Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων

Απειροστικός Λογισμός Ι - Φθινόπωρο 2026-27- Φυλλάδιο Ασκήσεων **9** - Μιχάλης Κολουντζάκης

Οι ασκήσεις αυτές είναι για να λυθούν από εσάς τους ίδιους. Προσπαθήστε να λύσετε όσο γίνεται περισσότερες πριν έρθετε στα εργαστήρια της Παρασκευής όπου θα σας παρέχεται βοήθεια για τη λύση όσων από αυτές δεν έχετε καταφέρει να λύσετε.

Προσπαθείτε να γράφετε κάτω τα επιχειρήματά σας με τρόπο ώστε να φαίνεται καθαρά ποια πρόταση επικαλείστε κάθε φορά και πώς προκύπτει το κάθε τι το οποίο ισχυρίζεστε.

Φέρτε αυτό το Φυλλάδιο μαζί σας στο εργαστήριο.

Τελευταία ενημέρωση: 17 Νοεμβρίου 2026

1. (α) Λέμε ότι μια συνάρτηση f έχει την ιδιότητα Lipschitz με σταθερά Lipschitz το θετικό αριθμό M αν για κάθε x, y στο πεδίο ορισμού της f ισχύει

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

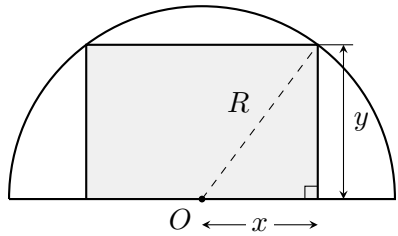
Δείξτε ότι κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο φραγμένη από M είναι και Lipschitz με σταθερά Lipschitz αυτό το M.
(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση x^2 δεν είναι Lipschitz αν θεωρήσουμε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ ως πεδίο ορισμού της αλλά είναι Lipschitz αν περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της να είναι ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$.
(γ) Δείξτε ότι δε χρειάζεται μια συνάρτηση να είναι παραγωγίσιμη για να είναι Lipschitz.

2. Αν $w_1, w_2, \ldots, w_n \geq 0$ και $w_1 + \cdots + w_n = 1$ δείξτε την ανισότητα, γενίκευση της ανισότητας Αριθμητικού–Γεωμετρικού μέσου,

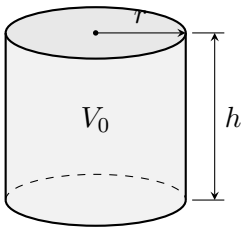
$$a_1^{w_1} a_2^{w_2} \cdots a_n^{w_n} \leq w_1 a_1 + \cdots + w_n a_n,$$

για οποιουσδήποτε αριθμούς $a_1, \ldots, a_n > 0$.

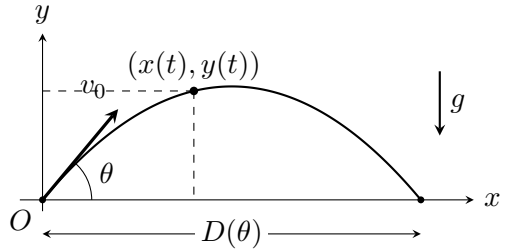
3. Ένα ορθογώνιο είναι εγγεγραμμένο σε ημικύκλιο ακτίνας $R > 0$: η μία πλευρά του βρίσκεται πάνω στη διάμετρο και οι δύο απέναντι κορυφές του πάνω στο ημικύκλιο. Ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του ώστε να έχει το μέγιστο εμβαδό; Ονομάστε τις μεταβλητές σας, βρείτε τη σχέση που τις συνδέει και δικαιολογήστε ότι το εμβαδό που βρίσκετε είναι πράγματι το μεγαλύτερο δυνατό.



4. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κλειστό κυλινδρικό δοχείο όγκου $V_0 > 0$. Το υλικό έχει το ίδιο κόστος ανά μονάδα επιφάνειας στη βάση, στο καπάκι και στην παράπλευρη επιφάνεια. Αγνοούμε το πάχος του υλικού και τις ενώσεις. Ποια σχέση πρέπει να έχουν το ύψος και η ακτίνα του δοχείου ώστε να χρησιμοποιηθεί η μικρότερη δυνατή ποσότητα υλικού; Βρείτε επίσης τις διαστάσεις ως συναρτήσεις του V_0.



5. Ένα σώμα εκτοξεύεται από το έδαφος με σταθερό μέτρο αρχικής ταχύτητας $v_0 > 0$ και γωνία θ προς τον ορίζοντα, όπου $0 < \theta < \pi/2$. Αγνοούμε την αντίσταση του αέρα. Η οριζόντια θέση και το ύψος του τη χρονική στιγμή t δίνονται από $x(t) = v_0 \cos\theta\, t$ και $y(t) = v_0 \sin\theta\, t - gt^2/2$, όπου $g > 0$ είναι η σταθερή επιτάχυνση της βαρύτητας.
(a) Βρείτε τη θετική χρονική στιγμή κατά την οποία το σώμα επιστρέφει στο έδαφος και εκφράστε την οριζόντια απόσταση που έχει διανύσει ως συνάρτηση της θ.
(b) Ποια γωνία δίνει τη μέγιστη οριζόντια απόσταση;
(c) Αν διπλασιαστεί η αρχική ταχύτητα, πόσες φορές μεγαλύτερη γίνεται αυτή η μέγιστη απόσταση;



6. (a) Χρησιμοποιήστε τη δεύτερη παράγωγο για να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $f(x) = x^4$ και $g(x) = x^3$ είναι κυρτές στο $\mathbb{R}$. Σε ποια διαστήματα είναι κυρτή ή κοίλη η g;
(b) Με την ανισότητα Jensen δείξτε ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει $((a+b)/2)^4 \le (a^4 + b^4)/2$. Δείξτε ότι ισότητα ισχύει μόνο όταν $a = b$.

7. (a) Εξετάστε με τη δεύτερη παράγωγο την κυρτότητα της $f(x) = 1/x$ στο $(0, +\infty)$.
(b) Αν $a_1, \ldots, a_n > 0$ και $a_1 + \cdots + a_n = S$, όπου $S > 0$ είναι σταθερό, χρησιμοποιήστε την ανισότητα Jensen για να βρείτε τη μικρότερη δυνατή τιμή του $1/a_1 + \cdots + 1/a_n$. Πότε επιτυγχάνεται;
(c) Συμπεράνετε ότι ο *αρμονικός μέσος* $n/(1/a_1 + \cdots + 1/a_n)$ δεν υπερβαίνει τον *αριθμητικό μέσο* $(a_1 + \cdots + a_n)/n$.

8. Ένα τρίγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο σταθερής ακτίνας $R > 0$ και έχει γωνίες A, B, C σε ακτίνια.
(a) Εξετάστε με τη δεύτερη παράγωγο την κυρτότητα ή κοιλότητα της $\varphi(t) = \ln(\sin t)$ στο $(0, \pi)$.
(b) Εφαρμόστε την ανισότητα Jensen, χρησιμοποιώντας ότι $A + B + C = \pi$, για να βρείτε ένα άνω φράγμα του γινομένου $\sin A \sin B \sin C$. Πότε ισχύει ισότητα;
(c) Το εμβαδό του τριγώνου δίνεται από τον τύπο $E = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$. Ποιο από τα τρίγωνα που είναι εγγεγραμμένα στον κύκλο έχει το μέγιστο εμβαδό και πόσο είναι αυτό;