούς, έχουμε τις διαδοχικές ισοδύναμες ισότητες

$$\begin{aligned} y''(x) - (\kappa_1 + \kappa_2)y'(x) + \kappa_1\kappa_2y(x) &= 0 \\ (y'(x) - \kappa_1y(x))' - \kappa_2(y'(x) - \kappa_1y(x)) &= 0 \\ y'(x) - \kappa_1y(x) &= ce^{\kappa_2x} \\ y(x) &= e^{\kappa_1x} \int_0^x ce^{\kappa_2t} e^{-\kappa_1t} dt + de^{\kappa_1x} \\ &= c \frac{e^{\kappa_2x} - e^{\kappa_1x}}{\kappa_2 - \kappa_1} + de^{\kappa_1x} \\ &= \frac{c}{\kappa_2 - \kappa_1} e^{\kappa_2x} + \left(d - \frac{c}{\kappa_2 - \kappa_1}\right) e^{\kappa_1x} \\ &= c_1 e^{\kappa_1x} + c_2 e^{\kappa_2x}, \end{aligned}$$

όπου οι c, d και, κατόπιν, οι c_1, c_2 είναι δύο αυθαίρετες σταθερές. Δηλαδή, η γενική λύση είναι η

$$y(x) = c_1 e^{\kappa_1x} + c_2 e^{\kappa_2x}.$$

Με $c_1 = 1, c_2 = 0$ και μετά με $c_1 = 0, c_2 = 1$ βρίσκουμε τις λύσεις $y_1(x) = e^{\kappa_1x}$ και $y_2(x) = e^{\kappa_2x}$ και βλέπουμε ότι η γενική λύση είναι ο γενικός γραμμικός συνδυασμός των δύο αυτών λύσεων. Δηλαδή, οι δύο λύσεις e^{κ_1x} και e^{κ_2x} αποτελούν βάση του χώρου των λύσεων της ομογενούς εξίσωσης. Αυτό μπορούμε να το επιβεβαιώσουμε υπολογίζοντας την ορίζουσα Wronski:

$$W(y_1, y_2)(x) = (\kappa_2 - \kappa_1)e^{(\kappa_1 + \kappa_2)x},$$

η οποία είναι $\neq 0$ για κάθε x .

Με τη μέθοδο των μεταβλητών παραμέτρων (λύστε το εσείς) υπολογίζουμε την ειδική λύση της μη-ομογενούς εξίσωσης στο I

$$y_s(x) = \int_{x_0}^x \frac{e^{\kappa_2(x-t)} - e^{\kappa_1(x-t)}}{\kappa_2 - \kappa_1} p(t) dt,$$

οπότε η γενική λύση της μη-ομογενούς εξίσωσης είναι η

$$y(x) = \int_{x_0}^x \frac{e^{\kappa_2(x-t)} - e^{\kappa_1(x-t)}}{\kappa_2 - \kappa_1} p(t) dt + c_1 e^{\kappa_1x} + c_2 e^{\kappa_2x}, \quad x \in I,$$

όπου x_0 είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του I και c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

Περίπτωση 2. Έστω $k^2 - 4l = 0$, οπότε η $t^2 + kt + l = 0$ έχει μία μοναδική λύση, έστω κ . Τότε $k = -2\kappa$ και $l = \kappa^2$ και η εξίσωση γράφεται $y'' - 2\kappa y' + \kappa^2 y = 0$. Αν $y(x)$ είναι η γενική λύση, τότε, περίπου όπως πριν, έχουμε τις διαδοχικές ισοδύναμες ισότητες

$$\begin{aligned} y''(x) - 2\kappa y'(x) + \kappa^2 y(x) &= 0 \\ (y'(x) - \kappa y(x))' - \kappa(y'(x) - \kappa y(x)) &= 0 \\ y'(x) - \kappa y(x) &= ce^{\kappa x} \\ y(x) &= e^{\kappa x} \int_0^x ce^{\kappa t} e^{-\kappa t} dt + de^{\kappa x} \\ &= c_1 e^{\kappa x} + c_2 x e^{\kappa x}, \end{aligned}$$

όπου οι c, d και, κατόπιν, οι c_1, c_2 είναι δύο αυθαίρετες σταθερές. Άρα η γενική λύση είναι η

$$y(x) = c_1 e^{\kappa x} + c_2 x e^{\kappa x}.$$

Πάλι, με $c_1 = 1, c_2 = 0$ και μετά με $c_1 = 0, c_2 = 1$ βρίσκουμε τις $y_1(x) = e^{\kappa x}$ και $y_2(x) = x e^{\kappa x}$ και έχουμε τη γενική λύση ως τον γενικό γραμμικό συνδυασμό αυτών των λύσεων. Δηλαδή, οι δύο λύσεις $e^{\kappa x}$ και $x e^{\kappa x}$ αποτελούν βάση του χώρου των λύσεων της ομογενούς εξίσωσης. Και πάλι αυτό επιβεβαιώνεται υπολογίζοντας την ορίζουσα Wronski:

$$W(f_1, f_2)(x) = e^{2\kappa x},$$

η οποία είναι $\neq 0$ για κάθε x .

Μία ειδική λύση της μη-ομογενούς εξίσωσης στο διάστημα I είναι η

$$y_s(x) = \int_{x_0}^x (x-t)e^{\kappa(x-t)} p(t) dt$$

(βρείτε τη με τη μέθοδο των μεταβλητών παραμέτρων), οπότε η γενική λύση της μη-ομογενούς εξίσωσης είναι η

$$y(x) = \int_{x_0}^x (x-t)e^{\kappa(x-t)} p(t) dt + c_1 e^{\kappa x} + c_2 x e^{\kappa x}, \quad x \in I,$$

όπου x_0 είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του I και c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

Περίπτωση 3. Έστω $k^2 - 4l < 0$, οπότε η $t^2 + kt + l = 0$ έχει δυο συζυγείς μιγαδικές λύσεις, έστω $\kappa + i\lambda$ και $\kappa - i\lambda$ με $\lambda > 0$. Τότε $k = -2\kappa$ και $l = \kappa^2 + \lambda^2$, οπότε η εξίσωση γράφεται $y'' - 2\kappa y' + (\kappa^2 + \lambda^2)y = 0$. Αν $y(x)$ είναι η γενική λύση, δηλαδή αν

$$y''(x) - 2\kappa y'(x) + (\kappa^2 + \lambda^2)y(x) = 0,$$

και αν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση με την $e^{-\kappa x}$ και ορίσουμε $z(x) = e^{-\kappa x}y(x)$, καταλήγουμε (πώς;) στην ισοδύναμη

$$z''(x) + \lambda^2 z(x) = 0.$$

Πολλαπλασιάζοντας με τα $\sin(\lambda x)$ και $\cos(\lambda x)$, βρίσκουμε (πώς;) τις

$$(z'(x) \sin(\lambda x) - \lambda z(x) \cos(\lambda x))' = 0,$$

$$(z'(x) \cos(\lambda x) + \lambda z(x) \sin(\lambda x))' = 0,$$

δηλαδή τις

$$z'(x) \sin(\lambda x) - \lambda z(x) \cos(\lambda x) = c,$$

$$z'(x) \cos(\lambda x) + \lambda z(x) \sin(\lambda x) = d,$$

με αυθαίρετες σταθερές c, d . Λύνουμε αυτό το σύστημα ως προς $z(x), z'(x)$ και βρίσκουμε

$$z(x) = -\frac{c}{\lambda} \cos(\lambda x) + \frac{d}{\lambda} \sin(\lambda x) = c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \sin(\lambda x)$$

και, τέλος, τη γενική λύση

$$y(x) = c_1 e^{\kappa x} \cos(\lambda x) + c_2 e^{\kappa x} \sin(\lambda x),$$

όπου οι c_1, c_2 είναι δύο αυθαίρετες σταθερές.

Με $c_1 = 1, c_2 = 0$ και μετά με $c_1 = 0, c_2 = 1$ βρίσκουμε τις λύσεις $y_1(x) = e^{\kappa x} \cos(\lambda x)$ και $y_2(x) = e^{\kappa x} \sin(\lambda x)$ και η γενική λύση είναι ο γενικός γραμμικός συνδυασμός αυτών των δύο λύσεων. Δηλαδή, οι δύο λύσεις $e^{\kappa x} \cos(\lambda x)$ και $e^{\kappa x} \sin(\lambda x)$ αποτελούν βάση του χώρου των λύσεων της ομογενούς εξίσωσης. Και πάλι αυτό επιβεβαιώνεται από την ορίζουσα Wronski:

$$W(y_1, y_2)(x) = \lambda e^{2\kappa x},$$

η οποία είναι πάλι $\neq 0$ για κάθε x .

Μία ειδική λύση της μη-ομογενούς εξίσωσης είναι η

$$y_s(x) = \int_{x_0}^x e^{\kappa(x-t)} \frac{\sin(\lambda(x-t))}{\lambda} p(t) dt$$

(θα τη βρείτε με τη μέθοδο των μεταβλητών παραμέτρων), οπότε η γενική λύση της μη-ομογενούς εξίσωσης είναι η

$$y(x) = \int_{x_0}^x e^{\kappa(x-t)} \frac{\sin(\lambda(x-t))}{\lambda} p(t) dt + c_1 e^{\kappa x} \cos(\lambda x) + c_2 e^{\kappa x} \sin(\lambda x), \quad x \in I$$

όπου x_0 είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του I και c_1, c_2 είναι δύο αυθαίρετες σταθερές.

Ο γρήγορος τρόπος επίλυσης της ομογενούς εξίσωσης. Υποθέτουμε ότι η

$$y(x) = e^{ax}$$

είναι λύση της ομογενούς εξίσωσης $y'' + ky' + ly = 0$ και υπολογίζουμε τον κατάλληλο αριθμό a . Θέτουμε την $y(x) = e^{ax}$ στην εξίσωση $y'' + ky' + ly = 0$ και βρίσκουμε τις διαδοχικές ισοδύναμες ισότητες

$$a^2 e^{ax} + kae^{ax} + le^{ax} = 0$$

$$a^2 + ka + l = 0.$$

Άρα ο κατάλληλος αριθμός a πρέπει να είναι λύση της αλγεβρικής εξίσωσης $t^2 + kt + l = 0$. Έτσι καταλήγουμε στις τρεις περιπτώσεις τις οποίες εξετάσαμε προηγουμένως.

Αν $k^2 - 4l > 0$, τότε η $t^2 + kt + l = 0$ έχει δύο πραγματικές λύσεις, έστω k_1, k_2 , και βρίσκουμε τις αντίστοιχες λύσεις $y_1(x) = e^{k_1 x}$ και $y_2(x) = e^{k_2 x}$.

Αν $k^2 - 4l = 0$, τότε η $t^2 + kt + l = 0$ έχει μόνο μία λύση, έστω k , και βρίσκουμε την αντίστοιχη λύση $y_1(x) = e^{kx}$. Μία δεύτερη λύση είναι η $y_2(x) = xe^{kx}$ την οποία μπορούμε να δικαιολογήσουμε με τη μέθοδο των μεταβλητών παραμέτρων. Λύστε το εσείς θεωρώντας ότι μία δεύτερη λύση είναι η $y_2(x) = c(x)e^{kx}$ και δοκιμάζοντάς τη στη διαφορική εξίσωση.

Αν $k^2 - 4l < 0$, τότε η $t^2 + kt + l = 0$ έχει δύο συζυγείς μιγαδικές λύσεις, έστω $k + i\lambda$ και $k - i\lambda$ με $\lambda > 0$, και βρίσκουμε τις αντίστοιχες λύσεις

$$z_1(x) = e^{(k+i\lambda)x} = e^{kx}(\cos(\lambda x) + i \sin(\lambda x)), \quad z_2(x) = e^{(k-i\lambda)x} = e^{kx}(\cos(\lambda x) - i \sin(\lambda x)).$$

Αυτές οι δύο λύσεις είναι μιγαδικές και για να βρούμε πραγματικές λύσεις σκεφτόμαστε ότι κάθε γραμμικός συνδυασμός αυτών των λύσεων είναι επίσης λύση. Άρα οι

$$y_1(x) = \frac{1}{2} z_1(x) + \frac{1}{2} z_2(x) = e^{kx} \cos(\lambda x), \quad y_2(x) = \frac{1}{2i} z_1(x) - \frac{1}{2i} z_2(x) = e^{kx} \sin(\lambda x)$$

είναι οι δύο λύσεις τις οποίες ψάχνουμε.

Έχοντας βρει, σε κάθε περίπτωση, τις δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς εξίσωσης, ίδιες με αυτές που βρήκαμε με τον αργό τρόπο, μπορούμε να βρούμε τη γενική λύση της μη-ομογενούς εξίσωσης ακριβώς όπως κάναμε με τον αργό τρόπο, δηλαδή με τη μέθοδο των μεταβλητών παραμέτρων.

Ασκήσεις

10.19. Βρείτε k και l ώστε η $y'' + ky' + ly = 0$ να έχει ως λύση στο $(-\infty, +\infty)$

(i) την $y(x) = e^{-x} + 3e^{2x}$.

(ii) την $y(x) = (1 + 2x)e^x$.

(iii) την $y(x) = e^{-2x} \sin(3x)$.

Ποια είναι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης σε κάθε περίπτωση;

10.20. Αποδείξτε ότι κάθε λύση $y(x)$ της $y'' + ky' + ly = 0$ στο $(-\infty, +\infty)$ έχει όριο 0 όταν $x \rightarrow +\infty$, αν και μόνο αν $k > 0, l > 0$.

10.21. Ποιες είναι οι λύσεις της $y'' + ky' + ly = 0$ οι οποίες έχουν όριο 0 όταν $x \rightarrow \pm\infty$;

10.22. Λύστε τις διαφορικές εξισώσεις $y'' - 5y' + 6y = x$, $y'' - 4y' + 3y = e^x$, $y'' - 2y' + y = 4$, $y'' + 6y' + 9y = xe^{3x}$, $y'' + 2y' + 2 = \sin x$, $y'' - 2y' + 5y = \sin(2x)$.

10.23. Για καθεμία από τις διαφορικές εξισώσεις $y'' + 4y' + 3y = e^{mx}$, $y'' + 6y' + 9y = e^{mx}$, $y'' + 2y' + 5y = e^{mx}$ βρείτε τις τιμές του m για τις οποίες κάθε λύση έχει όριο 0 όταν $x \rightarrow +\infty$. Τι συμβαίνει για τις υπόλοιπες τιμές του m ;

10.24. (i) Έστω $y_1(x)$ μία μη-μηδενική λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης $y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$ στο διάστημα I , όπου οι $p_1(x), p_0(x)$ είναι συνεχείς στο I . Υποθέστε ότι η $y_2(x) = c(x)y_1(x)$ είναι και αυτή λύση της ομογενούς εξίσωσης στο διάστημα I και αποδείξτε ότι η $c'(x)$ είναι λύση μίας συγκεκριμένης γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης. Κατόπιν, βρείτε μία συνάρτηση $c(x)$ έτσι ώστε οι $y_1(x)$ και $y_2(x) = c(x)y_1(x)$ να είναι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς εξίσωσης.

(ii) Δεδομένου ότι η $4x^2y'' + 4xy' - y = 0$ έχει μια λύση της μορφής $y_1(x) = x^a$, βρείτε τη γενική λύση της $4x^2y'' + 4xy' - y = 0$.

(iii) Δεδομένου ότι η $(2x - 3x^3)y'' + 4y' + 6xy = 0$ έχει μια λύση η οποία είναι πολυώνυμο του x , βρείτε τη γενική λύση της $(2x - 3x^3)y'' + 4y' + 6xy = 0$.

(iv) Βρείτε εύκολα μια λύση της $y'' - 4y' + x^2(y' - 4y) = 0$ και, εφαρμόζοντας την προηγούμενη μέθοδο, βρείτε τη γενική λύση της $y'' - 4y' + x^2(y' - 4y) = 2xe^{-\frac{x^2}{3}}$.

(v) Δεδομένου ότι η $xy'' - 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$ έχει μια λύση της μορφής $y_1(x) = e^{ax}$, βρείτε τη γενική λύση της $xy'' - 2(x+1)y' + (x+2)y = x^3e^{2x}$.

10.25. Βρείτε όλες τις τιμές της σταθεράς l ώστε η διαφορική εξίσωση $y'' + ly = 0$ να έχει μη-μηδενική λύση $y(x)$ με την ιδιότητα $y(0) = y(1) = 0$.

10.26. Θεωρήστε τη διαφορική εξίσωση $y'' + \lambda^2 y = 0$ με $\lambda > 0$. Βρείτε μια συνθήκη για τη διαφορά $x_2 - x_1$ η οποία είναι ισοδύναμη με το ότι για κάθε y_1, y_2 υπάρχει ακριβώς μία λύση $y(x)$ της εξίσωσης ώστε $y(x_1) = y_1$ και $y(x_2) = y_2$.

10.27. Ένα σώμα μάζας m κινείται πάνω σε μία ευθεία υπό την επίδραση μίας δύναμης η οποία έχει κατεύθυνση προς το σταθερό σημείο 0 της ευθείας και σε κάθε χρονική στιγμή t το μέτρο της είναι ανάλογο της απόστασης του σώματος από το 0 με σταθερά αναλογίας $p > 0$.

(i) Αποδείξτε ότι για τη θέση $x(t)$ του σώματος ισχύει $x''(t) = -\frac{p}{m}x(t)$ για κάθε t .

(ii) Αποδείξτε ότι η κίνηση του σώματος είναι περιοδική ταλάντωση γύρω από το 0 με σταθερό πλάτος και βρείτε το πλάτος, δηλαδή τη μέγιστη απόσταση του σώματος από το 0.

(iii) Αν υποθέσουμε ότι στο σώμα ασκείται μία επιπλέον δύναμη η οποία σε κάθε χρονική στιγμή t έχει κατεύθυνση αντίθετη της κατεύθυνσης κίνησης του σώματος και το μέτρο της είναι ανάλογο του μέτρου της ταχύτητάς του με σταθερά αναλογίας $q > 0$, αποδείξτε ότι $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$. Το φαινόμενο αυτό χαρακτηρίζεται **απόσβεση**.

10.28. Αν στο ηλεκτρικό κύκλωμα της άσκησης 10.17 υπάρχει και ένας πυκνωτής χωρητικότητας $C > 0$, τότε ισχύει $LI''(t) + RI'(t) + \frac{1}{C}I(t) = V'(t)$ για κάθε t .

Αν $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) = V_\infty$, αποδείξτε ότι $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0$.

10.5 Βιβλιογραφία

Βασική βιβλιογραφία

Anton, H. (1984). *Calculus with Analytic Geometry*. Wiley.

Apostol, T. (1967). *Calculus, Vol I*. Wiley.

Courant, R. (1988). *Differential and Integral Calculus, Vol I*. Wiley.

Courant, R., John, F. (1989). *Introduction to Calculus and Analysis, Vol I*. Springer.

Goursat, E. (2006). *A Course in Mathematical Analysis, Vol II, part two*. Dover.

Smirnov, V. I. (1964). *A Course of Higher Mathematics, Vol 2*. Pergamon Press.

Spiegel, M. (1963). *Schaum's Outline of Advanced Calculus*. McGraw Hill.

Thomas, G. (2018). *Calculus*. Pearson.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

ΜΕΡΙΚΑ ΠΙΟ ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΖΗΤΗΜΑΤΑ

11.1 Σύνοψη

Το τελευταίο αυτό κεφάλαιο είναι κάπως ξεχωριστό: η χρησιμότητά του εξαρτάται από το σε ποιο θεωρητικό βάθος θέλει να φτάσει ο αναγνώστης (διδάσκων ή διδασκόμενος) στα θέματα του Απειροστικού Λογισμού μίας μεταβλητής. Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται αυστηρά η θεωρητική θεμελίωση του συνόλου των πραγματικών αριθμών η οποία με τη σειρά της επιτρέπει την αυστηρή απόδειξη κάποιων αποτελεσμάτων τα οποία παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια χωρίς απόδειξη. Ξεκινάμε με το λεγόμενο *αξίωμα συνέχειας* ή *αξίωμα ελάχιστου άνω φράγματος* για μη-κενά άνω φραγμένα σύνολα αριθμών. Αποδεικνύουμε ότι το σύνολο των φυσικών δεν είναι φραγμένο, από όπου συνεπάγεται η Αρχιμήδεια ιδιότητα. Αποδεικνύουμε την ύπαρξη ριζών των θετικών αριθμών και ορίζουμε αυστηρά τη δύναμη με άρρητο εκθέτη και τον λογάριθμο θετικού αριθμού. Αποδεικνύουμε την ύπαρξη ορίου μονότονης ακολουθίας. Αποδεικνύουμε το θεώρημα εγκιβωτισμένων διαστημάτων και το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass για φραγμένες ακολουθίες. Ορίζουμε την έννοια της ακολουθίας Cauchy και αποδεικνύουμε τη σύγκλιση κάθε τέτοιας ακολουθίας. Ορίζουμε και μελετάμε διεξοδικά τις έννοιες του ανώτερου ορίου, του κατώτερου ορίου και των υπακολουθιακών ορίων μιας ακολουθίας. Αποδεικνύουμε την ύπαρξη ορίου μονότονης συνάρτησης. Αποδεικνύουμε τα τρία βασικά θεωρήματα για συνεχείς συναρτήσεις: Φραγμένης Συνάρτησης, Μέγιστης / Ελάχιστης Τιμής, Ενδιάμεσης Τιμής. Αποδεικνύουμε την ομοιόμορφη συνέχεια συνεχούς συνάρτησης σε κλειστό φραγμένο διάστημα. Αποδεικνύουμε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη. Αποδεικνύουμε τα ακριβή κριτήρια λόγου και ρίζας για σύγκλιση σειράς αριθμών και τον ακριβή τύπο για την ακτίνα σύγκλισης δυναμοσειράς. Τέλος, παρουσιάζουμε τον αναλυτικό (και όχι τον απλό γεωμετρικό) ορισμό των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Προαπαιτούμενη γνώση: Τα προηγούμενα κεφάλαια.

11.2 Ελάχιστο άνω φράγμα

Υπάρχουν διάφορα αποτελέσματα στα προηγούμενα κεφάλαια τα οποία δεν αποδείξαμε, διότι έχουν έναν πιο θεωρητικό χαρακτήρα. Τέτοια αποτελέσματα είναι, για παράδειγμα, το ότι κάθε μονότονη ακολουθία έχει όριο, το ότι κάθε μονότονη συνάρτηση έχει όριο, και τα τρία βασικά θεωρήματα για συνεχείς συναρτήσεις: το Θεώρημα Φραγμένης Συνάρτησης, το Θεώρημα Μέγιστης / Ελάχιστης Τιμής και το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής. Σε αυτό το τελευταίο κεφάλαιο θα αποδείξουμε τα αποτελέσματα που αναφέραμε και μερικά ακόμη που θεωρούμε κάπως σημαντικά.

Η πείρα όσων έχουν ασχοληθεί εδώ και πάρα πολλά χρόνια με τη θεωρητική θεμελίωση του Απειροστικού Λογισμού λέει ότι όλες αυτές οι αποδείξεις ανάγονται σε μία βασική ιδιότητα του συνόλου των πραγματικών αριθμών, η οποία δεν αποδεικνύεται, αλλά είναι διαισθητικά αποδεκτή. Αυτή η ιδιότητα αποτελεί, ακριβώς επειδή δεν την αποδεικνύουμε, κάτι που στα Μαθηματικά

ονομάζουμε **αξίωμα** και είναι η εξής:

Υπαρξη ελάχιστου άνω φράγματος. *Αν ένα μη-κενό σύνολο είναι άνω φραγμένο, δηλαδή αν έχει άνω φράγμα, τότε έχει ελάχιστο άνω φράγμα.*

Για να καταλάβουμε αυτήν την ιδιότητα ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 11.1. Θεωρούμε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$ με $a < b$. Είναι σαφές ότι το σύνολο αυτό έχει άνω φράγμα και, μάλιστα, όλοι οι αριθμοί οι οποίοι είναι $\geq b$, του b συμπεριλαμβανομένου, είναι άνω φράγματά του.

Τώρα, μήπως υπάρχει και άλλος αριθμός, δηλαδή μικρότερος του b , ο οποίος είναι άνω φράγμα του διαστήματος $[a, b]$;

Η απάντηση είναι εύκολη: αν ένα u είναι άνω φράγμα του $[a, b]$, πρέπει να είναι μεγαλύτερο ή ίσο κάθε στοιχείου του $[a, b]$ και, ειδικότερα, του b . Δηλαδή, δεν υπάρχει άνω φράγμα του $[a, b]$ μικρότερο του b , οπότε το b είναι το **ελάχιστο** άνω φράγμα του $[a, b]$.

Παράδειγμα 11.2. Τώρα θεωρούμε ένα ημιανοικτό διάστημα $[a, b)$ με $a < b$. Πάλι, είναι σαφές ότι το σύνολο αυτό έχει άνω φράγμα και, μάλιστα, όλοι οι αριθμοί οι οποίοι είναι $\geq b$, του b συμπεριλαμβανομένου, είναι άνω φράγματά του.

Ίδιο ερώτημα: μήπως υπάρχει και άλλος αριθμός, δηλαδή μικρότερος του b , ο οποίος είναι άνω φράγμα του διαστήματος $[a, b)$;

Τώρα η απάντηση δεν είναι το ίδιο άμεση με του προηγούμενου παραδείγματος, διότι το b δεν είναι στοιχείο του $[a, b)$.

Ας υποθέσουμε, όμως, ότι υπάρχει αριθμός u ο οποίος είναι άνω φράγμα του $[a, b)$ και είναι **μικρότερος** του b , δηλαδή $u < b$. Για να είναι το u άνω φράγμα του $[a, b)$, πρέπει να είναι μεγαλύτερο ή ίσο κάθε στοιχείου του $[a, b]$, οπότε, ειδικότερα, του a . Δηλαδή, έχουμε ότι

$$a \leq u < b.$$

Ας θεωρήσουμε, τώρα, τον αριθμό $\frac{u+b}{2}$, το ημιάθροισμα των u, b . Γνωρίζουμε ότι

$$a \leq u < \frac{u+b}{2} < b.$$

Δηλαδή, το $\frac{u+b}{2}$ είναι στοιχείο του $[a, b)$, αλλά είναι **μεγαλύτερο** του u , του υποτιθέμενου άνω φράγματος του $[a, b)$. Έτσι καταλήξαμε σε άτοπο, οπότε συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει αριθμός μικρότερος του b , ο οποίος είναι άνω φράγμα του διαστήματος $[a, b)$. Δηλαδή, πάλι, το b είναι το **ελάχιστο** άνω φράγμα του $[a, b)$.

Παρατηρούμε ότι το πέρασμα από το διάστημα $[a, b]$ στο $[a, b)$ έκανε πιο δύσκολη τη **μαθηματικά αυστηρή** αιτιολόγηση του ότι το b είναι το **ελάχιστο** άνω φράγμα του διαστήματος. Μπορεί κανείς να φανταστεί ότι για ακόμη πιο περίπλοκα σύνολα η κατάσταση σχετικά με τον εντοπισμό του ελάχιστου άνω φράγματος ενδέχεται να είναι ακόμη πιο περίπλοκη.

Ορισμός 11.1. Το **ελάχιστο άνω φράγμα** ενός άνω φραγμένου μη-κενού συνόλου A ονομάζεται *supremum* του A και συμβολίζεται

$$\sup A.$$

Παράδειγμα 11.3. Από τα προηγούμενα παραδείγματα έχουμε ότι $\sup[a, b] = b$ και $\sup[a, b) = b$.

Παράδειγμα 11.4. Αν ένα σύνολο A έχει μέγιστο στοιχείο, δηλαδή αυτό που συμβολίζουμε $\max A$, τότε αυτό ακριβώς είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A . Δηλαδή,

$$\sup A = \max A.$$

Η απόδειξη είναι ίδια με την απόδειξη για την ειδική περίπτωση $A = [a, b]$, όπου $\max A = b$. Πρώτον, το $\max A$ είναι άνω φράγμα του A , αφού, προφανώς, κάθε στοιχείο του A είναι μικρότερο ή ίσο του μέγιστου στοιχείου του A . Δεύτερον, κάθε άνω φράγμα του A είναι μεγαλύτερο ή ίσο του $\max A$, αφού αυτό είναι στοιχείο του A .

Άρα το $\max A$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A .

Ας πάρουμε τώρα ένα σύνολο A και ας υποθέσουμε ότι είναι κάτω φραγμένο. Θεωρούμε παράλληλα και το συμμετρικό σύνολο $-A = \{-x \mid x \in A\}$ ως προς το σημείο 0. Θα δούμε ότι το $-A$ είναι άνω φραγμένο. Πράγματι, έστω l οποιοδήποτε κάτω φράγμα του A . Τότε για κάθε $x \in -A$ ισχύει $-x \in A$, οπότε $l \leq -x$, οπότε $x \leq -l$. Επομένως, το $-l$ είναι άνω φράγμα του $-A$. Αυτό το επιχείρημα λειτουργεί και ανάποδα. Δηλαδή, έστω u οποιοδήποτε άνω φράγμα του $-A$. Τότε για κάθε $x \in A$ ισχύει $-x \in -A$, οπότε $-x \leq u$, οπότε $-u \leq x$. Επομένως, το $-u$ είναι κάτω φράγμα του A . Με αυτά τα δύο «συμμετρικά» επιχειρήματα βλέπουμε ότι τα συμμετρικά ως προς το 0 των κάτω φραγμάτων του A είναι τα άνω φράγματα του $-A$, και αντιστρόφως. Τώρα, επειδή το $-A$ είναι άνω φραγμένο, έχει ελάχιστο άνω φράγμα, έστω u . Τότε το $-u$ είναι κάτω φράγμα του A . Επίσης, αν l είναι οποιοδήποτε κάτω φράγμα του A , τότε το $-l$ είναι άνω φράγμα του $-A$, οπότε, επειδή το u είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του $-A$, ισχύει $u \leq -l$, οπότε $l \leq -u$. Άρα το $-u$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του A . Βλέπουμε, λοιπόν, ότι υποθέσαμε ότι το A είναι κάτω φραγμένο και συμπεράναμε ότι έχει μέγιστο κάτω φράγμα. Επομένως,

Υπαρξη μέγιστου κάτω φράγματος. Αν ένα μη-κενό σύνολο είναι κάτω φραγμένο, δηλαδή αν έχει κάτω φράγμα, τότε έχει μέγιστο κάτω φράγμα.

Ορισμός 11.2. Το μέγιστο κάτω φράγμα ενός κάτω φραγμένου μη-κενού συνόλου A ονομάζεται *infimum* του A και συμβολίζεται

$$\inf A.$$

Παράδειγμα 11.5. Η ημιευθεία $(-\infty, 2]$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα το 2. Η συμμετρική ως προς το 0 ημιευθεία $[-2, +\infty)$ έχει μέγιστο κάτω φράγμα το -2 . Δηλαδή, $\inf[-2, +\infty) = -2$.

Παράδειγμα 11.6. Αν ένα σύνολο A έχει ελάχιστο στοιχείο, αυτό που συμβολίζουμε $\min A$, τότε αυτό ακριβώς είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του A . Δηλαδή,

$$\inf A = \min A.$$

Ας το δούμε. Το $\min A$ είναι το μικρότερο στοιχείο του A , οπότε κάθε στοιχείο του A είναι $\geq \min A$, οπότε το $\min A$ είναι κάτω φράγμα του A . Επίσης, οποιοδήποτε κάτω φράγμα του A είναι μικρότερο ή ίσο κάθε στοιχείου του A , οπότε και του $\min A$. Επομένως, το $\min A$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του A .

Παράδειγμα 11.7. Το συμμετρικό ως προς το 0 του διαστήματος $(a, b]$ είναι το διάστημα $[-b, -a)$. Το $[-b, -a)$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα το $-a$, οπότε το $(a, b]$ έχει μέγιστο κάτω φράγμα το a . Δηλαδή, $\inf(a, b] = a$. Αλλά ας το αποδείξουμε και ανεξάρτητα από το συμμετρικό διάστημα του $(a, b]$. Ουσιαστικά, θα επαναλάβουμε τα επιχειρήματα για το supremum του συμμετρικού διαστήματος, αλλά με τις αντίστροφες ανισότητες.

Ωραία. Είναι σαφές ότι το $(a, b]$ έχει κάτω φράγματα όλους τους αριθμούς οι οποίοι είναι $\leq a$, του a συμπεριλαμβανομένου.

Μήπως υπάρχει και άλλος αριθμός, δηλαδή μεγαλύτερος του a , ο οποίος είναι κάτω φράγμα του διαστήματος $(a, b]$;

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει αριθμός l ο οποίος είναι κάτω φράγμα του $(a, b]$ και είναι *μεγαλύτερος* του a , δηλαδή $a < l$. Για να είναι το l κάτω φράγμα του $(a, b]$ πρέπει να είναι μικρότερο ή ίσο κάθε στοιχείου του $(a, b]$ και, ειδικότερα, του b . Δηλαδή,

$$a < l \leq b.$$

Ας θεωρήσουμε, τώρα, τον αριθμό $\frac{a+l}{2}$, το ημίαθροισμα των a, l . Γνωρίζουμε ότι

$$a < \frac{a+l}{2} < l \leq b.$$

Δηλαδή, το $\frac{a+l}{2}$ είναι στοιχείο του $(a, b]$, αλλά είναι μικρότερο του l , του υποτιθέμενου κάτω φράγματος του $(a, b]$. Καταλήγουμε σε άτοπο, οπότε δεν υπάρχει αριθμός μεγαλύτερος του a , ο οποίος είναι κάτω φράγμα του $(a, b]$. Άρα το a είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του $(a, b]$.

Και κάτι προφανές: επειδή το $\inf A$ είναι κάτω φράγμα του A και το $\sup A$ είναι άνω φράγμα του A , κάθε στοιχείο του A είναι ανάμεσα στα $\inf A$ και $\sup A$, οπότε, αναγκαστικά,

$$\inf A \leq \sup A.$$

Συνήθως, επεκτείνουμε τον ορισμό του ελάχιστου άνω φράγματος ή του μέγιστου κάτω φράγματος και σε σύνολα τα οποία, αντιστοίχως, δεν έχουν άνω φράγμα ή δεν έχουν κάτω φράγμα.

Ορισμός 11.3. Αν το σύνολο A δεν είναι κάτω φραγμένο, τότε ορίζουμε $\inf A = -\infty$.
Αν το σύνολο A δεν είναι άνω φραγμένο, τότε ορίζουμε $\sup A = +\infty$.

Ο ορισμός αυτός αιτιολογείται ως εξής. Έστω ότι το σύνολο A δεν είναι άνω φραγμένο, δηλαδή δεν υπάρχει αριθμός ο οποίος να είναι άνω φράγμα του A . Αν, όμως, σκεφτούμε ότι το A είναι υποσύνολο του $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, τότε το A έχει ως άνω φράγμα του το $+\infty$ και, προφανώς, αυτό είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A . Έτσι είναι λογικό να ορίσουμε $\sup A = +\infty$ σε αυτήν την περίπτωση. Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι είναι λογικό να ορίσουμε $\inf A = -\infty$ στην περίπτωση που το A δεν είναι κάτω φραγμένο.

Ασκήσεις

11.1. Βρείτε το supremum και το infimum των $[-1, 1]$, $[-1, 1)$, $(0, +\infty)$, $(-\infty, 2)$, $(-\infty, 1) \cup (2, 5]$, $(-3, -1] \cup (0, 2] \cup (4, 7)$.

11.2. Έστω μη-κενό φραγμένο σύνολο A . Αποδείξτε ότι το κλειστό διάστημα $[\inf A, \sup A]$ είναι το ελάχιστο κλειστό διάστημα το οποίο περιέχει το A .

11.3. Έστω μη-κενά σύνολα A, B ώστε $A \subseteq B$. Αποδείξτε ότι $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.

11.4. Έστω μη-κενά σύνολα A, B ώστε $A \cup B = \mathbb{R}$ και ώστε να ισχύει $x < y$ για κάθε $x \in A, y \in B$. Παρατηρήστε ότι τα A, B είναι συμπληρωματικά και ότι το A είναι αριστερά του B . Αποδείξτε ότι υπάρχει ξ ώστε είτε $A = (-\infty, \xi), B = [\xi, +\infty)$ είτε $A = (-\infty, \xi], B = (\xi, +\infty)$.

11.5. Έστω μη-κενά σύνολα A, B .

(i) Αν ισχύει $x \leq y$ για κάθε $x \in A, y \in B$, τότε αποδείξτε ότι $\sup A \leq \inf B$.

(ii) Πρώτον, μερικά παραδείγματα.

Δείτε ότι τα σύνολα $A = (-\infty, 0], B = [0, +\infty)$ έχουν την ιδιότητα να ισχύει $x \leq y$ για κάθε $x \in A, y \in B$. Κατόπιν, βρείτε το σύνολο όλων των ξ με την ιδιότητα να ισχύει $x \leq \xi \leq y$ για κάθε $x \in A, y \in B$.

Κάντε το ίδιο για τα $A = (-\infty, 0], B = (0, +\infty)$, για τα $A = (-4, -2), B = (-2, +\infty)$ και για τα $A = (-\infty, 0), B = [1, 13]$.

Τώρα, γενικά, έστω ότι ισχύει $x \leq y$ για κάθε $x \in A, y \in B$. Περιγράψτε με τύπο συναρτήσεως των $\sup A, \inf B$ το σύνολο όλων των ξ με την ιδιότητα να ισχύει $x \leq \xi \leq y$ για κάθε $x \in A, y \in B$.

(iii) Έστω ότι ισχύει $x \leq y$ για κάθε $x \in A, y \in B$ και έστω ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $x \in A, y \in B$ ώστε $y - x \leq \epsilon$. Αποδείξτε ότι $\sup A = \inf B$ και ότι υπάρχει μοναδικό ξ με την ιδιότητα να ισχύει $x \leq \xi \leq y$ για κάθε $x \in A, y \in B$. Ποιο είναι αυτό το ξ ;

11.3 Το σύνολο των φυσικών δεν είναι άνω φραγμένο

Τώρα θα δούμε την απόδειξη του ότι το σύνολο των φυσικών, το $\mathbb{N}$, δεν είναι άνω φραγμένο.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1.1. Έστω ότι υπάρχει κάποιο u ώστε να ισχύει $n \leq u$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή κάποιο u το οποίο είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$. Τότε το $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα το οποίο συμβολίζεται $\sup \mathbb{N}$, αλλά, για ευκολία, ας γράψουμε

$$\xi = \sup \mathbb{N}.$$

Επειδή το ξ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του $\mathbb{N}$, ο αριθμός $\xi - 1$ δεν είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$, οπότε υπάρχει κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ώστε να είναι $\xi - 1 < n$. Επίσης, επειδή $n + 1 \in \mathbb{N}$ και επειδή το ξ είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$, ισχύει $n + 1 \leq \xi$. Άρα έχουμε ότι

$$\xi - 1 < n < n + 1 \leq \xi.$$

Αυτό, όμως, είναι άτοπο! Γιατί;

□

Ας θυμηθούμε ότι ένα άμεσο αποτέλεσμα του Θεωρήματος 1.1 είναι η Αρχιμήδεια ιδιότητα: για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει φυσικός n ώστε $\frac{1}{n} < \epsilon$.

Παράδειγμα 11.8. Θεωρούμε το σύνολο $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$.

Προφανώς, το A έχει μέγιστο στοιχείο το 1, οπότε $\sup A = \max A = 1$.

Ας δούμε ποιο είναι το $\inf A$. Προφανώς, κάθε αριθμός ≤ 0 , του 0 συμπεριλαμβανομένου, είναι κάτω φράγμα του A . Μήπως, υπάρχει κάτω φράγμα του A μεγαλύτερο του 0; Μα η Αρχιμήδεια ιδιότητα λέει ότι όποιον θετικό αριθμό και αν πάρουμε υπάρχει στοιχείο του A το οποίο είναι μικρότερό του. Δηλαδή, κανένας θετικός αριθμός δεν είναι κάτω φράγμα του A , οπότε το 0 είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του A , δηλαδή $\inf A = 0$.

Ας θυμηθούμε, επίσης, ότι ένα άμεσο αποτέλεσμα της Αρχιμήδειας ιδιότητας είναι η ιδιότητα πυκνότητας των ρητών: σε οποιοδήποτε ανοικτό διάστημα, οσοδήποτε μικρό, υπάρχει τουλάχιστον ένας ρητός.

Παράδειγμα 11.9. Τώρα θα μελετήσουμε ένα λίγο πιο περίπλοκο σύνολο από τα $[a, b]$ και (a, b) . Θεωρούμε το σύνολο των ρητών που περιέχονται σε ένα διάστημα (a, b) με $a < b$, δηλαδή το $A = \{r \mid r \in \mathbb{Q}, a < r < b\}$.

Είναι σαφές ότι το σύνολο αυτό έχει ως άνω φράγματα όλους τους αριθμούς οι οποίοι είναι $\geq b$, του b συμπεριλαμβανομένου. Μήπως υπάρχει και άλλος αριθμός, δηλαδή μικρότερος του b , ο οποίος είναι άνω φράγμα του A ;

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει αριθμός u ο οποίος είναι άνω φράγμα του A και είναι μικρότερος του b , δηλαδή $u < b$. Για να είναι το u άνω φράγμα του A πρέπει να είναι μεγαλύτερο ή ίσο κάθε στοιχείου του A και, ειδικότερα, ενός οποιουδήποτε ρητού r με $a < r < b$. Δηλαδή, έχουμε ότι

$$a < r \leq u < b.$$

Το ότι υπάρχει τέτοιος ρητός r με $a < r < b$ οφείλεται στην ιδιότητα πυκνότητας των ρητών.

Τώρα, πάλι λόγω της πυκνότητας των ρητών, υπάρχει ρητός r' με $u < r' < b$. Δηλαδή, έχουμε ότι

$$a < u < r' < b.$$

Τότε το r' είναι στοιχείο του A , αλλά είναι μεγαλύτερο του u , του υποτιθέμενου άνω φράγματος του A . Έτσι φτάνουμε σε άτοπο, οπότε συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει αριθμός μικρότερος του b , ο οποίος είναι άνω φράγμα του A . Δηλαδή, το b είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A : $\sup A = b$.

Ασκήσεις

11.6. Βρείτε το supremum και το infimum καθενός από τα σύνολα $\{-\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\{\frac{n-1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\{r \mid r \in \mathbb{Q}, -\infty < r < b\}$, $\{r \mid r \in \mathbb{Q}, a < r < +\infty\}$.

11.4 Ύπαρξη ριζών θετικών αριθμών

Θυμόμαστε από το παράδειγμα 1.19 την αλγεβρική ταυτότητα

$$y^n - x^n = (y - x)(y^{n-1} + y^{n-2}x + \dots + yx^{n-2} + x^{n-1}),$$

η οποία αποδεικνύεται είτε με επαγωγή είτε πολλαπλασιάζοντας τις δύο παρενθέσεις δεξιά και διαγράφοντας όμοιους όρους. Αν $0 \leq x < y$, τότε, αντικαθιστώντας στη μεγάλη παρένθεση είτε κάθε y με x είτε κάθε x με y , βρίσκουμε τη διπλή ανισότητα

$$nx^{n-1}(y-x) < y^n - x^n < ny^{n-1}(y-x) \quad \text{αν } 0 \leq x < y. \quad (11.1)$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1.2. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $a > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, η εξίσωση

$$x^n = a$$

έχει ακριβώς μία θετική λύση. Τα υπόλοιπα συμπεράσματα του Θεωρήματος 1.2 προκύπτουν άμεσα από αυτό.

Θεωρούμε το σύνολο

$$X = \{x \mid x \geq 0, x^n \leq a\}.$$

Πρώτον, είναι προφανές ότι $0 \in X$, οπότε το X δεν είναι κενό. Κατόπιν, από $a+1 \geq 1$ συνεπάγεται $(a+1)^n \geq a+1 > a$. Άρα για κάθε $x \in X$ ισχύει $x^n \leq a < (a+1)^n$, οπότε $x < a+1$. Άρα το $a+1$ είναι άνω φράγμα του X . Επειδή το X είναι άνω φραγμένο, έχει ελάχιστο άνω φράγμα το οποίο συμβολίζεται $\sup X$ και, για ευκολία, θα γράψουμε

$$\xi = \sup X.$$

Προφανώς, $\xi \geq 0$, διότι $0 \in X$. Θα αποδείξουμε ότι $\xi^n = a$, οπότε αυτομάτως θα είναι $\xi > 0$, οπότε το ξ θα είναι θετική λύση της εξίσωσης $x^n = a$.

Έστω $\xi^n < a$. Τότε $\frac{a-\xi^n}{n(\xi+1)^{n-1}} > 0$ και θεωρούμε ένα οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό ώστε να είναι $\epsilon \leq 1$ και $\epsilon \leq \frac{a-\xi^n}{n(\xi+1)^{n-1}}$. Από τη δεξιά ανισότητα (11.1) συνεπάγεται

$$(\xi + \epsilon)^n - \xi^n \leq n(\xi + \epsilon)^{n-1}((\xi + \epsilon) - \xi) = n(\xi + \epsilon)^{n-1}\epsilon \leq n(\xi + 1)^{n-1}\epsilon \leq a - \xi^n.$$

Άρα $(\xi + \epsilon)^n \leq a$, οπότε $\xi + \epsilon \in X$. Αυτό είναι άτοπο, διότι το ξ είναι άνω φράγμα του X . Άρα

$$\xi^n \geq a.$$

Έστω $\xi^n > a$. Τότε $\frac{\xi^n - a}{n\xi^{n-1}} > 0$ και θεωρούμε ένα οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό ώστε $\epsilon \leq \frac{\xi^n - a}{n\xi^{n-1}}$. Με λίγες πράξεις βλέπουμε ότι συνεπάγεται $\epsilon \leq \xi$, οπότε, πάλι από τη δεξιά ανισότητα (11.1), συνεπάγεται

$$\xi^n - (\xi - \epsilon)^n \leq n\xi^{n-1}(\xi - (\xi - \epsilon)) = n\xi^{n-1}\epsilon \leq \xi^n - a.$$

Άρα $a \leq (\xi - \epsilon)^n$. Άρα για κάθε $x \in X$ ισχύει $x^n \leq a \leq (\xi - \epsilon)^n$, οπότε $x \leq \xi - \epsilon$. Άρα το $\xi - \epsilon$ είναι άνω φράγμα του X . Αυτό είναι άτοπο, διότι το ξ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του X . Άρα

$$\xi^n \leq a.$$

Από τις ανισότητες $\xi^n \geq a$ και $\xi^n \leq a$ συνεπάγεται $\xi^n = a$.

Αποδείξαμε, λοιπόν, την ύπαρξη θετικής λύσης της $x^n = a$ όταν $a > 0$.

Μένει να αποδείξουμε τη μοναδικότητα της θετικής λύσης της $x^n = a$. Αυτό είναι εύκολο: αν $\xi_1 > 0$, $\xi_2 > 0$, $\xi_1^n = a$ και $\xi_2^n = a$, τότε $\xi_1^n = \xi_2^n$, οπότε $\xi_1 = \xi_2$. $\square$

11.5 Ο ορισμός δύναμης με άρρητο εκθέτη

Τώρα θα αποδείξουμε την Πρόταση 1.3 η οποία εξασφάλισε την προϋπόθεση για τον Ορισμό 1.8 της δύναμης a^x όταν $a > 1$ και $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Λήμμα 11.1. Έστω $a > 1$, $b > 1$. Τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $a < b^n$ ή, ισοδύναμα, $a^{\frac{1}{n}} < b$.

Απόδειξη. Επειδή $\frac{b-1}{a-1} > 0$, από την Αρχιμήδεια ιδιότητα συνεπάγεται ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $0 < \frac{1}{n} < \frac{b-1}{a-1}$. Τώρα, από την αριστερή ανισότητα (11.1) έχουμε ότι

$$a - 1 < n(b - 1) \leq b^n - 1,$$

οπότε $a < b^n$. □

Η απόδειξη της Πρότασης 1.3. Έστω $a > 1$ και $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Θεωρούμε το σύνολο

$$X = \{a^r \mid r \in \mathbb{Q}, r < x\},$$

δηλαδή το σύνολο των δυνάμεων a^r για όλους τους ρητούς r οι οποίοι είναι μικρότεροι του άρρητου x . Θεωρούμε και έναν οποιονδήποτε ρητό μεγαλύτερο του x , π.χ. τον ακέραιο $[x] + 1$. Τότε, για κάθε $r \in \mathbb{Q}$, $r < x$, ισχύει $r < [x] + 1$, οπότε $a^r < a^{[x]+1}$. Άρα ο αριθμός $a^{[x]+1}$ είναι άνω φράγμα του συνόλου X . Συνεπάγεται ότι το X έχει ελάχιστο άνω φράγμα το οποίο συμβολίζεται $\sup X$, και, για ευκολία, θα γράψουμε

$$y = \sup X.$$

Τώρα, έστω $r \in \mathbb{Q}$, $r < x$. Λόγω της πυκνότητας των ρητών υπάρχει $r' \in \mathbb{Q}$ ώστε $r < r' < x$. Τότε είναι $a^r < a^{r'}$ και, επειδή το y είναι άνω φράγμα του X και το $a^{r'}$ είναι στοιχείο του X , ισχύει $a^{r'} \leq y$. Άρα

$$a^r < y \quad \text{για κάθε } r \in \mathbb{Q}, r < x.$$

Κατόπιν, έστω $s \in \mathbb{Q}$, $x < s$. Λόγω της πυκνότητας των ρητών υπάρχει $s' \in \mathbb{Q}$ ώστε $x < s' < s$. Τότε για κάθε $r \in \mathbb{Q}$, $r < x$, ισχύει $r < s'$, οπότε $a^r < a^{s'}$. Επομένως, ο αριθμός $a^{s'}$ είναι άνω φράγμα του X , οπότε, επειδή το y είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του X , έχουμε ότι $y \leq a^{s'}$. Τέλος, επειδή $a^{s'} < a^s$, συνεπάγεται

$$y < a^s \quad \text{για κάθε } s \in \mathbb{Q}, x < s.$$

Τέλος, έστω ότι υπάρχουν δύο διαφορετικοί αριθμοί y_1, y_2 , έστω $y_1 < y_2$, με την κοινή ιδιότητα:

$$a^r < y_1 < a^s, \quad a^r < y_2 < a^s \quad \text{για κάθε } r \in \mathbb{Q}, s \in \mathbb{Q}, r < x < s.$$

Από το Λήμμα 11.1 συνεπάγεται ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $a^{\frac{1}{n}} < \frac{y_2}{y_1}$.

Λόγω της πυκνότητας των ρητών υπάρχει ρητός r ώστε $x - \frac{1}{n} < r < x$. Τότε το $s = r + \frac{1}{n}$ είναι ρητός και $x < s < x + \frac{1}{n}$. Επομένως,

$$a^r < y_1 < y_2 < a^s = a^{r+\frac{1}{n}},$$

οπότε $\frac{y_2}{y_1} < a^{\frac{1}{n}}$, δηλαδή άτοπο. □

11.6 Ο ορισμός του λογαρίθμου

Τώρα θα αποδείξουμε το Θεώρημα 1.3 το οποίο εξασφάλισε την ύπαρξη του λογαρίθμου θετικού αριθμού.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1.3. Θα περιοριστούμε στην περίπτωση που είναι $a > 1$, $y > 1$. Οι άλλες περιπτώσεις ανάγονται εύκολα σε αυτήν.

Θεωρούμε το σύνολο

$$X = \{x \mid a^x \leq y\}.$$

Προφανώς, $0 \in X$. Επίσης, σύμφωνα με το Λήμμα 11.1, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $a^n > y$. Τότε, για κάθε $x \in X$ ισχύει $a^x \leq y \leq a^n$, οπότε $x \leq n$. Άρα το n είναι άνω φράγμα του X , οπότε το X έχει ελάχιστο άνω φράγμα, το $\sup X$, το οποίο, για ευκολία, θα γράψουμε

$$\xi = \sup X.$$

Τώρα, έστω $a^\xi < y$. Τότε, σύμφωνα με το Λήμμα 11.1, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $a^{\frac{1}{n}} < \frac{y}{a^\xi}$, οπότε $a^{\xi+\frac{1}{n}} < y$, οπότε $\xi + \frac{1}{n} \in X$. Αυτό είναι άτοπο, διότι το ξ είναι άνω φράγμα του X . Άρα

$$a^\xi \geq y.$$

Κατόπιν, έστω $a^\xi > y$. Πάλι από το Λήμμα 11.1 υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $a^{\frac{1}{n}} < \frac{a^\xi}{y}$, οπότε $y < a^{\xi-\frac{1}{n}}$. Τότε για κάθε $x \in X$ ισχύει $a^x \leq y < a^{\xi-\frac{1}{n}}$, οπότε $x < \xi - \frac{1}{n}$. Άρα το $\xi - \frac{1}{n}$ είναι άνω φράγμα του X . Αυτό είναι άτοπο, διότι το ξ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του X . Άρα

$$a^\xi \leq y.$$

Από τις $a^\xi \geq y$ και $a^\xi \leq y$ συνεπάγεται $a^\xi = y$.

Αποδειξάμε, λοιπόν, ότι η εξίσωση $a^x = y$ έχει λύση.

Τέλος, το ότι η λύση της εξίσωσης $a^x = y$ είναι μοναδική είναι απλό να αποδειχθεί. Πράγματι, αν $a^{\xi_1} = y$ και $a^{\xi_2} = y$, τότε $a^{\xi_1} = a^{\xi_2}$, οπότε $\xi_1 = \xi_2$. $\square$

11.7 Όριο μονότονης ακολουθίας

Τώρα θα αποδείξουμε το Θεώρημα 3.1 το οποίο εγγυάται την ύπαρξη ορίου κάθε μονότονης ακολουθίας.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 3.1. (i) *Πρώτη περίπτωση:* η αύξουσα ακολουθία (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη.

Παίρνουμε οποιοδήποτε $M > 0$. Τότε το M δεν είναι άνω φράγμα της ακολουθίας, οπότε υπάρχει n_0 ώστε $x_{n_0} > M$. Επειδή η (x_n) είναι αύξουσα, ισχύει $x_n \geq x_{n_0} > M$ για κάθε $n \geq n_0$.

Δηλαδή, αποδείξαμε ότι για κάθε $M > 0$ ισχύει τελικά $x_n > M$. Άρα $x_n \rightarrow +\infty$.

Δεύτερη περίπτωση: η αύξουσα ακολουθία (x_n) είναι άνω φραγμένη. Δηλαδή, υπάρχει u ώστε να ισχύει $x_n \leq u$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Θεωρούμε το σύνολο όλων των όρων της ακολουθίας, δηλαδή το

$$X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Τότε το X έχει, προφανώς, το u ως άνω φράγμα του. Επομένως, το X έχει ελάχιστο άνω φράγμα, το $\sup X$, το οποίο, για ευκολία, θα γράψουμε

$$x = \sup X.$$

Θα αποδείξουμε ότι $x_n \rightarrow x$.

Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή $x - \epsilon < x$ και επειδή το x είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του X , το $x - \epsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του X . Άρα υπάρχει n_0 ώστε $x - \epsilon < x_{n_0}$. Επειδή η (x_n) είναι αύξουσα, ισχύει

$$x - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n \quad \text{για κάθε } n \geq n_0.$$

Ακόμη, επειδή το x είναι άνω φράγμα του X , ισχύει

$$x_n \leq x < x + \epsilon \quad \text{για κάθε } n.$$

Άρα ισχύει $x - \epsilon < x_n < x + \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$.

Αποδειξάμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $|x_n - x| < \epsilon$. Άρα $x_n \rightarrow x$.

(ii) Ομοίως. $\square$

11.8 Εγκιβωτισμένα διαστήματα

Λέμε ότι τα διαδοχικά διαστήματα $[a_1, b_1], [a_2, b_2], [a_3, b_3], \dots$ είναι **εγκιβωτισμένα** όταν το καθένα περιέχεται στο προηγούμενό του, δηλαδή όταν ισχύει $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ για κάθε n . Η ακόλουθη πρόταση λέει τι γίνεται όταν έχουμε τέτοια εγκιβωτισμένα διαστήματα που, επιπλέον, τα μήκη τους τείνουν στο 0, δηλαδή όταν $b_n - a_n \rightarrow 0$.

Πρόταση 11.1. Έστω ακολουθία εγκιβωτισμένων διαστημάτων $[a_1, b_1], [a_2, b_2], [a_3, b_3], \dots$ έτσι ώστε $b_n - a_n \rightarrow 0$. Τότε η ακολουθία των αριστερών άκρων (a_n) και η ακολουθία των δεξιών άκρων (b_n) συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό και αυτός ο αριθμός είναι ο μοναδικός ο οποίος ανήκει σε όλα τα διαστήματα $[a_n, b_n]$.

Απόδειξη. Το να ισχύει $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ για κάθε n είναι ισοδύναμο με το να ισχύει

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \quad \text{για κάθε } n.$$

Επομένως, η (a_n) είναι αύξουσα και η (b_n) είναι φθίνουσα. Επίσης, η (a_n) είναι και άνω φραγμένη, π.χ. από το b_1 , και η (b_n) είναι και κάτω φραγμένη, π.χ. από το a_1 . Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1, και οι δύο ακολουθίες συγκλίνουν και έστω

$$a_n \rightarrow a, \quad b_n \rightarrow b.$$

Επειδή η (a_n) είναι αύξουσα και η (b_n) είναι φθίνουσα, ισχύει

$$a_n \leq a, \quad b \leq b_n \quad \text{για κάθε } n.$$

Τώρα, από $a_n \rightarrow a$ και $b_n \rightarrow b$ συνεπάγεται $b_n - a_n \rightarrow b - a$. Επειδή $b_n - a_n \rightarrow 0$, συνεπάγεται $b - a = 0$, δηλαδή $a = b$. Οπότε, αν ονομάσουμε x την κοινή τιμή $a = b$, τότε έχουμε ότι

$$a_n \rightarrow x, \quad b_n \rightarrow x, \quad a_n \leq x \leq b_n \quad \text{για κάθε } n.$$

Δηλαδή, οι ακολουθίες (a_n) και (b_n) συγκλίνουν στο ίδιο x το οποίο ανήκει σε όλα τα $[a_n, b_n]$.

Τέλος, έστω x' , ενδεχομένως διαφορετικό από το x , το οποίο ανήκει σε όλα τα $[a_n, b_n]$. Τότε είναι $a_n \leq x' \leq b_n$ για κάθε n , οπότε, επειδή $a_n \rightarrow x$ και $b_n \rightarrow x$, συνεπάγεται $x' = x$. $\square$

Παράδειγμα 11.10. Τα διαστήματα $[0, \frac{1}{n}]$, $n \in \mathbb{N}$, είναι εγκιβωτισμένα και τα μήκη τους τείνουν στο 0. Προφανώς, ο μοναδικός αριθμός ο οποίος ανήκει σε όλα αυτά τα διαστήματα είναι το 0. Το ίδιο ισχύει για τα διαστήματα $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$, $n \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 11.11. Το συμπέρασμα της Πρότασης 11.1 δεν ισχύει, αν τα εγκιβωτισμένα διαστήματα δεν είναι κλειστά. Για παράδειγμα, τα διαστήματα $(0, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$, είναι εγκιβωτισμένα και τα μήκη τους τείνουν στο 0. Τώρα, όμως, δεν υπάρχει κανένας αριθμός ο οποίος ανήκει σε όλα αυτά τα διαστήματα.

11.9 Το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass και ακολουθίες Cauchy

Γνωρίζουμε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Για παράδειγμα, η ακολουθία $((-1)^{n-1})$ είναι φραγμένη αλλά δεν συγκλίνει. Όμως, η $((-1)^{n-1})$, παρόλο που δεν συγκλίνει, έχει τουλάχιστον μία υπακολουθία που συγκλίνει: η υπακολουθία των περιττών δεικτών συγκλίνει στο 1 και η υπακολουθία των άρτιων δεικτών συγκλίνει στο -1 . Θα δούμε τώρα ότι αυτό το φαινόμενο παρατηρείται όχι μόνο στην ακολουθία $((-1)^{n-1})$ αλλά και σε κάθε φραγμένη ακολουθία. Αυτό είναι το περιεχόμενο του επόμενου θεωρήματος, ενός από τα σημαντικότερα θεωρήματα της Ανάλυσης.

Θεώρημα Bolzano-Weierstrass. Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μία συγκλίνουσα υπακολουθία.

Απόδειξη. Έστω φραγμένη ακολουθία (x_n) . Τότε υπάρχουν l, u ώστε να ισχύει $l \leq x_n \leq u$ για κάθε n . Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει κάποια υπακολουθία της (x_n) η οποία συγκλίνει, περιγράφοντας έναν «αλγόριθμο» επιλογής των διαδοχικών όρων της υπακολουθίας: του πρώτου όρου της, κατόπιν του δεύτερου όρου της, κατόπιν του τρίτου όρου της και ούτω καθεξής.

Χωρίζουμε το $[l, u]$ στα δύο ισομήκη διαστήματα $[l, \frac{l+u}{2}]$, $[\frac{l+u}{2}, u]$. Επειδή όλοι οι (άπειροι) όροι της (x_n) ανήκουν στο $[l, u]$, τουλάχιστον ένα από τα δύο υποδιαστήματα περιέχει το x_n για άπειρα n . Επιλέγουμε ένα τέτοιο υποδιάστημα και το συμβολίζουμε $[l_1, u_1]$. Άρα $[l_1, u_1] \subseteq [l, u]$, $u_1 - l_1 = \frac{u-l}{2}$ και το $[l_1, u_1]$ περιέχει το x_n για άπειρα n . Επιλέγουμε n_1 ώστε $x_{n_1} \in [l_1, u_1]$.

Χωρίζουμε το $[l_1, u_1]$ στα δύο ισομήκη διαστήματα $[l_1, \frac{l_1+u_1}{2}]$, $[\frac{l_1+u_1}{2}, u_1]$. Επειδή το $[l_1, u_1]$ περιέχει το x_n για άπειρα n , ένα τουλάχιστον από τα δύο υποδιαστήματα περιέχει το x_n για άπειρα n . Επιλέγουμε ένα τέτοιο υποδιάστημα και το συμβολίζουμε $[l_2, u_2]$. Άρα $[l_2, u_2] \subseteq [l_1, u_1]$, $u_2 - l_2 = \frac{u_1-l_1}{2}$ και το $[l_2, u_2]$ περιέχει το x_n για άπειρα n . Επιλέγουμε n_2 ώστε $x_{n_2} \in [l_2, u_2]$. Προσέχουμε, όμως, ώστε να είναι $n_2 > n_1$. Αυτό είναι εφικτό, ακριβώς επειδή το $[l_2, u_2]$ περιέχει το x_n για άπειρα n .

Χωρίζουμε το $[l_2, u_2]$ στα δύο ισομήκη διαστήματα $[l_2, \frac{l_2+u_2}{2}]$, $[\frac{l_2+u_2}{2}, u_2]$. Επειδή το $[l_2, u_2]$ περιέχει το x_n για άπειρα n , ένα τουλάχιστον από τα δύο υποδιαστήματα περιέχει το x_n για άπειρα n . Επιλέγουμε ένα τέτοιο υποδιάστημα και το συμβολίζουμε $[l_3, u_3]$. Άρα $[l_3, u_3] \subseteq [l_2, u_2]$, $u_3 - l_3 = \frac{u_2-l_2}{2}$ και το $[l_3, u_3]$ περιέχει το x_n για άπειρα n . Επιλέγουμε n_3 ώστε $x_{n_3} \in [l_3, u_3]$. Προσέχουμε, όμως, ώστε να είναι $n_3 > n_2$. Αυτό είναι εφικτό, ακριβώς επειδή το $[l_3, u_3]$ περιέχει το x_n για άπειρα n . Συνεχίζουμε αυτήν τη διαδικασία επ' άπειρον. Επιλέγουμε, διαδοχικά, διαστήματα $[l_k, u_k]$ για κάθε k ώστε να ισχύει

$$[l_{k+1}, u_{k+1}] \subseteq [l_k, u_k], \quad u_{k+1} - l_{k+1} = \frac{u_k - l_k}{2}.$$

Επίσης, επιλέγουμε όρους x_{n_k} της (x_n) για κάθε k ώστε να ισχύει

$$n_{k+1} > n_k, \quad x_{n_k} \in [l_k, u_k].$$

Από το ότι ισχύει $u_{k+1} - l_{k+1} = \frac{u_k - l_k}{2}$ προκύπτει ότι ισχύει $u_k - l_k = \frac{u-l}{2^k}$, οπότε

$$u_k - l_k \rightarrow 0.$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 11.1 οι ακολουθίες (l_k) , (u_k) συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό. Έστω $l_k \rightarrow x$ και $u_k \rightarrow x$. Επειδή ισχύει $n_{k+1} > n_k$, η (x_{n_k}) είναι υπακολουθία της (x_n) και, επειδή ισχύει $l_k \leq x_{n_k} \leq u_k$, συνεπάγεται $x_{n_k} \rightarrow x$. $\square$

Ορισμός 11.4. Η ακολουθία (x_n) χαρακτηρίζεται **ακολουθία Cauchy**, αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|x_n - x_m| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$, $m \geq n_0$. Αυτό το διατυπώνουμε ως εξής:

$$\lim_{n, m \rightarrow +\infty} (x_n - x_m) = 0.$$

Με άλλα λόγια: η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy, αν οι όροι της πλησιάζουν απερίορτα ο ένας τον άλλο όταν οι δείκτες τους γίνονται κατάλληλα μεγάλοι.

Πρόταση 11.2. Αν η ακολουθία (x_n) συγκλίνει, τότε είναι ακολουθία Cauchy.

Απόδειξη. Έστω $x_n \rightarrow x$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως, αλλάζοντας απλώς το σύμβολο από n σε m , ισχύει $|x_m - x| < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $m \geq n_0$. Άρα ισχύει

$$|x_n - x_m| = |(x_n - x) - (x_m - x)| \leq |x_n - x| + |x_m - x| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

για κάθε $n \geq n_0$, $m \geq n_0$.

Άρα η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy. $\square$

Το Κριτήριο Cauchy είναι το αντίστροφο της Πρότασης 11.2.

Κριτήριο Cauchy. Αν η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy, τότε συγκλίνει.

Απόδειξη. Έστω ότι η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy.

Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|x_n - x_m| < 1$ για κάθε $n \geq n_0, m \geq n_0$. Ειδικότερα, θεωρώντας $m = n_0$, για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $|x_n - x_{n_0}| < 1$, οπότε

$$|x_n| = |(x_n - x_{n_0}) + x_{n_0}| \leq |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0}| < 1 + |x_{n_0}|.$$

Επομένως, αν θέσουμε $M = 1 + |x_{n_0}|$, έχουμε ότι από έναν δείκτη και πέρα οι όροι της (x_n) είναι στο διάστημα $[-M, M]$, οπότε η (x_n) είναι φραγμένη.

Επειδή η (x_n) είναι φραγμένη, έχει σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano-Weierstrass υποακολουθία (x_{n_k}) η οποία συγκλίνει. Έστω

$$x_{n_k} \rightarrow x.$$

Θα αποδείξουμε ότι $x_n \rightarrow x$.

Έστω $\epsilon > 0$. Υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$|x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{για κάθε } n \geq n_0, m \geq n_0.$$

Τώρα παίρνουμε ένα οποιοδήποτε $n \geq n_0$ και το κρατάμε, προσωρινά, σταθερό.

Επειδή $n_k \rightarrow +\infty$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $n_k \geq n_0$, οπότε από την τελευταία ανισότητα έχουμε ότι ισχύει τελικά

$$|x_n - x_{n_k}| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Επίσης, επειδή $x_{n_k} \rightarrow x$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά

$$|x_{n_k} - x| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Επομένως, μπορούμε να πάρουμε κάποιο αρκετά μεγάλο k για το οποίο ισχύουν οι δύο τελευταίες ανισότητες, οπότε με ένα τέτοιο k βρίσκουμε

$$|x_n - x| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - x)| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Επειδή ισχύει $|x_n - x| < \epsilon$ για το οποιοδήποτε $n \geq n_0$, συνεπάγεται ότι $x_n \rightarrow x$. $\square$

Η χρησιμότητα του Κριτηρίου Cauchy είναι η εξής. Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι μια ακολουθία (x_n) συγκλίνει και δεν γνωρίζουμε το υποψήφιο όριο x της (x_n) , αντί να μελετήσουμε τις αποστάσεις $|x_n - x|$ των όρων της ακολουθίας από το άγνωστο x , μελετάμε τις αποστάσεις $|x_n - x_m|$ μεταξύ των όρων της ακολουθίας. Πρέπει, βέβαια, να λάβουμε υπόψη ότι το Κριτήριο Cauchy δεν προσδιορίζει το όριο μιας ακολουθίας Cauchy.

Παράδειγμα 11.12. Έστω η ακολουθία (x_n) με τύπο $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ για κάθε n . Θα αποδείξουμε ότι η (x_n) συγκλίνει.

Έστω $m > n$. Τότε

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(m-1)^2} + \frac{1}{m^2} < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(m-2)(m-1)} + \frac{1}{(m-1)m} \\ &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{m-2} - \frac{1}{m-1}\right) + \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Τώρα, έστω $\epsilon > 0$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\frac{1}{n_0} < \epsilon$. Τότε από το $m > n \geq n_0$ συνεπάγεται $|x_n - x_m| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon$.

Άρα η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy, οπότε συγκλίνει.

Ασκήσεις

11.7. Έστω η ακολουθία (x_n) με τύπο $x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ για κάθε n .

Αποδείξτε ότι ισχύει $|x_n - x_m| = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{(-1)^{m-n-1}}{m} \right| \leq \frac{1}{n+1}$ για κάθε n, m με $n < m$. Συμπεράνατε ότι η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy και ότι συγκλίνει.

11.8. (i) Έστω $0 < M < 1$ και έστω ότι ισχύει $|x_n - x_{n+1}| \leq cM^n$ για κάθε n . Αποδείξτε ότι ισχύει $|x_n - x_m| \leq c \frac{M^n}{1-M}$ για κάθε n, m με $n < m$. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy. Αν x είναι το όριο της (x_n) , αποδείξτε ότι ισχύει $|x_n - x| \leq c \frac{M^n}{1-M}$ για κάθε n .

(ii) Έστω $0 < M < 1$ και έστω ότι ισχύει $|x_{n+1} - x_{n+2}| \leq M|x_n - x_{n+1}|$ για κάθε n . Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy. Αν x είναι το όριο της (x_n) , αποδείξτε ότι υπάρχει $c \geq 0$ ώστε να ισχύει $|x_n - x| \leq c \frac{M^n}{1-M}$ για κάθε n .

(iii) Έστω $x_1 > 0$ και ότι ισχύει $x_{n+1} = 1 + \frac{3}{1+x_n}$ για κάθε n . Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) συγκλίνει και βρείτε το όριο της. Βρείτε και μία εκτίμηση για την απόσταση του n -οστού όρου x_n από το όριο της ακολουθίας.

(iv) Έστω $0 < |\kappa| < 1$ και ότι ισχύει $x_{n+1} = a + \kappa \sin x_n$ για κάθε n . Αποδείξτε ότι η (x_n) συγκλίνει και βρείτε το όριο της. Βρείτε και μία εκτίμηση για την απόσταση του n -οστού όρου x_n από το όριο της ακολουθίας.

11.10 Ανώτερο όριο και κατώτερο όριο ακολουθίας

Πρόταση 11.3. Έστω ακολουθία (x_n) .

(i) Υπάρχει μοναδικό $\bar{x}$ στο $\overline{\mathbb{R}}$ με τις εξής δύο ιδιότητες:

(α) Για κάθε $u > \bar{x}$ ισχύει $x_n \geq u$ για το πολύ πεπερασμένα n .

(β) Για κάθε $l < \bar{x}$ ισχύει $x_n > l$ για άπειρα n .

(ii) Υπάρχει μοναδικό $\underline{x}$ στο $\overline{\mathbb{R}}$ με τις εξής δύο ιδιότητες:

(α) Για κάθε $l < \underline{x}$ ισχύει $x_n \leq l$ για το πολύ πεπερασμένα n .

(β) Για κάθε $u > \underline{x}$ ισχύει $x_n < u$ για άπειρα n .

(iii) Ισχύει $\underline{x} \leq \bar{x}$.

Απόδειξη. (i) Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις.

Πρώτη περίπτωση: Η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη.

Τότε το $\bar{x} = +\infty$ έχει την ιδιότητα (β). Πράγματι, αν δεν την είχε, τότε θα υπήρχε κάποιο $l < +\infty$ ώστε να ισχύει $x_n > l$ για το πολύ πεπερασμένα n , οπότε η (x_n) θα ήταν άνω φραγμένη.

Επίσης, το $+\infty$ έχει την ιδιότητα (α). Πράγματι, αν δεν την είχε, τότε θα υπήρχε κάποιο $u > +\infty$ έτσι ώστε να ισχύει $x_n \geq u$ για άπειρα n . Αλλά τέτοιο u δεν υπάρχει, διότι, απλούστατα, δεν υπάρχει κανένα $u > +\infty$.

Δεύτερη περίπτωση: Η (x_n) τείνει στο $-\infty$.

Τότε το $\bar{x} = -\infty$ έχει την ιδιότητα (α). Πράγματι, επειδή $x_n \rightarrow -\infty$, για κάθε $u > -\infty$ ισχύει $x_n < u$ από κάποιον δείκτη και πέρα, οπότε ισχύει $x_n \geq u$ για το πολύ πεπερασμένα n .

Επίσης, το $-\infty$ έχει την ιδιότητα (β). Πράγματι, αν δεν την είχε, τότε θα υπήρχε κάποιο $l < -\infty$ έτσι ώστε να ισχύει $x_n > l$ για το πολύ πεπερασμένα n . Αλλά τέτοιο l δεν υπάρχει, διότι, απλούστατα, δεν υπάρχει κανένα $l < -\infty$.

Τρίτη περίπτωση: Η (x_n) είναι άνω φραγμένη και δεν τείνει στο $-\infty$.

Αφού η (x_n) δεν τείνει στο $-\infty$, υπάρχει κάποιο $N > 0$ ώστε να ισχύει $x_n \geq -N$ για άπειρα n . Άρα το σύνολο

$$X = \{x \mid \text{ισχύει } x_n \geq x \text{ για άπειρα } n\}$$

δεν είναι κενό.

Επειδή η (x_n) είναι άνω φραγμένη, υπάρχει M ώστε να ισχύει $x_n \leq M$ για κάθε n . Τότε ισχύει $x \leq M$ για κάθε $x \in X$, οπότε το M είναι άνω φράγμα του X .

Άρα το X έχει ελάχιστο άνω φράγμα, το οποίο συμβολίζεται $\sup X$ και, για ευκολία, θα το γράψουμε

$$\bar{x} = \sup X.$$

Τώρα, έστω $u > \bar{x}$. Επειδή το $\bar{x}$ είναι άνω φράγμα του X , το u δεν ανήκει στο X , οπότε ισχύει $x_n \geq u$ για το πολύ πεπερασμένα n . Άρα το $\bar{x}$ έχει την ιδιότητα (α).

Κατόπιν, έστω $l < \bar{x}$. Επειδή το $\bar{x}$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του X , το l δεν είναι άνω φράγμα του X , οπότε υπάρχει $x \in X$ ώστε $l < x$. Επειδή $x \in X$, ισχύει $x_n \geq x > l$ για άπειρα n . Άρα το $\bar{x}$ έχει την ιδιότητα (β).

Αποδείξαμε, λοιπόν, και στις τρεις περιπτώσεις, ότι υπάρχει $\bar{x}$ στο $\mathbb{R}$ με τις ιδιότητες (α) και (β). Τώρα θα δούμε ότι αυτό το $\bar{x}$ είναι μοναδικό.

Έστω ότι τα $\bar{x}'$ και $\bar{x}''$ έχουν τις ιδιότητες (α) και (β) και έστω $\bar{x}' < \bar{x}''$. Τότε θεωρούμε οποιοδήποτε x ώστε $\bar{x}' < x < \bar{x}''$. Επειδή το $\bar{x}'$ έχει την ιδιότητα (α), ισχύει $x_n \geq x$ για το πολύ πεπερασμένα n . Επίσης, επειδή το $\bar{x}''$ έχει την ιδιότητα (β), ισχύει $x_n > x$ για άπειρα n . Προφανώς, προκύπτει άτοπο.

(ii) Επαναλαμβάνουμε τα προηγούμενα, αντιστρέφοντας όλες τις ανισότητες.

(iii) Έστω $\bar{x} < \underline{x}$. Θεωρούμε οποιοδήποτε x ώστε $\bar{x} < x < \underline{x}$. Επειδή το $\bar{x}$ έχει την ιδιότητα (α), ισχύει $x_n \geq x$ για το πολύ πεπερασμένα n . Επίσης, επειδή το $\underline{x}$ έχει την ιδιότητα (β), ισχύει $x_n > x$ για άπειρα n . Άτοπο. $\square$

Ορισμός 11.5. Τα στοιχεία $\underline{x}$ και $\bar{x}$, η ύπαρξη και η μοναδικότητα των οποίων αποδεικνύεται στην Πρόταση 11.3, ονομάζονται **κατώτερο όριο** και **ανώτερο όριο**, αντιστοίχως, της (x_n) και συμβολίζονται, αντιστοίχως,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n, \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n.$$

Το (iii) της Πρότασης 11.3 λέει ότι

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n.$$

Παράδειγμα 11.13. Ας πάρουμε την ακολουθία $((-1)^n)$, δηλαδή την $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$

Για κάθε $u > 1$ δεν ισχύει $(-1)^n \geq u$ για κανένα n . Επίσης, για κάθε $l < 1$ ισχύει $(-1)^n > l$ για άπειρα n , τα άρτια n . Άρα ο αριθμός 1 έχει τις ιδιότητες (α) και (β) του $\bar{x}$ στην Πρόταση 11.3, οπότε $\limsup_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n = 1$.

Επίσης, για κάθε $l < -1$ δεν ισχύει $(-1)^n \leq l$ για κανένα n . Και για κάθε $u > -1$ ισχύει $(-1)^n < u$ για άπειρα n , τα περιττά n . Άρα ο αριθμός -1 έχει τις ιδιότητες (α) και (β) του $\underline{x}$ στην Πρόταση 11.3, οπότε $\liminf_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n = -1$.

Παράδειγμα 11.14. Τώρα θεωρούμε την ακολουθία $(\frac{(-1)^n}{n})$, δηλαδή την $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$

Για όλα τα παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε το ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Για κάθε $u > 0$ ισχύει $\frac{(-1)^n}{n} \geq u$ για το πολύ πεπερασμένα n . Επίσης, για κάθε $l < 0$ ισχύει $\frac{(-1)^n}{n} > l$ για άπειρα n , όλα από κάποια τιμή του n και πέρα. Άρα ο αριθμός 0 έχει τις ιδιότητες (α) και (β) του $\bar{x}$ στην Πρόταση 11.3, οπότε $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Επίσης, για κάθε $l < 0$ ισχύει $\frac{(-1)^n}{n} \leq l$ για το πολύ πεπερασμένα n . Και για κάθε $u > 0$ ισχύει $\frac{(-1)^n}{n} < u$ για άπειρα n , όλα από κάποια τιμή του n και πέρα. Άρα ο αριθμός 0 έχει τις ιδιότητες (α) και (β) του $\underline{x}$ στην Πρόταση 11.3, οπότε $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Παρατηρήστε πώς τα δύο προηγούμενα παραδείγματα ταιριάζουν με την πρόταση που ακολουθεί. Στο πρώτο παράδειγμα η ακολουθία δεν έχει όριο και το ανώτερο και το κατώτερο όριο της είναι διαφορετικά. Στο δεύτερο παράδειγμα η ακολουθία έχει όριο και το ανώτερο και το κατώτερο όριό της είναι ίσα και τα δύο με το όριό της.

Πρόταση 11.4. Η ακολουθία (x_n) έχει όριο, αν και μόνο αν $\liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n$. Σε αυτήν την περίπτωση ισχύει $\liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

Απόδειξη. Επαναφέρουμε, για ευκολία, τα σύμβολα $\underline{x} = \liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n$ και $\bar{x} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n$ της Πρότασης 11.3.

Έστω ότι η (x_n) έχει όριο και έστω $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

Τότε για κάθε l, u με $l < x < u$ ισχύει τελικά $l < x_n < u$. Επομένως, το x έχει τις ιδιότητες (α) και (β) που ικανοποιούν τα $\underline{x}$ και $\bar{x}$, οπότε λόγω μοναδικότητας των $\underline{x}, \bar{x}$ ισχύει $\underline{x} = \bar{x} = x$.

Αντιστρόφως, έστω $\underline{x} = \bar{x}$. Θέτουμε $x = \underline{x} = \bar{x}$ και έστω l, u με $l < x < u$. Επειδή το x έχει την ιδιότητα (α) του $\underline{x}$, ισχύει $x_n \leq l$ για το πολύ πεπερασμένα n , οπότε ισχύει $l < x_n$ τελικά. Επίσης, επειδή το x έχει την ιδιότητα (α) του $\bar{x}$, ισχύει $x_n \geq u$ για το πολύ πεπερασμένα n , οπότε ισχύει $x_n < u$ τελικά. Επομένως, ισχύει $l < x_n < u$ τελικά.

Αποδείξαμε ότι για κάθε l, u με $l < x < u$ ισχύει $l < x_n < u$ τελικά. Άρα $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$. $\square$

Ορισμός 11.6. Έστω ακολουθία (x_n) . Αν ένα στοιχείο του $\overline{\mathbb{R}}$ είναι όριο κάποιας υπακολουθίας της (x_n) , τότε λέμε ότι είναι **υπακολουθιακό όριο** της (x_n) .

Παράδειγμα 11.15. Η ακολουθία (x_n) με $x_n = (-1)^n$ για κάθε n έχει δύο προφανή υπακολουθιακά όρια, το -1 και το 1 .

Ας δούμε αν υπάρχει τρίτο υπακολουθιακό όριο, έστω x . Δηλαδή, το x είναι τέτοιο ώστε για κάποια υπακολουθία (x_{n_k}) ισχύει $x_{n_k} \rightarrow x$.

Αφού όλοι οι όροι της ακολουθίας είναι 1 ή -1 , τότε είτε άπειροι όροι της (x_{n_k}) είναι ίσοι με 1 είτε άπειροι όροι της είναι ίσοι με -1 .

Στην πρώτη περίπτωση, οι άπειροι όροι 1 της (x_{n_k}) αποτελούν υπακολουθία της η οποία τείνει στο 1 . Αλλά αυτή η υπακολουθία της (x_{n_k}) πρέπει να έχει το ίδιο όριο με την (x_{n_k}) , δηλαδή το x . Άρα $x = 1$.

Ομοίως, στη δεύτερη περίπτωση, οι άπειροι όροι -1 της (x_{n_k}) αποτελούν υπακολουθία της η οποία τείνει στο -1 . Αλλά αυτή η υπακολουθία της (x_{n_k}) πρέπει να έχει το ίδιο όριο με την (x_{n_k}) , δηλαδή το x . Άρα $x = -1$.

Άρα τα μόνα υπακολουθιακά όρια της ακολουθίας είναι τα ± 1 .

Παράδειγμα 11.16. Αν μία ακολουθία (x_n) έχει όριο x , τότε κάθε υπακολουθία της έχει το ίδιο όριο x , οπότε το x είναι το μοναδικό υπακολουθιακό όριο της (x_n) .

Παρατηρήστε, πάλι, πώς τα δύο προηγούμενα παραδείγματα ταιριάζουν με την πρόταση που ακολουθεί. Στο πρώτο παράδειγμα η ακολουθία έχει ακριβώς δύο υπακολουθιακά όρια. Το μεγαλύτερο, το 1 , είναι το ίδιο με το ανώτερο όριό της και το μικρότερο, το -1 , είναι το ίδιο με το κατώτερο όριό της. Στο δεύτερο παράδειγμα η ακολουθία έχει όριο και το ανώτερο και το κατώτερο όριό της είναι ίσα και τα δύο με το όριό της και, ταυτόχρονα, το μεγαλύτερο και το μικρότερο υπακολουθιακό της όριο είναι και αυτά ίσα με το όριό της.

Πρόταση 11.5. Έστω ακολουθία (x_n) . Το $\liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n$ είναι το μικρότερο υπακολουθιακό όριο της (x_n) και το $\limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n$ είναι το μεγαλύτερο υπακολουθιακό όριο της (x_n) .

Απόδειξη. Επαναφέρουμε, πάλι, για ευκολία, τα σύμβολα $\underline{x} = \liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n$ και $\bar{x} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n$ της

Πρότασης 11.3.

Θεωρούμε το $\bar{x}$ και διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις.

Πρώτη περίπτωση: $\bar{x} = -\infty$.

Επειδή $\underline{x} \leq \bar{x}$, είναι $\underline{x} = \bar{x} = -\infty$, οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 11.4, η $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \bar{x}$. Άρα το $\bar{x}$ είναι το μοναδικό, οπότε και το μέγιστο, υπακολουθιακό όριο της (x_n) .

Δεύτερη περίπτωση: $\bar{x} = +\infty$.

Επειδή $1 < \bar{x}$, ισχύει $x_n > 1$ για άπειρα n . Επιλέγουμε n_1 ώστε $x_{n_1} > 1$.

Επειδή $2 < \bar{x}$, ισχύει $x_n > 2$ για άπειρα n . Επιλέγουμε n_2 ώστε $x_{n_2} > 2$. Επίσης, επειδή τα n για τα οποία ισχύει $x_n > 2$ είναι άπειρα, μπορούμε να επιλέξουμε $n_2 > n_1$.

Επειδή $3 < \bar{x}$, ισχύει $x_n > 3$ για άπειρα n . Επιλέγουμε n_3 ώστε $x_{n_3} > 3$. Επίσης, επειδή τα n για τα οποία ισχύει $x_n > 3$ είναι άπειρα, μπορούμε να επιλέξουμε $n_3 > n_2$.

Συνεχίζοντας, επαγωγικά, με αυτόν τον τρόπο, δημιουργείται υπακολουθία (x_{n_k}) ώστε να ισχύει $x_{n_k} > k$ για κάθε k , οπότε $x_{n_k} \rightarrow +\infty$. Άρα το $\bar{x} = +\infty$ είναι υπακολουθιακό όριο της (x_n) και, προφανώς, είναι το μεγαλύτερο.

Τρίτη περίπτωση: $-\infty < \bar{x} < +\infty$.

Κατ' αρχάς, μία γενική παρατήρηση. Για κάθε $a > 0$ είναι $\bar{x} - a < \bar{x} < \bar{x} + a$, οπότε ισχύει $x_n > \bar{x} - a$ για άπειρα n και ισχύει $x_n < \bar{x} + a$ για το πολύ πεπερασμένα n , οπότε ισχύει $\bar{x} - a < x_n < \bar{x} + a$ για άπειρα n . Αυτό θα το εφαρμόσουμε άπειρες φορές παρακάτω.

Ισχύει $\bar{x} - 1 < x_n < \bar{x} + 1$ για άπειρα n . Επιλέγουμε n_1 ώστε $\bar{x} - 1 < x_{n_1} < \bar{x} + 1$.

Ισχύει $\bar{x} - \frac{1}{2} < x_n < \bar{x} + \frac{1}{2}$ για άπειρα n . Επιλέγουμε n_2 ώστε $\bar{x} - \frac{1}{2} < x_{n_2} < \bar{x} + \frac{1}{2}$. Επίσης, επειδή τα n για τα οποία ισχύει $\bar{x} - \frac{1}{2} < x_n < \bar{x} + \frac{1}{2}$ είναι άπειρα, μπορούμε να επιλέξουμε $n_2 > n_1$.

Ισχύει $\bar{x} - \frac{1}{3} < x_n < \bar{x} + \frac{1}{3}$ για άπειρα n . Επιλέγουμε n_3 ώστε $\bar{x} - \frac{1}{3} < x_{n_3} < \bar{x} + \frac{1}{3}$. Επίσης, επειδή τα n για τα οποία ισχύει $\bar{x} - \frac{1}{3} < x_n < \bar{x} + \frac{1}{3}$ είναι άπειρα, μπορούμε να επιλέξουμε $n_3 > n_2$.

Συνεχίζοντας επαγωγικά, δημιουργείται υπακολουθία (x_{n_k}) ώστε να ισχύει $\bar{x} - \frac{1}{k} < x_{n_k} < \bar{x} + \frac{1}{k}$ για κάθε k , οπότε $x_{n_k} \rightarrow \bar{x}$. Άρα το $\bar{x}$ είναι υπακολουθιακό όριο της (x_n) .

Τέλος, έστω $\bar{x} < x$. Θεωρούμε u έτσι ώστε $\bar{x} < u < x$. Αν υπήρχε υπακολουθία της (x_n) με όριο το x , τότε οι όροι της υπακολουθίας θα ήταν τελικά $\geq u$, οπότε θα υπήρχαν άπειροι όροι της (x_n) οι οποίοι θα ήταν $\geq u$. Αυτό είναι άτοπο, οπότε δεν υπάρχει υπακολουθία της (x_n) με όριο $x > \bar{x}$. Επομένως, το $\bar{x} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n$ είναι το μεγαλύτερο υπακολουθιακό όριο της (x_n) .

Με παρόμοια συμμετρικά επιχειρήματα βλέπουμε ότι το $\underline{x} = \liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n$ είναι το μικρότερο υπακολουθιακό όριο της (x_n) . □

Ασκήσεις

11.9. Έστω $a < b < c$ και οι ακολουθίες $a, b, a, b, a, b, a, b, \dots$ και $a, b, c, a, b, c, a, b, c, \dots$. Βρείτε τα $\liminf_{n \rightarrow +\infty}$ και $\limsup_{n \rightarrow +\infty}$ των ακολουθιών αυτών, καθώς και όλα τα υπακολουθιακά όριά τους.

11.10. Βρείτε τα $\liminf_{n \rightarrow +\infty}$ και $\limsup_{n \rightarrow +\infty}$ καθεμιάς από τις ακολουθίες $(\frac{n+1}{n})$, $(\frac{n^2+n+1}{n+3})$, $((-2)^n)$, $(2^{(-1)^{n-1}n})$, $((-1)^{n-1}(1 - \frac{1}{n}))$, $((-1)^{n-1}(1 + \frac{1}{n}))$, $(2^{n-3[n/3]})$, $(\sin \frac{2n\pi}{3})$.

11.11. Αποδείξτε ότι $\limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$, αν και μόνο αν η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη.

Αποδείξτε ότι $\limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty$, αν και μόνο αν $x_n \rightarrow -\infty$.

Ποια είναι τα αντίστοιχα αποτελέσματα για το $\liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n$;

11.12. Αποδείξτε ότι $\liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\limsup_{n \rightarrow +\infty} (-x_n)$.

11.13. Αν ισχύει τελικά $x_n \leq y_n$, αποδείξτε ότι $\liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} y_n$ και $\limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} y_n$.

11.14. Έστω ότι ισχύει τελικά $x_n \leq y_n \leq z_n$. Αν $\limsup_{n \rightarrow +\infty} z_n \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n$, αποδείξτε ότι οι ακολουθίες (x_n) , (y_n) , (z_n) έχουν το ίδιο όριο.

11.15. Θεωρήστε την ακολουθία $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, \dots$. Αποδείξτε ότι το σύνολο των υπακολουθιακών ορίων της είναι ολόκληρο το διάστημα $[0, 1]$.

11.16. Έστω $a < b$. Μπορεί να υπάρχει ακολουθία (x_n) με σύνολο υπακολουθιακών ορίων το διάστημα (a, b) ;

11.11 Όριο μονότονης συνάρτησης

Θα αποδείξουμε το Θεώρημα 4.1.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 4.1. (i) Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, έστω ότι το ξ , αριθμός ή $+\infty$, είναι σημείο συσσώρευσης από αριστερά του του A και έστω ότι η f είναι αύξουσα αριστερά του ξ . Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Πρώτη περίπτωση: η f δεν είναι άνω φραγμένη αριστερά του ξ .

Παίρνουμε οποιοδήποτε $M > 0$. Τότε το M δεν είναι άνω φράγμα της f αριστερά του ξ , οπότε υπάρχει $x_0 \in A$, $x_0 < \xi$, ώστε $f(x_0) > M$. Επειδή η f είναι αύξουσα αριστερά του ξ , ισχύει $f(x) \geq f(x_0) > M$ για κάθε $x \in A$, $x_0 < x < \xi$.

Επομένως, για κάθε $M > 0$ ισχύει $f(x) > M$ κοντά στο ξ από αριστερά του, οπότε $\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) = +\infty$.

Δεύτερη περίπτωση: η f είναι άνω φραγμένη αριστερά του ξ . Δηλαδή, υπάρχει u ώστε να ισχύει $f(x) \leq u$ για κάθε $x \in A$, $x < \xi$.

Θεωρούμε το σύνολο τιμών της f στο μέρος του A αριστερά του ξ , δηλαδή το

$$Y = \{f(x) \mid x \in A, x < \xi\}.$$

Τότε το Y έχει, προφανώς, το u ως άνω φράγμα του. Επομένως, το Y έχει ελάχιστο άνω φράγμα, το $\sup Y$, το οποίο, για ευκολία, θα το γράψουμε

$$\eta = \sup Y.$$

Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) = \eta$.

Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή $\eta - \epsilon < \eta$ και επειδή το η είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του Y , το $\eta - \epsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του Y . Άρα υπάρχει $x_0 \in A$, $x_0 < \xi$, ώστε $\eta - \epsilon < f(x_0)$. Επειδή η f είναι αύξουσα αριστερά του ξ , ισχύει

$$\eta - \epsilon < f(x_0) \leq f(x) \quad \text{για κάθε } x \in A, x_0 < x < \xi.$$

Ακόμη, επειδή το η είναι άνω φράγμα του Y , ισχύει

$$f(x) \leq \eta < \eta + \epsilon \quad \text{για κάθε } x \in A, x < \xi.$$

Άρα ισχύει $\eta - \epsilon < f(x) < \eta + \epsilon$ για κάθε $x \in A$, $x_0 < x < \xi$.

Επομένως, για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $|f(x) - \eta| < \epsilon$ κοντά στο ξ από αριστερά του, οπότε $\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) = \eta$.

Αν η f είναι φθίνουσα, αντί αύξουσα, αριστερά του ξ , τότε η απόδειξη είναι παρόμοια.

(ii) Ομοίως. □

11.12 Οι αποδείξεις των τριών βασικών θεωρημάτων για συνεχείς συναρτήσεις

Τώρα θα δούμε τις αποδείξεις των τριών βασικών θεωρημάτων για συνεχείς συναρτήσεις: του Θεωρήματος Φραγμένης Συνάρτησης, του Θεωρήματος Μέγιστης / Ελάχιστης Τιμής και του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής.

Η απόδειξη του Θεωρήματος Φραγμένης Συνάρτησης. Έστω ότι η f δεν είναι φραγμένη στο $[a, b]$. Δηλαδή, έστω ότι μπορούμε να βρούμε τιμές της f με απόλυτη τιμή όσο μεγάλη θέλουμε. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in [a, b]$ με $|f(x_n)| > n$. Έτσι προκύπτει ακολουθία (x_n) στο $[a, b]$ τέτοια ώστε

$$|f(x_n)| \rightarrow +\infty. \quad (11.2)$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass, υπάρχει υπακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) η οποία συγκλίνει: έστω $x_{n_k} \rightarrow \xi$. Επειδή ισχύει $a \leq x_{n_k} \leq b$ για κάθε k , συνεπάγεται $a \leq \xi \leq b$. Επομένως, η f είναι συνεχής στο ξ , οπότε από το $x_{n_k} \rightarrow \xi$ συνεπάγεται $f(x_{n_k}) \rightarrow f(\xi)$, οπότε $|f(x_{n_k})| \rightarrow |f(\xi)|$. Όμως, από την (11.2) έχουμε $|f(x_{n_k})| \rightarrow +\infty$ και καταλήγουμε σε άτοπο. □

Η απόδειξη του Θεωρήματος Μέγιστης / Ελάχιστης Τιμής. Από το Θεώρημα Φραγμένης Συνάρτησης έχουμε ότι η f είναι φραγμένη στο $[a, b]$, οπότε το σύνολο τιμών $\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ της συνάρτησης είναι φραγμένο. Επομένως, το σύνολο τιμών της f έχει ελάχιστο άνω φράγμα και μέγιστο κάτω φράγμα.

Θέτουμε

$$u = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}.$$

Από το ότι το u είναι άνω φράγμα του συνόλου $\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ συνεπάγεται ότι ισχύει

$$f(x) \leq u \quad \text{για κάθε } x \in [a, b]. \quad (11.3)$$

Και από το ότι το u είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του $\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ συνεπάγεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το $u - \frac{1}{n}$ δεν είναι άνω φράγμα του $\{f(x) \mid a \leq x \leq b\}$, οπότε υπάρχει $x_n \in [a, b]$ ώστε

$$u - \frac{1}{n} < f(x_n). \quad (11.4)$$

Συνδυάζοντας τις ανισότητες (11.3) και (11.4), βρίσκουμε ότι ισχύει $u - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq u$ για κάθε n , οπότε προκύπτει ακολουθία (x_n) στο $[a, b]$ με

$$f(x_n) \rightarrow u. \quad (11.5)$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass υπάρχει υπακολουθία (x_{n_k}) η οποία συγκλίνει: έστω $x_{n_k} \rightarrow \eta$. Επειδή ισχύει $a \leq x_{n_k} \leq b$ για κάθε k , συνεπάγεται $a \leq \eta \leq b$. Επομένως, η f είναι συνεχής στο η , οπότε από το $x_{n_k} \rightarrow \eta$ συνεπάγεται $f(x_{n_k}) \rightarrow f(\eta)$. Λόγω της (11.5) έχουμε ότι $f(x_{n_k}) \rightarrow u$, οπότε $f(\eta) = u$. Άρα η (11.3) γίνεται

$$f(x) \leq f(\eta) \quad \text{για κάθε } x \in [a, b].$$

Με παρόμοιο τρόπο, από το infimum του συνόλου τιμών $\{f(x) \mid a \leq x \leq b\}$, προκύπτει $\zeta \in [a, b]$ με την ιδιότητα: $f(\zeta) \leq f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. $\square$

Η απόδειξη του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής. Έστω $f(a) \leq c \leq f(b)$.

Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq c\}.$$

Το A δεν είναι κενό, αφού $a \in A$. Επίσης, επειδή $A \subseteq [a, b]$, το A είναι άνω φραγμένο, οπότε έχει ελάχιστο άνω φράγμα, το οποίο συμβολίζεται $\sup A$, και το οποίο, για ευκολία, θα το γράψουμε ξ . Δηλαδή, θέτουμε

$$\xi = \sup A.$$

Επειδή $a \in A$ και το ξ είναι άνω φράγμα του A , έχουμε ότι $a \leq \xi$. Επίσης, επειδή το b είναι άνω φράγμα του A και το ξ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A , έχουμε ότι $\xi \leq b$. Επομένως, $\xi \in [a, b]$, οπότε η f είναι συνεχής στο ξ .

Έστω $f(\xi) > c$. Τότε, προφανώς, $a < \xi \leq b$. Επειδή η f είναι συνεχής στο ξ , ισχύει $f(x) > c$ κοντά στο ξ , οπότε υπάρχει d με $a \leq d < \xi$ ώστε να ισχύει $f(x) > c$ για κάθε $x \in (d, \xi]$. Επειδή το ξ είναι άνω φράγμα του A , έχουμε ότι ισχύει $f(x) > c$ για κάθε $x \in (\xi, b]$. Άρα, συνολικά, έχουμε ότι ισχύει $f(x) > c$ για κάθε $x \in (d, b]$. Αυτό σημαίνει ότι το d είναι άνω φράγμα του A . Όμως, αυτό είναι άτοπο, διότι $d < \xi$ και το ξ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A . Άρα

$$f(\xi) \leq c.$$

Έστω $f(\xi) < c$. Τότε, προφανώς, $a \leq \xi < b$. Επειδή η f είναι συνεχής στο ξ , ισχύει $f(x) < c$ κοντά στο ξ , οπότε υπάρχει d με $\xi < d \leq b$ ώστε να ισχύει $f(x) < c$ για κάθε $x \in [\xi, d)$. Άρα $[\xi, d) \subseteq A$. Τότε, όμως, υπάρχουν στοιχεία του A τα οποία είναι $> \xi$ και αυτό είναι άτοπο διότι το ξ είναι άνω φράγμα του A . Άρα

$$f(\xi) \geq c.$$

Από τις $f(\xi) \leq c$ και $f(\xi) \geq c$ συνεπάγεται $f(\xi) = c$.

Άρα υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $f(\xi) = c$.

Η απόδειξη είναι όμοια στην περίπτωση $f(b) \leq c \leq f(a)$. $\square$

11.13 Ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις

Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Γνωρίζουμε ότι η f είναι συνεχής στο ξ , αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ με $|x - \xi| < \delta$. Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι το δ εξαρτάται από το ϵ και από το ξ . Πράγματι: (i) επιλέγουμε το ξ στο οποίο θέλουμε να εξετάσουμε αν η f είναι συνεχής, επιλέγουμε το ϵ και, μετά από τις συγκεκριμένες επιλογές των ξ, ϵ , επιλέγουμε, αν υπάρχει, το κατάλληλο δ , (ii) αν επιλέξουμε διαφορετικό ξ ή ϵ , τότε ενδέχεται να πρέπει να επιλέξουμε διαφορετικό δ από το προηγούμενο.

Στην παρούσα ενότητα μας ενδιαφέρει η εξάρτηση του δ από το ξ .

Παράδειγμα 11.17. Έστω η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2$.

Γνωρίζουμε ότι η f είναι συνεχής σε κάθε ξ . Επομένως, για κάθε ξ και για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|x^2 - \xi^2| < \epsilon$ για κάθε x με $|x - \xi| < \delta$. Θα δούμε ότι δεν υπάρχει επιλογή του δ ανεξάρτητη του ξ .

Έστω, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι, με προεπιλεγμένο και σταθεροποιημένο $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ εξαρτώμενο μόνο από το ϵ , οπότε και αυτό σταθεροποιημένο, ώστε για κάθε ξ να ισχύει $|x^2 - \xi^2| < \epsilon$ για κάθε x με $|x - \xi| < \delta$. Τώρα, για κάθε ξ , το $x = \xi + \frac{\delta}{2}$ ικανοποιεί την $|x - \xi| < \delta$, οπότε πρέπει να ικανοποιεί και την $|x^2 - \xi^2| < \epsilon$. Άρα, μετά από πράξεις, για κάθε ξ ισχύει $|\xi\delta + \frac{\delta^2}{4}| < \epsilon$. Συνοψίζουμε: για κάθε ξ πρέπει να ισχύει $|\xi\delta + \frac{\delta^2}{4}| < \epsilon$ με σταθερά δ, ϵ . Αυτό είναι αδύνατον!! Αν το ξ αυξάνεται απεριόριστα, τότε το $|\xi\delta + \frac{\delta^2}{4}|$ αυξάνεται απεριόριστα: $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} |\xi\delta + \frac{\delta^2}{4}| = +\infty$.

Επομένως, δεν μπορεί να ισχύει $|\xi\delta + \frac{\delta^2}{4}| < \epsilon$ για κάθε ξ .

Τώρα θα κωδικοποιήσουμε σε μορφή ορισμού την κατάσταση κατά την οποία μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής σε κάθε $\xi \in A$ και, επιπλέον, στον ορισμό της συνέχειας το δ δεν εξαρτάται από το ξ , αλλά μόνο από το ϵ . Η κατάσταση αυτή πρέπει να διατυπωθεί ως εξής: για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $\xi \in A$ να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ με $|x - \xi| < \delta$. Πράγματι, από τη διατύπωση αυτή προκύπτει ότι το δ εξαρτάται μόνο από το ϵ : επιλέγουμε $\epsilon > 0$ και κατόπιν βρίσκουμε κατάλληλο $\delta > 0$ ώστε η ανισότητα $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ να ισχύει, με το ίδιο δ , για κάθε $\xi \in A$ και κάθε $x \in A$ με $|x - \xi| < \delta$. Ακολουθεί μια μικρή απλοποίηση στη διατύπωση: για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A, \xi \in A$ με $|x - \xi| < \delta$. Τέλος, χρησιμοποιώντας το ίδιο σύμβολο για τις τιμές x, ξ της ανεξάρτητης μεταβλητής, διατυπώνουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός 11.7. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A , αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$ για κάθε $x' \in A, x'' \in A$ με $|x' - x''| < \delta$.

Είναι σαφές ότι αν η $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A , τότε είναι συνεχής σε κάθε $\xi \in A$. Όμως, όπως φάνηκε στο παραπάνω παράδειγμα, δεν ισχύει το αντίστροφο: η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 11.18. Έστω η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 3x - 2$.

Έστω $\epsilon > 0$. Το $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$ συνεπάγεται από το $|(3x' - 2) - (3x'' - 2)| < \epsilon$ και αυτό συνεπάγεται από το $3|x' - x''| < \epsilon$ και αυτό συνεπάγεται από το $|x' - x''| < \frac{\epsilon}{3}$. Άρα, αν επιλέξουμε $\delta = \frac{\epsilon}{3} > 0$, τότε για κάθε x', x'' με $|x' - x''| < \delta$ ισχύει $|x' - x''| < \frac{\epsilon}{3}$, οπότε $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$. Άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Το ακόλουθο θεώρημα θα παίζει σημαντικό ρόλο σε σχέση με την ολοκληρωσιμότητα συνεχούς συνάρτησης.

Θεώρημα Ομοιόμορφης Συνέχειας. Αν η συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b]$.

Απόδειξη. Έστω ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b]$.

Τότε υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχουν $x' \in [a, b], x'' \in [a, b]$ με $|x' - x''| < \delta$ ώστε

$|f(x') - f(x'')| \geq \epsilon$. Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν

$$x'_n \in [a, b], \quad x''_n \in [a, b] \quad \text{ώστε} \quad |x'_n - x''_n| < \frac{1}{n} \quad \text{και} \quad |f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \epsilon.$$

Η ακολουθία (x'_n) είναι φραγμένη, οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass υπάρχει υπακολουθία (x'_{n_k}) που συγκλίνει. Έστω

$$x'_{n_k} \rightarrow \xi.$$

Επειδή ισχύει $a \leq x'_{n_k} \leq b$ για κάθε k , είναι $a \leq \xi \leq b$. Επειδή ισχύει $|x'_{n_k} - x''_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$ για κάθε k , συνεπάγεται $x'_{n_k} - x''_{n_k} \rightarrow 0$. Από αυτό μαζί με το $x'_{n_k} \rightarrow \xi$ προκύπτει

$$x''_{n_k} \rightarrow \xi.$$

Επειδή $\xi \in [a, b]$, η f είναι συνεχής στο ξ . Άρα από τα $x'_{n_k} \rightarrow \xi$ και $x''_{n_k} \rightarrow \xi$ συνεπάγεται

$$f(x'_{n_k}) \rightarrow f(\xi), \quad f(x''_{n_k}) \rightarrow f(\xi).$$

Επομένως, $f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k}) \rightarrow 0$. Αυτό, όμως, αντιφάσκει με το ότι ισχύει $|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| \geq \epsilon$ για κάθε k .

Καταλήξαμε σε άτοπο, οπότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b]$. $\square$

Ασκήσεις

11.17. Αποδείξτε ότι η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x < 0, \\ 1, & \text{αν } x > 0, \end{cases}$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

11.18. Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις x , $|x|$, $\sqrt{x^2 + 1}$, $\sin x$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο $\mathbb{R}$, ότι η $\sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$ και ότι οι $\frac{1}{x}$, $\sin \frac{1}{x}$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο $(0, +\infty)$.

Αποδείξτε ότι η $f(x) = x \sin(\log(x+1))$ είναι ομοιόμορφα συνεχής και όχι φραγμένη στο $[0, +\infty)$ και ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Αποδείξτε ότι η $\sin(x^2)$ είναι συνεχής και φραγμένη στο $[0, +\infty)$, αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$.

11.19. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $\rho > 0$, $M > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x') - f(x'')| \leq M|x' - x''|^\rho$ για κάθε $x', x'' \in A$. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A .¹

Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις x και $|x|$ ικανοποιούν την παραπάνω ανισότητα στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η x^2 ικανοποιεί την ίδια ανισότητα σε κάθε φραγμένο διάστημα $[a, b]$, αλλά όχι στο $\mathbb{R}$.

11.20. Έστω $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ και $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b)$.

(i) Αποδείξτε ότι, αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ και είναι αριθμός, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b)$.

(ii) Αποδείξτε ότι, αν επιπλέον $b \in \mathbb{R}$ και αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b)$, τότε υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ και είναι αριθμός.

11.21. Έστω $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $a \geq 0$, $b \geq 0$ ώστε να ισχύει $|f(x)| \leq ax + b$ για κάθε $x \geq 0$.

¹ Αν η f ικανοποιεί τις παραπάνω υποθέσεις, τότε χαρακτηρίζεται **Hölder συνεχής** στο A με Hölder εκθέτη ρ . Ειδικά, αν $\rho = 1$, τότε η f χαρακτηρίζεται **Lipschitz συνεχής** στο A . Μελετήστε και την άσκηση 6.62.

11.14 Η ολοκληρωσιμότητα των συνεχών συναρτήσεων

Ορισμός 11.8. Έστω Δ', Δ'' δύο διαμερίσεις του $[a, b]$. Η Δ'' χαρακτηρίζεται **λεπτότερη** από τη Δ' , αν $\Delta' \subseteq \Delta''$, δηλαδή αν τα διαιρετικά σημεία της Δ' είναι διαιρετικά σημεία και της Δ'' , δηλαδή αν η Δ'' περιέχει τα διαιρετικά σημεία Δ' και, ενδεχομένως, επιπλέον διαιρετικά σημεία.

Παράδειγμα 11.19. Η διαμέριση $\Delta'' = \{0, \frac{1}{8}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, 1\}$ του $[0, 1]$ είναι λεπτότερη από τη διαμέριση $\Delta' = \{0, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{3}{4}, 1\}$ του $[0, 1]$.

Από τις διαμερίσεις $\Delta' = \{0, \frac{1}{8}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{8}, 1\}$, $\Delta'' = \{0, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{3}{4}, 1\}$ του $[0, 1]$ καμία δεν είναι λεπτότερη από την άλλη.

Ορισμός 11.9. Έστω Δ', Δ'' δύο διαμερίσεις του $[a, b]$. Τότε η $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$ είναι διαμέριση του $[a, b]$ και ονομάζεται **κοινή εκλέπτυνση** των Δ', Δ'' . Η Δ απαρτίζεται από όλα μαζί τα διαιρετικά σημεία και της Δ' και της Δ'' , οπότε είναι λεπτότερη και από τη Δ' και από τη Δ'' .

Παράδειγμα 11.20. Στο προηγούμενο παράδειγμα, σε σχέση με το πρώτο ζευγάρι διαμερίσεων η κοινή εκλέπτυνση των Δ', Δ'' είναι η Δ'' , ενώ σε σχέση με το δεύτερο ζευγάρι διαμερίσεων η κοινή εκλέπτυνση των Δ', Δ'' είναι η $\Delta = \{0, \frac{1}{8}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, 1\}$.

Ορισμός 11.10. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ και διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ του $[a, b]$. Από το Θεώρημα Μέγιστης / Ελάχιστης Τιμής συνεπάγεται ότι η f σε κάθε διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ έχει ελάχιστη τιμή, έστω l_k , και μέγιστη τιμή, έστω u_k .

Ονομάζουμε **κάτω άθροισμα Darboux** της f ως προς τη Δ στο $[a, b]$ το

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^n l_k(x_k - x_{k-1}) = l_1(x_1 - x_0) + \dots + l_n(x_n - x_{n-1})$$

και **άνω άθροισμα Darboux** της f ως προς τη Δ στο $[a, b]$ το

$$\bar{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^n u_k(x_k - x_{k-1}) = u_1(x_1 - x_0) + \dots + u_n(x_n - x_{n-1}).$$

Το κάτω άθροισμα Darboux $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$ και το άνω άθροισμα Darboux $\bar{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$ είναι ειδικές περιπτώσεις αθροισμάτων Riemann $\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi)$ της f . Πράγματι, σε κάθε διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ υπάρχουν σημεία ζ_k και η_k στα οποία η f πιάνει την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της, αντιστοίχως, στο $[x_{k-1}, x_k]$, δηλαδή είναι $f(\zeta_k) = l_k$ και $f(\eta_k) = u_k$. Επομένως, αν θεωρήσουμε την επιλογή ενδιάμεσων σημείων $\Xi = \{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}$, τότε

$$\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n l_k(x_k - x_{k-1}) = \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta),$$

και, αν θεωρήσουμε την επιλογή ενδιάμεσων σημείων $\Xi = \{\eta_1, \dots, \eta_n\}$, τότε

$$\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) = \sum_{k=1}^n f(\eta_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n u_k(x_k - x_{k-1}) = \bar{\Sigma}(f; a, b; \Delta).$$

Λήμμα 11.2. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$, διαμέριση Δ του $[a, b]$ και αντίστοιχη επιλογή ενδιάμεσων σημείων Ξ . Αν l και u είναι η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή, αντιστοίχως, της f στο $[a, b]$, τότε

$$l(b - a) \leq \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq \Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) \leq \bar{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq u(b - a).$$

Απόδειξη. Έστω $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ και $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$. Αν l_k και u_k είναι η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή, αντιστοίχως, της f στο $[x_{k-1}, x_k]$, τότε ισχύει

$$l \leq l_k \leq f(\xi_k) \leq u_k \leq u.$$

Οι δύο ακριανές ανισότητες ισχύουν διότι η ελάχιστη τιμή στο $[a, b]$ δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από την ελάχιστη τιμή σε μικρότερο διάστημα και, ομοίως, η μέγιστη τιμή στο $[a, b]$ δεν

μπορεί να είναι μικρότερη από τη μέγιστη τιμή σε μικρότερο διάστημα. Οι δύο μεσαίες ανισότητες ισχύουν διότι $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Αν πολλαπλασιάσουμε αυτήν την πολλαπλή ανισότητα με το $x_k - x_{k-1}$ και μετά αθροίσουμε ως προς k , τότε βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n l(x_k - x_{k-1}) &\leq \sum_{k=1}^n l_k(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &\leq \sum_{k=1}^n u_k(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n u(x_k - x_{k-1}). \end{aligned}$$

Αυτή είναι η ανισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε, διότι τα δύο ακριανά αθροίσματα είναι ίσα με

$$l \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = l(b - a), \quad u \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = u(b - a),$$

τα δύο επόμενα προς τη μέση αθροίσματα είναι τα $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$ και $\bar{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$ και το μεσαίο άθροισμα είναι το $\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi)$. $\square$

Το επόμενο λήμμα είναι πολύ βασικό για τα παρακάτω. Λέει ότι όταν εκλεπτύνεται η διαμέριση, τότε το αντίστοιχο άνω άθροισμα δεν μεγαλώνει και το αντίστοιχο κάτω άθροισμα δεν μικραίνει.

Λήμμα 11.3. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ και διαμερίσεις Δ', Δ'' του $[a, b]$. Αν η Δ'' είναι λεπτότερη από τη Δ' , τότε

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') \leq \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'') \leq \bar{\Sigma}(f; a, b; \Delta'') \leq \bar{\Sigma}(f; a, b; \Delta').$$

Απόδειξη. Έστω $\Delta' = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$. Η Δ'' περιέχει τα διαιρετικά σημεία της Δ' και, πιθανόν, περισσότερα σημεία. Έτσι, σε κάθε διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ που ορίζει η Δ' ενδέχεται να υπάρχουν και άλλα διαιρετικά σημεία της Δ'' , εκτός των x_{k-1} και x_k . Θεωρούμε, τώρα, σε κάθε διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ όλα τα διαιρετικά σημεία της Δ'' τα οποία περιέχονται στο διάστημα αυτό και με αυτά τα σημεία δημιουργούμε μια διαμέριση Δ''_k του διαστήματος $[x_{k-1}, x_k]$. Αν η Δ'' περιέχει μόνο τα σημεία x_{k-1} και x_k από το $[x_{k-1}, x_k]$, τότε η Δ''_k είναι διαμέριση δύο μόνο σημείων, αλλιώς η Δ''_k έχει περισσότερα σημεία του $[x_{k-1}, x_k]$. Έτσι, η Δ'' μοιράζεται σε μικρότερες διαδοχικές διαμερίσεις $\Delta''_1, \dots, \Delta''_n$, μία Δ''_k για κάθε διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ που ορίζει η Δ' . Είναι σαφές ότι τα διαστήματα που ορίζει η Δ''_k είναι εκείνα ακριβώς τα διαστήματα που ορίζει η Δ'' και περιέχονται στο $[x_{k-1}, x_k]$. Από αυτό συνεπάγεται ότι οι όροι των αθροισμάτων $\underline{\Sigma}(f; x_{k-1}, x_k; \Delta''_k)$ και $\bar{\Sigma}(f; x_{k-1}, x_k; \Delta''_k)$ είναι εκείνοι ακριβώς οι όροι των αθροισμάτων $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'')$ και $\bar{\Sigma}(f; a, b; \Delta'')$ οι οποίοι αντιστοιχούν στα διαστήματα που ορίζει η Δ'' και περιέχονται στο $[x_{k-1}, x_k]$. Επομένως,

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}(f; a, b; \Delta'') &= \sum_{k=1}^n \bar{\Sigma}(f; x_{k-1}, x_k; \Delta''_k) \\ \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'') &= \sum_{k=1}^n \underline{\Sigma}(f; x_{k-1}, x_k; \Delta''_k). \end{aligned} \tag{11.6}$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 11.2 σε κάθε $[x_{k-1}, x_k]$ αντί του $[a, b]$, βρίσκουμε

$$l_k(x_k - x_{k-1}) \leq \underline{\Sigma}(f; x_{k-1}, x_k; \Delta''_k) \leq \bar{\Sigma}(f; x_{k-1}, x_k; \Delta''_k) \leq u_k(x_k - x_{k-1}), \tag{11.7}$$

όπου l_k και u_k είναι η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή, αντιστοίχως, της f στο $[x_{k-1}, x_k]$. Το τελικό συμπέρασμα προκύπτει αθροίζοντας τις ανισότητες αυτές για $k = 1, \dots, n$. Από την άθροιση των ακριανών όρων της (11.7) προκύπτουν τα $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta')$ και $\bar{\Sigma}(f; a, b; \Delta')$. Από την άθροιση των μεσαίων όρων της (11.7) προκύπτουν, με χρήση των (11.6), τα $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'')$ και $\bar{\Sigma}(f; a, b; \Delta'')$. $\square$

Και το επόμενο λήμμα είναι πολύ βασικό. Λέει ότι κάθε κάτω άθροισμα είναι μικρότερο ή ίσο κάθε άνω αθροίσματος, ακόμη και αν τα δύο αυτά αθροίσματα δεν προέρχονται από την ίδια διαμέριση.

Λήμμα 11.4. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$. Τότε είναι

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') \leq \bar{\Sigma}(f; a, b; \Delta'')$$

για κάθε δύο διαμερίσεις Δ', Δ'' του $[a, b]$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την κοινή εκλέπτυνση $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$.

Η Δ είναι λεπτότερη από τη Δ' και από τη Δ'' , οπότε από το Λήμμα 11.3 έχουμε ότι

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') \leq \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta), \quad \bar{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq \bar{\Sigma}(f; a, b; \Delta'').$$

Επίσης, από το Λήμμα 11.2 συνεπάγεται

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq \bar{\Sigma}(f; a, b; \Delta).$$

Από τις τρεις αυτές ανισότητες συνεπάγεται $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') \leq \bar{\Sigma}(f; a, b; \Delta'')$. $\square$

Ορισμός 11.11. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$. Ορίζουμε τους αριθμούς $\underline{I}$ και $\bar{I}$ με τους τύπους

$$\underline{I} = \sup\{\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \mid \Delta \text{ διαμέριση του } [a, b]\},$$

$$\bar{I} = \inf\{\bar{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \mid \Delta \text{ διαμέριση του } [a, b]\}.$$

Επειδή το $\underline{I}$ είναι άνω φράγμα του συνόλου $\{\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \mid \Delta \text{ διαμέριση του } [a, b]\}$ και επειδή το $\bar{I}$ είναι κάτω φράγμα του συνόλου $\{\bar{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \mid \Delta \text{ διαμέριση του } [a, b]\}$, συνεπάγεται ότι ισχύει

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq \underline{I} \quad \text{και} \quad \bar{I} \leq \bar{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \quad (11.8)$$

για κάθε διαμέριση Δ του $[a, b]$.

Πρόταση 11.6. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$. Τότε είναι

$$\underline{I} = \bar{I}.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε οποιαδήποτε διαμέριση Δ' του $[a, b]$. Τότε σύμφωνα με το Λήμμα 11.4 για κάθε διαμέριση Δ'' του $[a, b]$ ισχύει

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') \leq \bar{\Sigma}(f; a, b; \Delta'').$$

Επομένως, το $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta')$ είναι κάτω φράγμα του συνόλου $\{\bar{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \mid \Delta \text{ διαμέριση του } [a, b]\}$, οπότε είναι μικρότερο ή ίσο του μέγιστου κάτω φράγματος αυτού του συνόλου. Δηλαδή,

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') \leq \bar{I}.$$

Επειδή αυτό ισχύει για οποιαδήποτε διαμέριση Δ' του $[a, b]$, το $\bar{I}$ είναι άνω φράγμα του συνόλου $\{\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \mid \Delta \text{ διαμέριση του } [a, b]\}$, οπότε είναι μεγαλύτερο ή ίσο του ελάχιστου άνω φράγματος αυτού του συνόλου. Δηλαδή,

$$\underline{I} \leq \bar{I}.$$

Τώρα, έστω $\epsilon > 0$. Σύμφωνα με το Θεώρημα Ομοιόμορφης Συνέχειας, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\epsilon}{b-a} \quad \text{για κάθε } x' \in [a, b], \quad x'' \in [a, b] \text{ με } |x' - x''| < \delta. \quad (11.9)$$

Θεωρούμε μία οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ του $[a, b]$ με πλάτος $(\Delta) < \delta$, δηλαδή ώστε να είναι $x_k - x_{k-1} < \delta$ για κάθε $k = 1, \dots, n$.

Τώρα, σε κάθε $[x_{k-1}, x_k]$ υπάρχουν σημεία ζ_k και η_k στα οποία η f πιάνει την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της, αντιστοίχως, στο $[x_{k-1}, x_k]$, δηλαδή είναι $f(\zeta_k) = l_k$ και $f(\eta_k) = u_k$.

Επειδή για τα ζ_k, η_k στο $[x_{k-1}, x_k]$ ισχύει $|\eta_k - \zeta_k| \leq x_k - x_{k-1} < \delta$, από την (11.9) συνεπάγεται

$$u_k - l_k = f(\eta_k) - f(\zeta_k) < \frac{\epsilon}{b-a},$$

οπότε

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) &= \sum_{k=1}^n u_k(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^n l_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &< \sum_{k=1}^n \frac{\epsilon}{b-a} (x_k - x_{k-1}) = \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = \frac{\epsilon}{b-a} (b - a) = \epsilon. \end{aligned}$$

Τώρα, από τις (11.8) συνεπάγεται

$$\bar{I} - \underline{I} \leq \bar{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta),$$

οπότε $\bar{I} - \underline{I} < \epsilon$. Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, συνεπάγεται $\bar{I} - \underline{I} \leq 0$, οπότε

$$\bar{I} \leq \underline{I}.$$

Από τις $\underline{I} \leq \bar{I}$ και $\bar{I} \leq \underline{I}$, έχουμε ότι $\underline{I} = \bar{I}$. □

Ορισμός 11.12. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$. Ορίζουμε τον αριθμό I να είναι η κοινή τιμή των αριθμών $\underline{I}$ και $\bar{I}$, δηλαδή

$$I = \underline{I} = \bar{I}.$$

Από τις (11.8) συνεπάγεται ότι ισχύει

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq I \leq \bar{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \quad (11.10)$$

για κάθε διαμέριση Δ του $[a, b]$.

Θεώρημα 11.1. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Στην απόδειξη της Πρότασης 11.6 είδαμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε διαμέριση Δ του $[a, b]$ με πλάτος $(\Delta) < \delta$ να ισχύει

$$\bar{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \epsilon.$$

Τώρα, σύμφωνα με το Λήμμα 11.2, για κάθε αντίστοιχη της Δ επιλογή ενδιάμεσων σημείων Ξ ισχύει

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq \Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) \leq \bar{\Sigma}(f; a, b; \Delta).$$

Επίσης, ισχύει και η σχέση (11.10). Συνδυάζοντας όλες αυτές τις ανισότητες, βρίσκουμε ότι

$$|\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) - I| < \epsilon.$$

Επομένως, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ με $\int_a^b f(x) dx = I$. □

Θα πούμε τώρα δύο λόγια σχετικά με κάποια υποσημείωση που είχαμε κάνει στην ενότητα 7.2 στην οποία μιλήσαμε για τη μέθοδο υπολογισμού του εμβαδού της επιφάνειας κάτω από το γράφημα συνεχούς μη-αρνητικής συνάρτησης $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ πριν ακόμη μιλήσουμε για ολοκληρώματα. Ανατρέξτε εκεί για τα σύμβολα που χρησιμοποιήθηκαν και τις άλλες λεπρομέρειες.

Λοιπόν, υπήρξε μία ένσταση για το κατά πόσον η διαφορά ανάμεσα στο πραγματικό εμβαδόν E και στο προσεγγιστικό εμβαδόν $\bar{E}$ μπορεί να γίνει απεριόριστα μικρή. Τώρα θα δούμε ότι αυτό είναι εφικτό.

Ας θεωρήσουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$. Επειδή η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b]$, υπάρχει κατάλληλο $\delta > 0$ ώστε για κάθε x', x'' του $[a, b]$ που ικανοποιούν την $|x' - x''| < \delta$ να ισχύει $|f(x') - f(x'')| < \frac{\epsilon}{b-a}$. Τώρα επιλέγουμε τη διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ ώστε το πλάτος της να είναι $< \delta$ ή, ισοδύναμα, ώστε κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ να έχει μήκος $< \delta$. Τέλος, επιλέγουμε οποιοδήποτε αντίστοιχο σύνολο ενδιάμεσων σημείων $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$, όπως ακριβώς περιγράψαμε στη μέθοδο.

Ο πρώτος στόχος είναι να εκτιμήσουμε το κάθε επιμέρους σφάλμα $|E_k - \bar{E}_k|$. Σύμφωνα με το Θεώρημα Μέγιστης / Ελάχιστης Τιμής υπάρχουν $\xi_{k,1}, \xi_{k,2}$ στο $[x_{k-1}, x_k]$ ώστε να ισχύει $f(\xi_{k,1}) \leq f(x) \leq f(\xi_{k,2})$ για κάθε x στο $[x_{k-1}, x_k]$. Αν θεωρήσουμε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $A_{k,1}$ με κάτω βάση το $[x_{k-1}, x_k]$ και ύψος $f(\xi_{k,1})$ και το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $A_{k,2}$ με κάτω βάση το $[x_{k-1}, x_k]$ και ύψος $f(\xi_{k,2})$, τότε είναι φανερό ότι η επιφάνεια A_k περιέχει το $A_{k,1}$ και περιέχεται

στο $\widetilde{A_{k,2}}$. Αν συμβολίσουμε $\widetilde{E_{k,1}} = f(\xi_{k,1})(x_k - x_{k-1})$ και $\widetilde{E_{k,2}} = f(\xi_{k,2})(x_k - x_{k-1})$ τα αντίστοιχα εμβαδά τους, τότε

$$\widetilde{E_{k,1}} \leq E_k \leq \widetilde{E_{k,2}}.$$

Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $\widetilde{A_k}$ έχει βάση το $[x_{k-1}, x_k]$ και ύψος $f(\xi_k)$, οπότε και το $\widetilde{A_k}$ περιέχει το $\widetilde{A_{k,1}}$ και περιέχεται στο $\widetilde{A_{k,2}}$. Επομένως,

$$\widetilde{E_{k,1}} \leq \widetilde{E_k} \leq \widetilde{E_{k,2}}.$$

Τα $\xi_{k,1}, \xi_{k,2}$ ανήκουν στο $[x_{k-1}, x_k]$, οπότε $|\xi_{k,1} - \xi_{k,2}| \leq x_k - x_{k-1} < \delta$. Βάσει του κριτηρίου επιλογής του δ συνεπάγεται $f(\xi_{k,2}) - f(\xi_{k,1}) < \frac{\epsilon}{b-a}$. Άρα

$$\begin{aligned} |E_k - \widetilde{E_k}| &\leq \widetilde{E_{k,2}} - \widetilde{E_{k,1}} = f(\xi_{k,2})(x_k - x_{k-1}) - f(\xi_{k,1})(x_k - x_{k-1}) \\ &= (f(\xi_{k,2}) - f(\xi_{k,1}))(x_k - x_{k-1}) < (x_k - x_{k-1}) \frac{\epsilon}{b-a}. \end{aligned}$$

Αυτή ακριβώς η ανισότητα μας λέει ότι τα εμβαδά E_k και $\widetilde{E_k}$ είναι περίπου ίσα: το σφάλμα $|E_k - \widetilde{E_k}|$ είναι μικρότερο από $(x_k - x_{k-1}) \frac{\epsilon}{b-a}$.

Ο δεύτερος στόχος είναι να εκτιμήσουμε το συνολικό σφάλμα $|E_1 - \widetilde{E_1}| + \dots + |E_n - \widetilde{E_n}|$ και, φυσικά, το σφάλμα $|E - \widetilde{E}|$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} |E - \widetilde{E}| &\leq |E_1 - \widetilde{E_1}| + \dots + |E_n - \widetilde{E_n}| < (x_1 - x_0) \frac{\epsilon}{b-a} + \dots + (x_n - x_{n-1}) \frac{\epsilon}{b-a} \\ &= (x_1 - x_0 + \dots + x_n - x_{n-1}) \frac{\epsilon}{b-a} = (b - a) \frac{\epsilon}{b-a} = \epsilon. \end{aligned}$$

Άρα το σφάλμα $|E - \widetilde{E}|$ είναι μικρότερο από ϵ , δηλαδή όσο θέλουμε μικρό. Απαραίτητη προϋπόθεση είναι, βέβαια, να γίνει το πλάτος της Δ αρκετά μικρό, δηλαδή μικρότερο από το δ που αντιστοιχεί στο ϵ .

11.15 Τα ακριβή κριτήρια λόγου και ρίζας

Το κριτήριο λόγου στην ενότητα 9.4 του κεφαλαίου 9 έχει ως υπόθεση το ότι υπάρχει το όριο $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right|$. Επίσης, το κριτήριο ρίζας στην ίδια ενότητα έχει ως υπόθεση το ότι υπάρχει το όριο $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|x_k|}$. Αυτό σημαίνει ότι, αν δεν υπάρχουν τα συγκεκριμένα όρια, τότε δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τα αντίστοιχα κριτήρια λόγου και ρίζας. Τώρα, όμως, θα δούμε τα ακριβή κριτήρια λόγου και ρίζας στα οποία δεν χρειάζεται να υπάρχουν τα συγκεκριμένα όρια.

Κριτήριο λόγου (d' Alembert). Έστω $x_k \neq 0$ για κάθε k .

(i) Αν $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right| < 1$, τότε η $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ συγκλίνει απολύτως, οπότε συγκλίνει.

(ii) Αν $\liminf_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right| > 1$, τότε η $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ αποκλίνει.

Απόδειξη. (i) Επιλέγουμε b έτσι ώστε $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right| < b < 1$. Τότε υπάρχει k_0 ώστε να ισχύει $\left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right| < b$ για κάθε $k \geq k_0$. Συνεπάγεται ότι ισχύει $\frac{|x_{k+1}|}{b^{k+1}} < \frac{|x_k|}{b^k}$ για κάθε $k \geq k_0$. Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία $(\frac{|x_k|}{b^k})$ είναι γνησίως φθίνουσα από τον k_0 -οστό όρο της και πέρα, οπότε είναι φραγμένη. Άρα, επειδή η $\sum_{k=1}^{+\infty} b^k$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι η $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ συγκλίνει απολύτως.

(ii) Υπάρχει k_0 ώστε να ισχύει $\left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right| > 1$ για κάθε $k \geq k_0$. Επομένως, η ακολουθία $(|x_k|)$ είναι γνησίως αύξουσα από τον k_0 -οστό όρο της και πέρα, ο οποίος είναι > 0 , οπότε δεν μπορεί να ισχύει $x_k \rightarrow 0$, οπότε η $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ αποκλίνει. $\square$

Κριτήριο ρίζας (Cauchy). (i) Αν $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|x_k|} < 1$, τότε η $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ συγκλίνει απολύτως, οπότε συγκλίνει.

(ii) Αν $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|x_k|} > 1$, τότε η $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ αποκλίνει.

Απόδειξη. (i) Επιλέγουμε b ώστε $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|x_k|} < b < 1$. Τότε υπάρχει k_0 ώστε να ισχύει $\sqrt[k]{|x_k|} < b$ για κάθε $k \geq n_0$, οπότε ισχύει $|x_k| < b^k$ για κάθε $k \geq k_0$. Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία $(\frac{|x_k|}{b^k})$ είναι φραγμένη. Άρα, επειδή η $\sum_{k=1}^{+\infty} b^k$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι η $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ συγκλίνει απολύτως.
(ii) Ισχύει $\sqrt[k]{|x_k|} > 1$ για άπειρα k , οπότε ισχύει $|x_k| > 1$ για άπειρα k . Άρα δεν ισχύει $x_k \rightarrow 0$, οπότε η $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ αποκλίνει. $\square$

Ασκήσεις

11.22. Έστω $0 < b < c$. Θεωρήστε τη σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ με $x_k = \begin{cases} b^k, & \text{αν } k \text{ άρτιος,} \\ c^k, & \text{αν } k \text{ περιττός.} \end{cases}$ Παρατηρήστε ότι τα όρια $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right|$ και $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|x_k|}$ δεν υπάρχουν, οπότε δεν εφαρμόζονται τα κριτήρια λόγου και ρίζας στην ενότητα 9.4 του κεφαλαίου 9. Κατόπιν, δείτε ότι το κριτήριο λόγου αυτής εδώ της ενότητας εφαρμόζεται, αλλά δεν δίνει συμπέρασμα για τη σύγκλιση ή την απόκλιση της σειράς, ενώ από το κριτήριο ρίζας προκύπτει ότι η σειρά συγκλίνει, αν και μόνο αν $c < 1$.

11.16 Ο ακριβής τύπος της ακτίνας σύγκλισης δυναμοσειράς

Λήμμα 11.5. Έστω ακολουθία (x_k) και $\lambda > 0$. Τότε $\limsup_{k \rightarrow +\infty} (\lambda x_k) = \lambda \limsup_{k \rightarrow +\infty} x_k$.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε, για ευκολία, το σύμβολο $\bar{x} = \limsup_{k \rightarrow +\infty} x_k$ της Πρότασης 11.3.
Έστω $u > \lambda \bar{x}$. Τότε $\frac{u}{\lambda} > \bar{x}$, οπότε ισχύει $x_k \geq \frac{u}{\lambda}$ για το πολύ πεπερασμένα k , οπότε ισχύει $\lambda x_k \geq u$ για το πολύ πεπερασμένα k .
Κατόπιν, έστω $l < \lambda \bar{x}$. Τότε $\frac{l}{\lambda} < \bar{x}$, οπότε ισχύει $x_k > \frac{l}{\lambda}$ για άπειρα k , οπότε ισχύει $\lambda x_k > l$ για άπειρα k .
Άρα το $\lambda \bar{x}$ έχει τις δύο χαρακτηριστικές ιδιότητες (α) και (β) του $\limsup_{k \rightarrow +\infty} (\lambda x_k)$ που αναφέρονται στην Πρόταση 11.3, οπότε είναι ίσο με αυτό. $\square$

Έστω δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x - \xi)^k$. Θεωρούμε την ακολουθία $(\sqrt[k]{|a_k|})$.
Αν το ανώτερο όριο της $(\sqrt[k]{|a_k|})$ ήταν < 0 , δηλαδή αν ήταν $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 0$, τότε θα ίσχυε $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 0$ για το πολύ πεπερασμένα k . Όμως, προφανώς, ισχύει $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 0$ για κάθε k , οπότε $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \geq 0$. Για ευκολία, γράφουμε

$$\rho = \limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|},$$

οπότε $0 \leq \rho \leq +\infty$. Τώρα, ορίζουμε R με τον τύπο

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & \text{αν } 0 < \rho < +\infty, \\ 0, & \text{αν } \rho = +\infty, \\ +\infty, & \text{αν } \rho = 0, \end{cases} \quad (11.11)$$

οπότε $0 \leq R \leq +\infty$.

Πρόταση 11.7. Έστω δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x - \xi)^k$ και έστω R όπως στον τύπο (11.11). Τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε $x \in (\xi - R, \xi + R)$ και αποκλίνει για κάθε $x \notin [\xi - R, \xi + R]$. Άρα η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x - \xi)^k$ είναι ίση με R .

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως, αν $|x - \xi| < R$, και ότι αποκλίνει, αν $|x - \xi| > R$.

Αν $|x - \xi| = 0$, δηλαδή $x = \xi$, τότε είναι σαφές ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως, οπότε θεωρούμε ότι $|x - \xi| > 0$.

Σύμφωνα με το Λήμμα 11.5 ισχύει

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k(x - \xi)^k|} = \limsup_{k \rightarrow +\infty} (|x - \xi| \sqrt[k]{|a_k|}) = |x - \xi| \limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = |x - \xi| \rho = \frac{|x - \xi|}{R}.$$

Τώρα, το αποτέλεσμα είναι άμεση εφαρμογή του κριτηρίου ρίζας της προηγούμενης ενότητας. Πράγματι, αν $|x - \xi| < R$, τότε $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k(x - \xi)^k|} < 1$, οπότε η σειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x - \xi)^k$ συγκλίνει

απολύτως. Και, αν $|x - \xi| > R$, τότε $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k(x - \xi)^k|} > 1$, οπότε η σειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x - \xi)^k$ αποκλίνει. $\square$

Ασκήσεις

11.23. Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k x^k$, όπου (x_k) είναι η ακολουθία της άσκησης 11.22.

11.24. Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{m^2}$. Προσέξτε ότι εμφανίζονται μόνο άρτιες δυνάμεις του x στη δυναμοσειρά, οπότε η ακολουθία των συντελεστών δεν είναι η $(\frac{1}{m^2})$.

11.17 Αναλυτικός ορισμός των τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Στην ενότητα αυτή θα δούμε έναν από τους αναλυτικούς ορισμούς των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και τις αποδείξεις των βασικών ιδιοτήτων τους. Στα προηγούμενα κεφάλαια βασιστήκαμε στον γεωμετρικό ορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών, όπως αυτός εκτέθηκε στην ενότητα 1.11 του πρώτου κεφαλαίου, ο οποίος όμως δεν θεωρείται αποδεκτός από τη σκοπιά της Ανάλυσης.

Ξεκινάμε με τις δυναμοσειρές

$$\sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}, \quad \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!},$$

για τις οποίες γνωρίζουμε από το παράδειγμα 9.56 ότι έχουν ως διάστημα σύγκλισής τους το $\mathbb{R}$. Σε εκείνο το παράδειγμα, «γνωρίζοντας» τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, είχαμε αποδείξει ότι η συνάρτηση που ορίζεται από την πρώτη δυναμοσειρά είναι η $\cos x$ και η συνάρτηση που ορίζεται από τη δεύτερη δυναμοσειρά είναι η $\sin x$. Τώρα, όμως, δεχόμαστε ότι δεν γνωρίζουμε τις συναρτήσεις $\cos x$, $\sin x$ και θα τις ορίσουμε χρησιμοποιώντας τις δύο συγκεκριμένες δυναμοσειρές και τις ιδιότητές τους.

Ορισμός 11.13. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ να είναι η συνάρτηση που ορίζεται από την πρώτη δυναμοσειρά και τη συνάρτηση $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ να είναι η συνάρτηση που ορίζεται από τη δεύτερη δυναμοσειρά. Δηλαδή, ορίζουμε:

$$\cos x = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}, \quad \sin x = \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} \quad \text{για κάθε } x. \quad (11.12)$$

Πρόταση 11.8. Οι συναρτήσεις $\cos$ και $\sin$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και

$$\cos' x = -\sin x, \quad \sin' x = \cos x \quad \text{για κάθε } x.$$

Απόδειξη. Από την Πρόταση 9.16 συνεπάγεται ότι οι $\cos x$, $\sin x$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ότι

$$\cos' x = \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^m 2m \frac{x^{2m-1}}{(2m)!} = \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^m \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} = - \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} = -\sin x$$

και

$$\sin' x = \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{m-1} (2m-1) \frac{x^{2m-2}}{(2m-1)!} = \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!} = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} = \cos x$$

για κάθε x . $\square$

Πρόταση 11.9. Η $\cos$ είναι άρτια, η $\sin$ είναι περιττή και ισχύει $\cos 0 = 1$ και $\sin 0 = 0$.

Απόδειξη. Όλα είναι προφανή από τους τύπους (11.12). $\square$

Πρόταση 11.10. (i) Ισχύει

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \quad \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \text{για κάθε } x, y. \quad (11.13)$$

(ii) Ισχύει $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ για κάθε x .

(iii) Ισχύει $|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$ για κάθε x .

Απόδειξη. (i) Έστω οποιοδήποτε y . Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \cos(y-x) \cos x - \sin(y-x) \sin x \quad \text{για κάθε } x.$$

Τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 11.8, έχουμε ότι

$$f'(x) = \sin(y-x) \cos x - \cos(y-x) \sin x + \cos(y-x) \sin x - \sin(y-x) \cos x = 0 \quad \text{για κάθε } x.$$

Άρα η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$, οπότε ισχύει $f(x) = f(0)$ για κάθε x . Βάσει της Πρότασης 11.9 συνεπάγεται

$$\cos(y-x) \cos x - \sin(y-x) \sin x = \cos(y-0) \cos 0 - \sin(y-0) \sin 0 = \cos y \quad \text{για κάθε } x.$$

Αφού αυτή η σχέση ισχύει για κάθε x, y , μετατρέπουμε το y σε $y+x$ και καταλήγουμε στην πρώτη ισότητα (11.13). Η δεύτερη ισότητα (11.13) αποδεικνύεται είτε με παρόμοιο τρόπο είτε παραγωγίζοντας την πρώτη ισότητα ως προς το x .

(ii) Θέτουμε $y = -x$ στην πρώτη ισότητα (11.13) και χρησιμοποιούμε την Πρόταση 11.9.

(iii) Προφανές από το (ii). $\square$

Θα αποδείξουμε, τώρα, μερικές επιπλέον ιδιότητες των συναρτήσεων $\cos x, \sin x$ και, κυρίως, θα ορίσουμε τον αριθμό π .

Πρόταση 11.11. Υπάρχει ελάχιστη θετική λύση της εξίσωσης $\cos x = 0$.

Απόδειξη. Είναι $\cos 0 = 1$. Επίσης, $\cos 2 = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{2^{2m}}{(2m)!}$, οπότε

$$\sum_{m=0}^k (-1)^m \frac{2^{2m}}{(2m)!} \rightarrow \cos 2 \quad \text{όταν } k \rightarrow +\infty.$$

Αν το k είναι άρτιος φυσικός ≥ 4 , τότε

$$\sum_{m=0}^k (-1)^m \frac{2^{2m}}{(2m)!} = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \left(\frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!}\right) - \dots - \left(\frac{2^{2k-2}}{(2k-2)!} - \frac{2^{2k}}{(2k)!}\right) < 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} = -\frac{1}{3},$$

επειδή κάθε παρένθεση είναι θετική. Άρα $\cos 2 \leq -\frac{1}{3} < 0$.

Επειδή η $\cos$ είναι συνεχής και $\cos 2 < 0 < \cos 0$, από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής συνεπάγεται ότι υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ ώστε $\cos \xi = 0$.

Τώρα, θεωρούμε το σύνολο των θετικών λύσεων της εξίσωσης $\cos x = 0$, δηλαδή το

$$X = \{\xi \mid \cos \xi = 0, \xi > 0\}.$$

Είδαμε ότι το X δεν είναι κενό.

Επειδή $\cos 0 = 1$ και η $\cos$ είναι συνεχής στο 0, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να είναι $\cos x > 0$ για κάθε x με $0 \leq x < \delta$. Επομένως το σύνολο X δεν έχει κανένα στοιχείο του στο διάστημα $[0, \delta)$, οπότε το δ είναι κάτω φράγμα του X . Άρα το X έχει ελάχιστο κάτω φράγμα, το $\inf X$, το οποίο, για ευκολία, θα γράψουμε

$$\xi_0 = \inf X,$$

και, επειδή το δ είναι κάτω φράγμα του X και το ξ_0 είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του X , έχουμε ότι

$$\xi_0 \geq \delta > 0.$$

Τώρα, επειδή το ξ_0 είναι κάτω φράγμα του X , δεν υπάρχει στοιχείο του X , δηλαδή θετική λύση της εξίσωσης $\cos x = 0$, μικρότερο του ξ_0 . Αυτό σημαίνει ότι η $\cos$ δεν μηδενίζεται στο διάστημα $[0, \xi_0)$, οπότε έχει σταθερό πρόσημο σ' αυτό το διάστημα. Επειδή $\cos 0 = 1 > 0$, συμπεραίνουμε ότι

$$\cos x > 0 \quad \text{για κάθε } x \in [0, \xi_0). \quad (11.14)$$

Κατόπιν, επειδή το ξ_0 είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του X , για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το $\xi_0 + \frac{1}{n}$ δεν είναι κάτω φράγμα του X , οπότε υπάρχει ξ_n στο X ώστε $\xi_n < \xi_0 + \frac{1}{n}$. Επίσης, επειδή το ξ_0 είναι κάτω φράγμα του X , ισχύει $\xi_0 \leq \xi_n$. Άρα

$$\xi_0 \leq \xi_n < \xi_0 + \frac{1}{n} \quad \text{για κάθε } n.$$

Συνεπάγεται $\xi_n \rightarrow \xi_0$, οπότε, επειδή είναι $\cos \xi_n = 0$ για κάθε n και επειδή η $\cos$ είναι συνεχής στο ξ_0 , συμπεραίνουμε ότι $0 = \cos \xi_n \rightarrow \cos \xi_0$, οπότε $\cos \xi_0 = 0$. Αυτό μαζί με την (11.14) συνεπάγονται ότι το ξ_0 είναι η ελάχιστη θετική λύση της εξίσωσης $\cos x = 0$. $\square$

Ορισμός 11.14. Συμβολίζουμε με το σύμβολο π το διπλάσιο της ελάχιστης θετικής λύσης της εξίσωσης $\cos x = 0$. Αυτό σημαίνει ότι το $\frac{\pi}{2}$ είναι η ελάχιστη θετική λύση της εξίσωσης $\cos x = 0$, δηλαδή ότι

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{και} \quad \cos x > 0 \quad \text{για } 0 \leq x < \frac{\pi}{2}.$$

Πρόταση 11.12. (i) Για κάθε x ισχύει

$$\begin{aligned} \cos(x + \frac{\pi}{2}) &= -\sin x, & \cos(x + \pi) &= -\cos x, & \cos(x + \frac{3\pi}{2}) &= \sin x, & \cos(x + 2\pi) &= \cos x, \\ \sin(x + \frac{\pi}{2}) &= \cos x, & \sin(x + \pi) &= -\sin x, & \sin(x + \frac{3\pi}{2}) &= -\cos x, & \sin(x + 2\pi) &= \sin x. \end{aligned}$$

Ειδικότερα, οι $\cos x$ και $\sin x$ είναι περιοδικές με περίοδο 2π .

(ii) Η $\cos x$ είναι γνησίως θετική στο $[0, \frac{\pi}{2})$, γνησίως αρνητική στο $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ και γνησίως θετική στο $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$. Επίσης, $\cos 0 = \cos(2\pi) = 1$, $\cos(\pi) = -1$ και $\cos \frac{\pi}{2} = \cos \frac{3\pi}{2} = 0$.

(iii) Η $\sin x$ είναι γνησίως θετική στο $(0, \pi)$ και γνησίως αρνητική στο $(\pi, 2\pi)$. Επίσης, $\sin 0 = \sin \pi = \sin(2\pi) = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ και $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$.

(iv) Η $\cos x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $[-1, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\pi, 2\pi]$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $[-1, 1]$.

(v) Η $\sin x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $[0, 1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $[-1, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $[-1, 0]$.

Απόδειξη. Όπως είδαμε στον ορισμό του αριθμού π , ισχύει $\cos x > 0$ για κάθε $x \in [0, \frac{\pi}{2})$. Τώρα, η σχέση $\sin' x = \cos x$ συνεπάγεται ότι η $\sin$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \frac{\pi}{2}]$. Ειδικότερα, έχουμε

$$\sin 0 = 0 \quad \text{και} \quad \sin x > 0 \quad \text{για κάθε } x \in (0, \frac{\pi}{2}].$$

Από τη $\sin^2 \frac{\pi}{2} + \cos^2 \frac{\pi}{2} = 1$ και την $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ παίρνουμε $\sin \frac{\pi}{2} = \pm 1$ και, επειδή $\sin \frac{\pi}{2} > 0$, συνεπάγεται $\sin \frac{\pi}{2} = 1$. Επειδή η $\sin$ είναι και συνεχής, συνεπάγεται ότι το σύνολο τιμών της

στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ είναι το $[\sin 0, \sin \frac{\pi}{2}] = [0, 1]$. Κατόπιν, η σχέση $\cos' x = -\sin x < 0$ για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ συνεπάγεται ότι η $\cos$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \frac{\pi}{2}]$. Επειδή η $\cos$ είναι και συνεχής, συνεπάγεται ότι το σύνολο τιμών της στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ είναι το $[\cos \frac{\pi}{2}, \cos 0] = [0, 1]$.

Τώρα, από τις ισότητες (11.13) και από τις τιμές $\cos 0 = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ και $\cos \frac{\pi}{2} = \sin 0 = 0$ βρίσκουμε τις τιμές των $\cos$ και $\sin$ στα σημεία $\pi, \frac{3\pi}{2}$ και 2π , καθώς και τις ισότητες στο (i). Από τις ισότητες στο (i), καθώς και από τη συμπεριφορά της $\cos$ και της $\sin$ στο $[0, \frac{\pi}{2}]$, διακρίνουμε τη συμπεριφορά της $\cos$ και της $\sin$ στα διαστήματα $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ και $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, δηλαδή συνολικά στο $[0, 2\pi]$. $\square$

Πρόταση 11.13. Για κάθε a, b με $a^2 + b^2 = 1$ υπάρχει μοναδικό $x \in [0, 2\pi)$ ώστε $\cos x = a$ και $\sin x = b$.

Απόδειξη. Κατ'αρχάς έστω $a \geq 0, b \geq 0$. Προφανώς, συνεπάγεται $0 \leq a \leq 1$ και $0 \leq b \leq 1$. Επειδή η $\cos$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ με σύνολο τιμών το $[0, 1]$, υπάρχει μοναδικό $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ώστε $\cos x = a$. Από τη $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ συνεπάγεται $\sin x = \pm b$, οπότε, επειδή $\sin x \geq 0$, έχουμε $\sin x = b$. Δεν υπάρχει x στο $(\frac{\pi}{2}, 2\pi)$ ώστε να είναι $\cos x = a$ και $\sin x = b$, διότι για x στο $(\frac{\pi}{2}, 2\pi)$ ένα τουλάχιστον από τα $\cos x, \sin x$ είναι αρνητικό.

Έχουμε άλλες τρεις περιπτώσεις: την $a \geq 0, b < 0$, την $a < 0, b \geq 0$, και την $a < 0, b < 0$. Σε κάθε περίπτωση η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη στην πρώτη περίπτωση που εξετάσαμε. $\square$

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να αναφέρουμε το εξής. Στα κεφάλαια 5 και 6 αποδείξαμε τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων με βάση τον γεωμετρικό ορισμό τους. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκαν οι παρακάτω ανισότητες (11.15), οι οποίες σε εκείνο το πλαίσιο αποδεικνύονται, φυσικά, με γεωμετρικό τρόπο. Από τη στιγμή, όμως, που η συνέχεια και η παραγωγισιμότητα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων αποδεικνύονται με βάση τον αναλυτικό ορισμό τους, ως παραδείγματα δυναμοσειρών, οι ανισότητες αυτές πρέπει να αποδειχτούν με αναλυτικό τρόπο. Ακολουθεί η απόδειξή τους.

Πρόταση 11.14. Ισχύει

$$|\sin x| \leq |x| \text{ για κάθε } x \text{ και } |x| \leq |\tan x| \text{ για } |x| < \frac{\pi}{2}. \quad (11.15)$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τις δύο συναρτήσεις $f(x) = x \pm \sin x$, οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Ισχύει $f'(x) = 1 \pm \cos x \geq 0$ για κάθε x , οπότε οι συναρτήσεις f είναι αύξουσες. Επομένως, ισχύει

$$x \pm \sin x = f(x) \geq f(0) = 0 \text{ για } x \geq 0 \text{ και } x \pm \sin x = f(x) \leq f(0) = 0 \text{ για } x \leq 0.$$

Άρα ισχύει $|\sin x| \leq |x|$ για κάθε x .

Τώρα θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x \cos x - \sin x$ για $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Ισχύει $g'(x) = -x \sin x \leq 0$ για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, οπότε η g είναι φθίνουσα στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Άρα ισχύει

$$x \cos x - \sin x = g(x) \leq g(0) = 0 \text{ για } x \in [0, \frac{\pi}{2})$$

και

$$x \cos x - \sin x = g(x) \geq g(0) = 0 \text{ για } x \in (-\frac{\pi}{2}, 0].$$

Άρα ισχύει $|x| \leq |\tan x|$ για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. $\square$

Μέχρι στιγμής έχουμε αποδείξει όλες τις ιδιότητες των συναρτήσεων $\cos x$ και $\sin x$: τις «αλγεβρικές», τις ιδιότητες μονοτονίας και περιοδικότητας και τις ιδιότητες συνέχειας και παραγωγισιμότητας. Οι ιδιότητες των ολοκληρωμάτων τους είναι άμεσες συνέπειες των προηγούμενων. Οι συναρτήσεις $\tan x$ και $\cot x$ ορίζονται με τον γνωστό τρόπο από τις $\cos x$ και $\sin x$ και οι ιδιότητές τους είναι πορίσματα των ιδιοτήτων των $\cos x$ και $\sin x$. Όλα αυτά έχουν περιγραφεί πλήρως στα προηγούμενα κεφάλαια και δεν θα ασχοληθούμε περαιτέρω.

Είναι εύλογο να προτιμάμε τον γεωμετρικό ορισμό των τριγωνομετρικών συναρτήσεων λόγω της απλότητάς του. Επίσης, υπάρχουν και άλλοι αναλυτικοί ορισμοί των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Γι' αυτό θα αποδείξουμε ότι, ασχέτως του τρόπου τον οποίο επιλέγουμε για να ορίσουμε

τις συναρτήσεις αυτές, καταλήγουμε στις ίδιες συναρτήσεις. Θα σκεφτούμε ότι, ασχέτως του τρόπου ορισμού των $\sin x$, $\cos x$, αποδεικνύεται ότι έχουν τις εξής βασικές ιδιότητες: $\cos' x = -\sin x$, $\sin' x = \cos x$ για κάθε x και $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$.

Πρόταση 11.15. Έστω δύο ζεύγη συναρτήσεων $f_1, g_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $f_2, g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε:

(i) $f_1' = -g_1$ και $g_1' = f_1$,

(ii) $f_2' = -g_2$ και $g_2' = f_2$ και

(iii) $f_1(0) = f_2(0)$ και $g_1(0) = g_2(0)$.

Τότε τα δύο ζεύγη είναι τα ίδια. Δηλαδή, $f_1 = f_2$ και $g_1 = g_2$.

Απόδειξη. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = ((f_1(x) - f_2(x))^2 + (g_1(x) - g_2(x))^2) \quad \text{για κάθε } x,$$

και τότε ισχύει

$$f'(x) = 2(f_1(x) - f_2(x))(-g_1(x) + g_2(x)) + 2(g_1(x) - g_2(x))(f_1(x) - f_2(x)) = 0 \quad \text{για κάθε } x.$$

Άρα η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$, οπότε ισχύει

$$(f_1(x) - f_2(x))^2 + (g_1(x) - g_2(x))^2 = (f_1(0) - f_2(0))^2 + (g_1(0) - g_2(0))^2 = 0 \quad \text{για κάθε } x.$$

Άρα ισχύει $f_1(x) = f_2(x)$ και $g_1(x) = g_2(x)$ για κάθε x . □

Τώρα που έχουμε δει αυστηρούς αναλυτικούς ορισμούς των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και έχουμε αποδείξει, βάσει των αναλυτικών ορισμών, τις βασικές ιδιότητες συνέχειας και παραγωγισιμότητας αυτών των συναρτήσεων, ας επισημάνουμε ότι οι Ορισμοί 2.16 των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων είναι, τώρα πια, και αυτοί αυστηρά αναλυτικοί. Επίσης, οι αποδείξεις της συνέχειας των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων, όπως παρατίθενται στο παράδειγμα 5.63, βασισμένες στην Πρόταση 5.10, είναι αυστηρά αναλυτικές. Το ίδιο ισχύει και για τις αποδείξεις της παραγωγισιμότητας των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων, όπως παρατίθενται στα παραδείγματα 6.25 και 6.26, βασισμένες στον κανόνα αντίστροφης συνάρτησης.

11.18 Βιβλιογραφία

Βασική βιβλιογραφία

- Apostol, T. (1967). *Calculus, Vol I*. Wiley.
- Apostol, T. (1974). *Mathematical Analysis*. Addison-Wesley.
- Bartle, R. (1967). *The Elements of Real Analysis*. Wiley.
- Bartle, R., Sherbert, D. (2011). *Introduction to Real Analysis*. Wiley.
- Beals, R. (2004). *Analysis, an Introduction*. Cambridge Univ. Press.
- Beardon, A. (1997). *Limits: a New Approach to Real Analysis*. Springer.
- Berberian, S. (1994). *A First Course in Real Analysis*. Springer.
- Boas, R. (1996). *A Primer of Real Functions*. Math. Association of America.
- Courant, R. (1988). *Differential and Integral Calculus, Vol I*. Wiley.
- Courant, R., John, F. (1989). *Introduction to Calculus and Analysis, Vol I*. Springer.
- Ghorpade, S., Limaye, B. (2006). *A Course in Calculus and Real Analysis*. Springer.
- Goldberg, R. (1976). *Methods of Real Analysis*. Wiley.
- Krantz, S. (2013). *Real Analysis and Foundations*. Chapman and Hall.
- Landau, E. (2001). *Differential and Integral Calculus*. American Math. Society & Chelsea.
- Lang, S. (1997). *Undergraduate Analysis*. Springer.

- Nikolsky, S. (1977). *A Course of Mathematical Analysis, Vol I*. Mir Publishers.
- Protter, M. (1998). *Basic Elements of Real Analysis*. Springer.
- Rosenlicht, M. (1986). *Introduction to Analysis*. Dover.
- Ross, K. (2013). *Elementary Analysis*. Springer.
- Rudin, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill.
- Spivak, M. (1994). *Calculus*. Cambridge Univ. Press.
- Stoll, M. (2000). *Introduction to Real Analysis*. Pearson.

Ευρετήριο όρων

άθροισμα

Darboux, 390

Riemann, 233

σειράς, 304

ακέραιο μέρος, 11

ακολουθία, 55

Cauchy, 380

Fibonacci, 58

άνω φραγμένη, 56

αύξουσα, 56

κάτω φραγμένη, 56

φθίνουσα, 56

ακτίνα

καμπυλότητας, 207

σύγκλισης δυναμοσειράς, 328

αναδρομικός τύπος ακολουθίας, 58, 81

γραμμικός, 58

ανάπτυγμα p -αδικό

αριθμού μη-αρνητικού, 319

αριθμού στο $[0, 1)$, 318

περιοδικό, 319

φυσικού, 315

ανισότητα

Bernoulli, 23, 199

Cauchy, 198, 199, 209

Hölder, 199, 209

Jensen, 209

Minkowski, 199

Schwarz, 246

Young, 199, 209

τριγωνική, 6

τριγωνική, για γενικευμένο

ολοκλήρωμα, 287

τριγωνική, για ολοκλήρωμα, 245

τριγωνική, για σειρά, 322

απειροστό μέγεθος, 162

απόκλιση

ακολουθίας, 60, 61

γενικευμένου ολοκληρώματος, 283

σειράς, 304

συνάρτησης, 90, 94, 96

απόσταση σημείου από ευθεία, 196

απροσδιόριστες μορφές

αθροίσματος, 67

αντίστροφου, 70

γινομένου, 68

διαφοράς, 68

λόγου, 71

Αρχιμήδεια ιδιότητα, 10

ασύμπτωτη ευθεία

κατακόρυφη, 98

οριζόντια, 99

πλάγια, 100, 107

ασυμπτωτική ισότητα, 219

ασυνέχεια

άρσιμη, 138

δεύτερου είδους ή ουσιώδης, 139

μονότονης συνάρτησης, 140

πρώτου είδους, 139

γεωμετρική πρόοδος, 62, 77

γραμμική πυκνότητα, 160

γράφημα συνάρτησης, 31

διαμέριση, 230, 233

διάστημα σύγκλισης δυναμοσειράς, 328

διαφορική εξίσωση, 348

Bernoulli, 361

Ricatti, 361

γραμμική, 348

γραμμική δεύτερης τάξης, 362

με σταθερούς συντελεστές, 366

γραμμική ομογενής, 348

πρώτης τάξης, 354

γραμμική πρώτης τάξης, 356

με σταθερούς συντελεστές, 359

πρώτης τάξης

με χωριζόμενες μεταβλητές, 351

ομογενής βαθμού 0, 355

διωνυμικός συντελεστής, 24, 341

διωνυμικός τύπος του Newton, 25, 343

δύναμη

με ακέραιο εκθέτη, 12

με άρρητο εκθέτη, 14

με ρητό εκθέτη, 13
 δυναμοσειρά, 326
 Taylor, 331
 γεωμετρική, 327, 329
 διωνυμική, 341
 εκθετική, 330, 333, 340
 ημιτόνου, 333, 340
 λογαριθμική, 334, 339
 συνημιτόνου, 333, 340
 τόξο εφαπτομένης, 335
 εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας, 229
 ακτινικές διατομές, 298
 κυκλικές διατομές, 300
 παράλληλες διατομές, 296
 επαγωγή (μαθηματική), 23
 επαναληπτική διαδικασία του Newton, 225
 έργο δύναμης, 294
 ευθεία στήριξης, 207
 εφαπτόμενη ευθεία, 159, 166, 182, 183
 Θεώρημα
 Bolzano, 147
 Fermat, 186
 Rolle, 188
 Taylor
 με σφάλμα ολοκληρωτικού τύπου, 282
 με σφάλμα τύπου Lagrange, 222
 Ενδιάμεσης Τιμής, 145
 Θεμελιώδες του Απειροστικού
 Λογισμού, 259
 ιδιότητας σταθερού προσήμου, 147
 Μέγιστης / Ελάχιστης Τιμής, 144
 Μέσης Τιμής
 Cauchy, 190
 Lagrange, 189
 για ολοκλήρωμα, 281
 για ολοκλήρωμα (δεύτερο), 282
 για ολοκλήρωμα (πρώτο), 282
 ολοκληρωσιμότητας
 μονότονης συνάρτησης, 233
 συνεχούς συνάρτησης, 233, 393
 τμηματικά συνεχούς συνάρτησης, 242
 ορίου
 μονότονης ακολουθίας, 80
 μονότονης συνάρτησης, 129
 Φραγμένης Συνάρτησης, 143
 ιδιότητες
 δυνάμεων, 15
 λογαρίθμων, 17, 82
 τριγωνομετρικών αριθμών, 20, 21

καμπύλη
 λεία ή ομαλή, 290
 στο επίπεδο, 179
 στον χώρο, 181
 κανόνας
 I' Hopital (δεύτερος), 211
 I' Hopital (πρώτος), 209
 αθροίσματος, 67, 102
 αλλαγής μεταβλητής ή κανόνας
 αντικατάστασης, I, 110
 αλλαγής μεταβλητής ή κανόνας
 αντικατάστασης, II, 135
 αλυσίδα, 172
 αντίθετου, 66, 101
 αντίστροφου, I, 70, 105
 αντίστροφου, II, 71, 106
 αντίστροφης συνάρτησης, 173
 απόλυτου, 72, 108
 γινομένου, 68, 103
 διαφοράς, 68, 103
 λόγου, 71, 106
 παρεμβολής, 75, 112
 σύνθεσης, 135
 κατενοειδής, 292
 κέντρο δυναμοσειράς, 326
 κοίλη
 ακολουθία, 85
 συνάρτηση, 202
 κριτήριο
 Cauchy, 380
 Dirichlet, 324
 απόλυτης σύγκλισης, 321
 δεύτερης παραγώγου για τοπικό
 ακρότατο, 202
 εναλλασσόμενων προσήμων, 324
 λόγου
 d' Alembert, 322
 για ακολουθίες, 77
 ολοκληρωτικό, 311
 ρίζας Cauchy, 323
 συμπίκνωσης Cauchy, 313
 κύριος όρος αθροίσματος, 220
 κυρτή
 ακολουθία, 85
 συνάρτηση, 202
 λημνίσκος, 301
 λογάριθμος, 17, 82
 μάζα
 ευθύγραμμης ράβδου, 232
 καμπυλόγραμμης ράβδου, 293
 μεγάλο όμικρον, 219

μέθοδος μεταβλητών παραμέτρων, 360, 365

μερικό άθροισμα σειράς, 303

μέση τιμή συνάρτησης, 281, 282

μήκος καμπύλης, 290

μικρό όμικρον, 219

νόμος

Hooke, 296

Kirchhoff, 362, 370

Newton, 295

διάσπασης, 362

ψύξης Newton, 362

ολοκλήρωμα, 233

Fresnel, 289

αβελιανό, 280

αόριστο, 256

γενικευμένο, 283

ελλειπτικό, 280

ολοκλήρωση

αλγεβρικών συναρτήσεων, 277

κατά μέρη ή κατά παράγοντες, 267

με αντικατάσταση ή αλλαγή

μεταβλητής, 265

ρητών συναρτήσεων, 270

τριγωνομετρικών συναρτήσεων, 275

ολοκληρωτικός παράγων, 356

ομοιόμορφη συνέχεια συνάρτησης, 388

ορίζουσα Wronski, 363

όριο

ακολουθίας, 60, 61

δύναμης, 120

εκθετικής συνάρτησης, 121

λογαριθμικής συνάρτησης, 121

ρητής συνάρτησης, 117

συνάρτησης, 90, 94, 96

και ακολουθίες, 115

τριγωνομετρικής συνάρτησης, 124

παραβολή, 36

παραγοντικό, 24

παράγουσα συνάρτηση, 253

παραγωγισιμότητα

δυναμοσειράς, 336

συνάρτησης, 161

συνάρτησης, και συνέχεια, 170

παράγωγος, 161

αντίστροφης τριγωνομετρικής

συνάρτησης, 174

ανώτερης τάξης, 199

δύναμης με ακέραιο εκθέτη, 164

δύναμης με ρητό εκθέτη, 165

δυναμοσειράς, 336, 339

εκθετικής συνάρτησης, 178

και κυρτότητα/κοιλότητα, 204

και μονοτονία, 192

καμπύλης, 182

λογαριθμικής συνάρτησης, 177

τριγωνομετρικής συνάρτησης, 165, 171

πεδίο ορισμού συνάρτησης, 29

πλάτος διαμέρισης, 230

πολλαπλότητα ρίζας πολυωνύμου, 118

πολυώνυμα

Bernoulli, 265

Hermite, 202

προσέγγιση Taylor, 222, 283

προσεγγιστική

επίλυση εξίσωσης, 225

ολοκλήρωση

μέθοδος Simpson, 250

μέθοδος εφαπτομένων, 249

μέθοδος ορθογωνίων, 247

μέθοδος τραπεζίων, 248

πυκνότητα

αρρήτων, 11

ρητών, 11

ρίζα, 12

σειρά, 303

Taylor, 331

αρμονική, 304

γεωμετρική, 304, 305

με μη-αρνητικούς όρους, 308

τηλεσκοπική, 307

σημείο

ελαχίστου, 185

καμπής, 205

μεγίστου, 185

μεμονωμένο, 132

συσσώρευσης, 88

τοπικού ελαχίστου, 185

τοπικού μεγίστου, 185

σπείρα

λογαριθμική, 292

του Αρχιμήδη, 292

υπερβολική, 292

σύγκλιση

ακολουθίας, 60

γενικευμένου ολοκληρώματος, 283

σειράς, 304

συνάρτησης, 90, 94, 96

συνάρτηση, 29

Hölder συνεχής, 134, 196

Lipschitz συνεχής, 134, 196

ακέραιο μέρος, 38

αλγεβρική, 158

- αντίστροφη, 41
 αντίστροφη τριγωνομετρική, 52
 αντίστροφη υπερβολική, 156
 άνω φραγμένη, 33
 άρτια, 34
 αύξουσα, 33
 γάμμα του Euler, 289
 γραμμική κλασματική, 40
 δύναμη, 47
 εκθετική, 48
 ένα-προς-ένα, 41
 επί, 41
 κάτω φραγμένη, 33
 λογαριθμική, 48
 μονότονη, 33
 ολοκληρώσιμη, 233
 παραγωγίσιμη, 161
 περιοδική, 49
 περιττή, 35
 πολωνυμική, 44
 πρόσημο, 41
 ρητή, 45
 συνεχής, 131
 τμηματικά συνεχής, 242
 τριγωνομετρική, 49, 396
 υπερβατική, 158
 υπερβολική, 156
 φθίνουσα, 33
- συνέχεια
 αόριστου ολοκληρώματος, 259
 δυναμοσειράς, 336
 συνάρτησης, 131
 και ακολουθίες, 142
- σύνολο
- άνω φραγμένο, 9
 κάτω φραγμένο, 9
 περιοδικό, 49
 φραγμένο, 9
 σύνολο τιμών συνάρτησης, 29
 πολωνυμικής, 150
 συνεχούς, 149
 μονότονης, 152
 συντελεστές δυναμοσειράς, 326
 σφάλμα προσέγγισης Taylor
 ολοκληρωτικού τύπου, 283
 τύπου Lagrange, 222
 τάξη
 διαφορικής εξίσωσης, 348
 μεγέθους, 217
 εκθετική, 218
 λογαριθμική, 218
 πολωνυμική, 218
 ταχύτητα, 160, 291
 αριθμητική ή βαθμωτή, 291
 τρίγωνο του Pascal, 26
 τριγωνομετρικό πολώνυμο, 264
 τριγωνομετρικοί αριθμοί, 19
 τριγωνομετρικός κύκλος, 19
 τύπος
 Leibniz, 201
 Wallis, 269
 αλλαγής βάσης λογαρίθμου, 17, 83
 υπακολουθία, 64
 υπερβολή, 37
 χώρος λύσεων γραμμικής διαφορικής
 εξίσωσης, 350
 ψηφία p -αδικά, 314

Ευρετήριο συμβόλων

$\mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{N}^*, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, 5

$\overline{\mathbb{R}}$, 9

$-\infty, +\infty$, 8

$(a, b), (a, b], [a, b), [a, b], (a, +\infty), [a, +\infty),$
 $(-\infty, b), (-\infty, b], (-\infty, +\infty)$, 8

$|x|$, 6

$\text{sign}(x)$, 41

$[x]$, 11

a^n , n ακέραιος, 12

$\sqrt[n]{a}$, 12

a^r , r ρητός, 13

a^x , x άρρητος, 14

$\log_a y$, 17

$\log y, \ln y$, 82

$\cos x, \sin x, \tan x, \cot x$, 19

$\arccos y, \arcsin y, \arctan y, \text{arccot } y$, 52

$\cosh x, \sinh x, \tanh x, \coth x$, 156

$\text{arccosh } x, \text{arcsinh } x, \text{arctanh } x, \text{arccoth } x$, 157

$n!$, 24

$\binom{n}{m}$, 24

π , 18

e , 82

γ , 85

(x_n) , 55

(x_{n_k}) , 64

$x_n \rightarrow x, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$, 60

$x_n \rightarrow +\infty, x_n \rightarrow -\infty$,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty$, 61

$\liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n, \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n$, 383

$\sum_{k=m}^n a_k$, 22

$\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$, 303

$\min A, \max A$, 6

$\sup A$, 372

$\inf A$, 373

$f : A \rightarrow B$, 29

$f^{-1} : B \rightarrow A$, 41

$y = f(x)$, 29

$x = f^{-1}(y)$, 41

$f(A)$, 29

$g \circ f$, 109

$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x), \lim_{x \rightarrow \xi+} f(x), \lim_{x \rightarrow \xi-} f(x)$, 90

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, 94

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, 96

$f'(\xi)$, 161

$f'(x), \frac{df(x)}{dx}, \frac{dy}{dx}$, 163

$f^{(n)}(x), \frac{d^n f(x)}{dx^n}, \frac{d^n y}{dx^n}$, 200

$f = o(g), f = O(g)$, 219

$f \sim g$, 219

$\int_a^b f(x) dx$, 233

$\int f(x) dx$, 257

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$, 283

$dy = \phi'(x) dx$, 266

$\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi)$, 232

$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta), \bar{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$, 390

$\pi\lambda\acute{\alpha}\tau\omicron\varsigma(\Delta)$, 230

$H_n(x)$, 202

$P_m(x)$, 265

$\Gamma(t)$, 289

$d(M, l)$, 196

$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, 179

$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, 181

$R_n(x; \xi; f)$, 332

$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, 348

$W(f, g)$, 363

$\langle X_N X_{N-1} \dots X_1 X_0 \rangle_p$, 315

$\langle 0.x_1 x_2 x_3 \dots \rangle_p$, 318

$\langle X_N \dots X_0.x_1 x_2 \dots \rangle_p$, 319

Οι σημειώσεις αυτές ασχολούνται με τον Απειροστικό Λογισμό, δηλαδή τον λογισμό των απειροστών μεγεθών, τον λογισμό των ορίων, και περιορίζονται στο πλαίσιο των συναρτήσεων μίας πραγματικής μεταβλητής με πραγματικές τιμές.

Αρχικά αναφέρονται οι κυριότερες ιδιότητες των πραγματικών αριθμών και κάποιες στοιχειώδεις ιδιότητες συναρτήσεων, από τις οποίες πολλές (αλλά όχι όλες) είναι γνωστές από το Λύκειο. Κατόπιν εισάγονται και μελετώνται διεξοδικά οι έννοιες του ορίου ακολουθίας και του ορίου συνάρτησης, καθώς και οι βασικές τους ιδιότητες, με πολλά παραδείγματα υπολογισμού ορίων. Επίσης, μελετάται η συγγενική έννοια της συνεχούς συνάρτησης και παρατίθενται οι βασικές ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων.

Κατόπιν, ο Απειροστικός Λογισμός χωρίζεται στον Διαφορικό Λογισμό (τον λογισμό των παραγώγων) και στον Ολοκληρωτικό Λογισμό (τον λογισμό των ολοκληρωμάτων) και μελετώνται οι βασικές ιδιότητες των παραγώγων, καθώς και οι βασικές ιδιότητες των ολοκληρωμάτων.

Τους δύο Λογισμούς, τον Διαφορικό και τον Ολοκληρωτικό, ενώνει το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού, με τη βοήθεια του οποίου αναπτύσσονται διάφορες μέθοδοι υπολογισμού ολοκληρωμάτων. Επιπλέον, εκτίθενται αρκετές εφαρμογές (γεωμετρικές και φυσικές) των παραγώγων και των ολοκληρωμάτων.

Ακολουθεί η μελέτη των σειρών αριθμών και των δυναμοσειρών, καθώς και η μελέτη κάποιων βασικών διαφορικών εξισώσεων (κυρίως πρώτου και δεύτερου βαθμού).

Οι σημειώσεις ολοκληρώνονται με κάποια πιο θεωρητικά ζητήματα μαθηματικής θεμελίωσης –μέσω του αξιώματος ελάχιστου άνω φράγματος– βασικών εννοιών και προτάσεων, οι οποίες εκτέθηκαν αναπόδεικτες στο κύριο μέρος των σημειώσεων.

Το παρόν σύγγραμμα δημιουργήθηκε στο πλαίσιο του Έργου ΚΑΛΛΙΠΟΣ+	
Χρηματοδότης	Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων, Προγράμματα ΠΔΕ, ΕΠΑ 2020-2025
Φορέας υλοποίησης	ΕΛΚΕ ΕΜΠ
Φορέας λειτουργίας	ΣΕΑΒ/Παράρτημα ΕΜΠ/Μονάδα Εκδόσεων
Διάρκεια 2ης Φάσης	2020-2023
Σκοπός	Η δημιουργία ακαδημαϊκών ψηφιακών συγγραμμάτων ανοικτής πρόσβασης (περισσότερων από 700) • Προπτυχιακών και μεταπτυχιακών εγχειριδίων • Μονογραφιών • Μεταφράσεων ανοικτών textbooks • Βιβλιογραφικών Οδηγών
Επιστημονικά Υπεύθυνος	Νικόλαος Μήτρου, Καθηγητής ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ
ISBN: 978-618-228-267-0	DOI: http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-1011