Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων

Λύσεις των ασκήσεων

---

1. (α) Λέμε ότι μια συνάρτηση f έχει την ιδιότητα Lipschitz με σταθερά Lipschitz το θετικό αριθμό M αν για κάθε x, y στο πεδίο ορισμού της f ισχύει

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Δείξτε ότι κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο φραγμένη από M είναι και Lipschitz με σταθερά Lipschitz αυτό το M.

(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση x^2 δεν είναι Lipschitz αν θεωρήσουμε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ ως πεδίο ορισμού της αλλά είναι Lipschitz αν περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της να είναι ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$.

(γ) Δείξτε ότι δε χρειάζεται μια συνάρτηση να είναι παραγωγίσιμη για να είναι Lipschitz.

Λύση: (α) Εφαρμόζουμε απλά το Θεώρημα Μέσης Τιμής.

(β) Αν γράψουμε $f(x) = x^2$ τότε $f(n+1) - f(n) = 2n + 1$ που δεν είναι φραγμένη ποσότητα όταν $n \in \mathbb{Z}$. Αν η συνάρτηση ήταν Lipschitz αυτή η ποσότητα θα ήταν φραγμένη.

(γ) Πάρτε τη συνάρτηση (σε όλο το $\mathbb{R}$) $f(x) = |x|$. Αυτή δεν είναι παραγωγίσιμη παντού αλλά είναι Lipschitz με σταθερά 1:

$$|f(x) - f(y)| = ||x| - |y|| \leq |x - y| \quad \text{από την τριγωνική ανισότητα.}$$

---

2. Αν $w_1, w_2, \ldots, w_n \geq 0$ και $w_1 + \cdots + w_n = 1$ δείξτε την ανισότητα, γενίκευση της ανισότητας Αριθμητικού–Γεωμετρικού μέσου,

$$a_1^{w_1} a_2^{w_2} \cdots a_n^{w_n} \leq w_1 a_1 + \cdots + w_n a_n,$$

για οποιουσδήποτε αριθμούς $a_1, \ldots, a_n > 0$.

Λύση: Θέτουμε $x_i = \ln a_i$ και έτσι το αριστερό μέρος της ανισότητας γίνεται

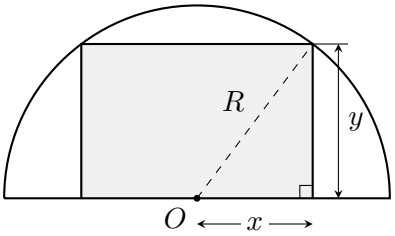
$$e^{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n}.$$

Από την ανισότητα Jensen για την κυρτή συνάρτηση e^x αυτό είναι

$$\leq w_1 e^{x_1} + \cdots + w_n e^{x_n} = w_1 a_1 + \cdots + w_n a_n.$$

---

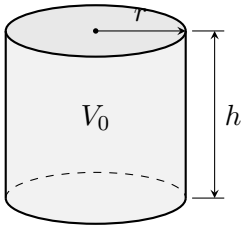
3. Ένα ορθογώνιο είναι εγγεγραμμένο σε ημικύκλιο ακτίνας $R > 0$: η μία πλευρά του βρίσκεται πάνω στη διάμετρο και οι δύο απέναντι κορυφές του πάνω στο ημικύκλιο. Ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του ώστε να έχει το μέγιστο εμβαδό; Ονομάστε τις μεταβλητές σας, βρείτε τη σχέση που τις συνδέει και δικαιολογήστε ότι το εμβαδό που βρίσκετε είναι πράγματι το μεγαλύτερο δυνατό.



Λύση: Θέτουμε το κέντρο του κύκλου στην αρχή των αξόνων και τη διάμετρο στον οριζόντιο άξονα. Οι δύο πάνω κορυφές έχουν το ίδιο ύψος και ανήκουν στον κύκλο, άρα οι οριζόντιες συντεταγμένες τους είναι αντίθετες. Αν $x > 0$ είναι το μισό πλάτος και $y > 0$ το ύψος του ορθογωνίου, έχουμε $x^2 + y^2 = R^2$. Επομένως το εμβαδό είναι $A(x) = 2x\sqrt{R^2 - x^2}$, με $0 < x < R$. Αντί για το A, αρκεί να μεγιστοποιήσουμε το τετράγωνό του, αφού $A > 0$. Θέτουμε $B(x) = A(x)^2 = 4x^2(R^2 - x^2)$ και βρίσκουμε $B'(x) = 8x(R^2 - 2x^2)$. Η παράγωγος είναι θετική για $0 < x < R/\sqrt{2}$ και αρνητική για $R/\sqrt{2} < x < R$. Άρα το μοναδικό μέγιστο εμφανίζεται όταν $x = R/\sqrt{2}$, οπότε και $y = R/\sqrt{2}$. Οι ζητούμενες διαστάσεις είναι πλάτος $\sqrt{2}R$ και ύψος $R/\sqrt{2}$, και το μέγιστο εμβαδό είναι R^2.

---

4. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κλειστό κυλινδρικό δοχείο όγκου $V_0 > 0$. Το υλικό έχει το ίδιο κόστος ανά μονάδα επιφάνειας στη βάση, στο καπάκι και στην παράπλευρη επιφάνεια. Αγνοούμε το πάχος του υλικού και τις ενώσεις. Ποια σχέση πρέπει να έχουν το ύψος και η ακτίνα του δοχείου ώστε να χρησιμοποιηθεί η μικρότερη δυνατή ποσότητα υλικού; Βρείτε επίσης τις διαστάσεις ως συναρτήσεις του V_0.



Λύση: Αν $r > 0$ είναι η ακτίνα και $h > 0$ το ύψος, η συνθήκη του όγκου είναι $\pi r^2 h = V_0$. Η συνολική επιφάνεια είναι $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$. Αντικαθιστώντας $h = V_0/(\pi r^2)$ παίρνουμε $S(r) = 2\pi r^2 + 2V_0/r$ για $r > 0$. Έχουμε $S'(r) = 4\pi r - 2V_0/r^2$. Το πρόσημό της είναι το πρόσημο του $2\pi r^3 - V_0$, αφού $S'(r) = 2(2\pi r^3 - V_0)/r^2$. Άρα η επιφάνεια μειώνεται μέχρι το $r_0 = (V_0/(2\pi))^{1/3}$ και αυξάνεται μετά από αυτό, οπότε εκεί έχει το ολικό της ελάχιστο. Από $V_0 = 2\pi r_0^3$ και τη συνθήκη του όγκου βρίσκουμε $h_0 = 2r_0$. Το βέλτιστο ύψος είναι λοιπόν ίσο με τη διάμετρο της βάσης, και οι διαστάσεις είναι $r_0 = (V_0/(2\pi))^{1/3}$ και $h_0 = 2(V_0/(2\pi))^{1/3}$.

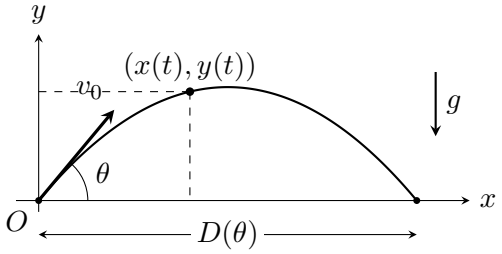
---

5. Ένα σώμα εκτοξεύεται από το έδαφος με σταθερό μέτρο αρχικής ταχύτητας $v_0 > 0$ και γωνία θ προς τον ορίζοντα, όπου $0 < \theta < \pi/2$. Αγνοούμε την αντίσταση του αέρα. Η οριζόντια θέση και το ύψος του τη χρονική στιγμή t δίνονται από $x(t) = v_0 \cos\theta\, t$ και $y(t) = v_0 \sin\theta\, t - gt^2/2$, όπου $g > 0$ είναι η σταθερή επιτάχυνση της βαρύτητας.

(a) Βρείτε τη θετική χρονική στιγμή κατά την οποία το σώμα επιστρέφει στο έδαφος και εκφράστε την οριζόντια απόσταση που έχει διανύσει ως συνάρτηση της θ.

(b) Ποια γωνία δίνει τη μέγιστη οριζόντια απόσταση;

(c) Αν διπλασιαστεί η αρχική ταχύτητα, πόσες φορές μεγαλύτερη γίνεται αυτή η μέγιστη απόσταση;



Λύση: (a) Από την εξίσωση $y(t) = 0$ παίρνουμε $t(v_0 \sin\theta - gt/2) = 0$. Η θετική ρίζα είναι $T = 2v_0 \sin\theta/g$. Επομένως η οριζόντια απόσταση μέχρι την επιστροφή στο έδαφος είναι $D(\theta) = x(T) = 2v_0^2 \sin\theta\cos\theta/g = (v_0^2/g)\sin(2\theta)$.

(b) Παραγωγίζουμε ως προς τη γωνία, όχι ως προς τον χρόνο: $D'(\theta) = (2v_0^2/g)\cos(2\theta)$. Η παράγωγος είναι θετική στο $(0, \pi/4)$ και αρνητική στο $(\pi/4, \pi/2)$. Άρα η μέγιστη απόσταση επιτυγχάνεται για $\theta = \pi/4$, δηλ. 45 μοίρες, και είναι $D_{\max} = v_0^2/g$.

(c) Αν αντικαταστήσουμε το v_0 με $2v_0$, η μέγιστη απόσταση γίνεται $4v_0^2/g$, δηλ. τετραπλασιάζεται.

---

6. (a) Χρησιμοποιήστε τη δεύτερη παράγωγο για να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $f(x) = x^4$ και $g(x) = x^3$ είναι κυρτές στο $\mathbb{R}$. Σε ποια διαστήματα είναι κυρτή ή κοίλη η g;

(b) Με την ανισότητα Jensen δείξτε ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει $((a+b)/2)^4 \le (a^4+b^4)/2$. Δείξτε ότι ισότητα ισχύει μόνο όταν $a = b$.

Λύση: (a) Έχουμε $f''(x) = 12x^2 \ge 0$, άρα η f είναι κυρτή σε όλο το $\mathbb{R}$. Για την g έχουμε $g''(x) = 6x$, που είναι αρνητική για $x < 0$ και θετική για $x > 0$. Άρα η g είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$ και κυρτή στο $[0, +\infty)$, αλλά δεν είναι κυρτή σε όλο το $\mathbb{R}$.

(b) Εφαρμόζουμε Jensen στην κυρτή συνάρτηση f με βάρη $1/2, 1/2$ και παίρνουμε τη ζητούμενη ανισότητα. Για την ισότητα, παρατηρούμε ότι $f'(x) = 4x^3$ είναι αυστηρά αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$. Αυτό συνεπάγεται ότι η f είναι αυστηρά κυρτή: αν $a < c < b$, το θεώρημα μέσης τιμής στα $[a, c]$ και $[c, b]$ δίνει ότι η κλίση της πρώτης χορδής είναι αυστηρά μικρότερη από την κλίση της δεύτερης. Αναδιατάσσοντας αυτή την ανισότητα βλέπουμε ότι το σημείο $(c, f(c))$ βρίσκεται αυστηρά κάτω από τη χορδή που ενώνει τα $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$. Επομένως, αν $a \ne b$, η ανισότητα Jensen είναι αυστηρή.

---

7. (a) Εξετάστε με τη δεύτερη παράγωγο την κυρτότητα της $f(x) = 1/x$ στο $(0, +\infty)$.

(b) Αν $a_1, \dots, a_n > 0$ και $a_1 + \cdots + a_n = S$, όπου $S > 0$ είναι σταθερό, χρησιμοποιήστε την ανισότητα Jensen για να βρείτε τη μικρότερη δυνατή τιμή του $1/a_1 + \cdots + 1/a_n$. Πότε επιτυγχάνεται;

(c) Συμπεράνετε ότι ο *αρμονικός μέσος* $n/(1/a_1 + \cdots + 1/a_n)$ δεν υπερβαίνει τον *αριθμητικό μέσο* $(a_1 + \cdots + a_n)/n$.

Λύση: (a) Έχουμε $f'(x) = -1/x^2$ και $f''(x) = 2/x^3 > 0$ για $x > 0$. Άρα η f είναι αυστηρά κυρτή, παρόλο που είναι φθίνουσα.

(b) Με ίσα βάρη $1/n$, η Jensen δίνει $f(S/n) \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(a_i)$, δηλ. $n/S \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n 1/a_i$. Άρα $\sum_{i=1}^n 1/a_i \ge n^2/S$. Η τιμή n^2/S επιτυγχάνεται όταν όλα τα a_i είναι ίσα με S/n. Λόγω της αυστηρής κυρτότητας αυτή είναι και η μόνη περίπτωση ισότητας.

(c) Όλες οι ποσότητες είναι θετικές, οπότε αντιστρέφοντας την τελευταία ανισότητα και πολλαπλασιάζοντας με n βρίσκουμε $n/(\sum_{i=1}^n 1/a_i) \le S/n$. Ισότητα ισχύει ακριβώς όταν όλοι οι αριθμοί είναι ίσοι.

---

8. Ένα τρίγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο σταθερής ακτίνας $R > 0$ και έχει γωνίες A, B, C σε ακτίνια.

(a) Εξετάστε με τη δεύτερη παράγωγο την κυρτότητα ή κοιλότητα της $\varphi(t) = \ln(\sin t)$ στο $(0, \pi)$.

(b) Εφαρμόστε την ανισότητα Jensen, χρησιμοποιώντας ότι $A + B + C = \pi$, για να βρείτε ένα άνω φράγμα του γινομένου $\sin A \sin B \sin C$. Πότε ισχύει ισότητα;

(c) Το εμβαδό του τριγώνου δίνεται από τον τύπο $E = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$. Ποιο από τα τρίγωνα που είναι εγγεγραμμένα στον κύκλο έχει το μέγιστο εμβαδό και πόσο είναι αυτό;

Λύση: (a) Στο $(0,\pi)$ ισχύει $\sin t > 0$, άρα η φ ορίζεται. Έχουμε $\varphi'(t) = \cos t/\sin t$ και $\varphi''(t) = -1/\sin^2 t < 0$. Άρα η φ είναι αυστηρά κοίλη.

(b) Για κοίλη συνάρτηση η φορά της Jensen αντιστρέφεται (ισοδύναμα εφαρμόζουμε Jensen στην κυρτή συνάρτηση $-\varphi$). Έτσι $(\varphi(A)+\varphi(B)+\varphi(C))/3 \le \varphi(\pi/3) = \ln(\sqrt{3}/2)$. Πολλαπλασιάζοντας με 3 και εκθετοποιώντας παίρνουμε $\sin A \sin B \sin C \le (\sqrt{3}/2)^3 = 3\sqrt{3}/8$. Λόγω της αυστηρής κοιλότητας, ισότητα έχουμε ακριβώς όταν $A = B = C = \pi/3$.

(c) Από τον τύπο $E = ab\sin C/2$ προκύπτει η ζητούμενη έκφραση του εμβαδού. Επομένως $E \le 2R^2(3\sqrt{3}/8) = 3\sqrt{3}R^2/4$. Το μέγιστο επιτυγχάνεται ακριβώς για το ισόπλευρο τρίγωνο.