

Οι ασκήσεις αυτές είναι για να λυθούν από εσάς τους ίδιους. Προσπαθήστε να λύσετε όσο γίνεται περισσότερες πριν έρθετε στα εργαστήρια της Παρασκευής όπου θα σας παρέχεται βοήθεια για τη λύση όσων από αυτές δεν έχετε καταφέρει να λύσετε.

Προσπαθείτε να γράφετε κάτω τα επιχειρήματά σας με τρόπο ώστε να φαίνεται καθαρά ποια πρόταση επικαλείστε κάθε φορά και πώς προκύπτει το κάθε τι το οποίο ισχυρίζεστε.

Φέрте αυτό το Φυλλάδιο μαζί σας στο εργαστήριο.

Τελευταία ενημέρωση: **6 Οκτωβρίου 2026**

1. Αποδείξτε με επαγωγή ως προς n τον τύπο

$$(1) \quad 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

2. Βρείτε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

$$a_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)^4, \quad b_n = \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + 2^{n+1}}, \quad c_n = \frac{1}{\frac{1}{n} + 2^{-n}}, \quad d_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}.$$

3. Αν γνωρίζετε ότι $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$ και ότι η a_n ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$(2) \quad a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2^n},$$

για $n \geq 2$, βρείτε το όριο a .

4. Βρείτε το όριο της

$$a_n = \frac{1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n}{1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n}.$$

5. Δείξτε ότι $(n+1)^{1/3} - n^{1/3} \rightarrow 0$.

 $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

6. Δείξτε ότι $a_n = \frac{n!}{n^n} \rightarrow 0$.

7. Έχουμε $x_1 > 0, x_2 > 0$ και για $n \geq 1$ έχουμε

$$(3) \quad x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n.$$

Δείξτε ότι $\rho_n = \frac{x_{n+1}}{x_n} \rightarrow 2$.

 Βρείτε πρώτα μια αναδρομική σχέση που ικανοποιεί η ρ_n . Δε μπορείτε να δείξετε ότι η ρ_n είναι μονότονη αλλά μπορείτε να δείξετε ότι οι δύο υπακολουθίες της ρ_{2n} και ρ_{2n+1} είναι μονότονες, άρα και συγκλίνουσες (για να το κάνετε αυτό βρείτε μια αναδρομική σχέση που ικανοποιούν αυτές οι δύο υπακολουθίες). Βρείτε έπειτα τα όρια των ρ_{2n} και ρ_{2n+1} και παρατηρήστε ότι είναι και τα δύο ίσα με 2, άρα $\rho_n \rightarrow 2$.

8. Όταν αποδείξαμε ότι μια αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία x_n συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό χρησιμοποιήσαμε το ότι υπάρχει ελάχιστο άνω φράγμα της ακολουθίας.

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα άνω φράγμα x της x_n που κανένα άλλο άνω φράγμα δεν είναι μικρότερό του.

Με άλλα λόγια, αν ονομάσουμε B το σύνολο όλων των άνω φραγμάτων της ακολουθίας x_n

$$z \in B \iff \text{το } z \text{ είναι άνω φράγμα της } x_n$$

τότε το σύνολο B έχει ελάχιστο στοιχείο, υπάρχει δηλ. $x \in B$ τέτοιο ώστε

$$z \in B \implies x \leq z.$$

(Δηλ. κάθε άλλο στοιχείο του B είναι μεγαλύτερο ή ίσο του x .)

Δεν έχουν όλα τα σύνολα πραγματικών αριθμών ελάχιστο στοιχείο. Για παράδειγμα το ανοιχτό διάστημα $(1, 2)$ δεν έχει ελάχιστο στοιχείο. Όποιο στοιχείο $x \in (1, 2)$ και να πάρουμε υπάρχει κάποιο άλλο $y \in (1, 2)$ που να είναι μικρότερο του x (π.χ. $y = (1+x)/2$, το μέσο του διαστήματος $(1, x)$).

Ποια από τα παρακάτω σύνολα έχουν ελάχιστο στοιχείο και ποιο είναι αυτό;

- (1) $A = \{\frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \dots\}$ (το σύνολο δηλ. όλων των αντιστρόφων των φυσικών αριθμών).
- (2) $B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ (οι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί).
- (3) $C = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ (οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί).

9. Αποδείξτε ότι

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \lfloor 1/x \rfloor = 0, \quad (b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \lfloor 1/x \rfloor = -1, \quad (c) \lim_{x \rightarrow \infty} \lceil 1/x \rceil = 1, \quad (d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \lceil 1/x \rceil = 0.$$

10. Υποθέστε ότι $f(x) \neq 1$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της f και ας είναι $z \in \mathbb{R}$ ένα σημείο που προσεγγίζεται από τα σημεία του πεδίου ορισμού της f . Δείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow z} f(x) = 2 \iff \lim_{x \rightarrow z} \frac{f(x) + 3}{f(x) - 1} = 5.$$

11. Υπολογίστε τα όρια

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor 2x \rfloor}{x}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor \sqrt{x} \rfloor}{x}, \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0+} \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

12. (a) Έστω $a \in \mathbb{R}$. Αν $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ δείξτε ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ τ.ώ. αν $x \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ και $x \neq a$ τότε $f(x) < g(x)$.

(b) Αν υποθέσουμε απλά ότι $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ δείξτε ότι δε μπορούμε από αυτό να συμπεράνουμε ότι $f(x) \leq g(x)$ σε κάποιο διάστημα γύρω από το a .