

1. Αν $p(x), q(x)$ είναι πολυώνυμα υπολογίστε το όριο της ακολουθίας $a_n = \frac{p(n)}{q(n)}$ και δείξτε ότι αυτό εξαρτάται μόνο από τους βαθμούς $\deg p, \deg q$ των πολυωνύμων p, q και από τους συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων τους.



Διαιρέστε αριθμητή και παρανομαστή στην $a_n = \frac{p(n)}{q(n)}$ με n^k όπου $k = \deg q$.

Λύση: Γράφουμε $a = \deg p, b = \deg q$ και

$$p(x) = p_a x^a + p_{a-1} x^{a-1} + \dots + p_1 x + p_0, \quad q(x) = q_b x^b + q_{b-1} x^{b-1} + \dots + q_1 x + q_0.$$

Διαιρούμε αριθμητή και παρανομαστή στην ακολουθία a_n με n^k , όπου $k = b = \deg q$, και παίρνουμε

$$(1) \quad a_n = \frac{p_a n^{a-k} + \dots + p_0 n^{-k}}{q_b + q_{b-1} n^{-1} + \dots + q_0 n^{-k}}.$$

Παρατηρήστε ότι ο παρανομαστής στην (1) τείνει στο q_b .

Αν $a = b$ τότε και ο αριθμητής τείνει στο p_a , άρα $a_n \rightarrow \frac{p_a}{q_b}$ σε αυτή την περίπτωση κλάσματος με ισόβαθμα πολυώνυμα πάνω και κάτω.

Αν $a < b$ τότε ο αριθμητής τείνει στο 0 οπότε $a_n \rightarrow 0$ σε αυτή την περίπτωση.

Αν $a > b$ ο αριθμητής τείνει στο $\operatorname{sgn} p_a \infty$ (όπου με $\operatorname{sgn} x$ συμβολίζουμε το πρόσημο, $+1$ ή -1 του πραγματικού αριθμού x και 0 αν $x = 0$). Σε αυτή την περίπτωση λοιπόν το όριο είναι $\operatorname{sgn} p_a / q_b \infty$.

2. Ποιο είναι το λάθος στον παρακάτω υπολογισμό

$$1 = \lim 1 = \lim n \frac{1}{n} = \lim \left(\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_n \right) = \underbrace{\lim \frac{1}{n} + \lim \frac{1}{n} + \dots + \lim \frac{1}{n}}_n = \underbrace{0 + 0 + \dots + 0}_n = 0;$$

Λύση: Το λάθος είναι στην ισότητα με κόκκινο στη μέση

$$1 = \lim 1 = \lim n \frac{1}{n} = \lim \left(\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_n \right) \neq \underbrace{\lim \frac{1}{n} + \lim \frac{1}{n} + \dots + \lim \frac{1}{n}}_n = \underbrace{0 + 0 + \dots + 0}_n = 0.$$

Ενώ μπορούμε για άθροισμα οποιουδήποτε **σταθερού** πλήθους (που να μην εξαρτάται από το n δηλ.) ακολουθιών να πούμε ότι το όριο του αθροίσματός τους είναι το άθροισμα των ορίων τους (αν αυτά υπάρχουν φυσικά) δε μπορούμε να το κάνουμε αυτό όταν το πλήθος των ακολουθιών είναι μεταβλητό, όπως φαίνεται από τον παραπάνω εσφαλμένο συλλογισμό.

3. (α) Βρείτε ακολουθίες x_n, y_n που να μην έχουν όριο αλλά με την $x_n + y_n$ να έχει όριο.
 (β) Βρείτε ακολουθίες x_n, y_n που να μην έχουν όριο αλλά με την $x_n \cdot y_n$ να έχει όριο.

Λύση: (α) $x_n = (-1)^n, y_n = (-1)^{n+1}$.

(β) Ίδιο παράδειγμα.

4. Υπολογίστε το όριο $\lim_n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.



Πολλαπλασιάστε και διαιρέστε με τη συζυγή παράσταση $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$.

Λύση: Έχουμε

$$0 \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$$

άρα το όριο είναι 0.

5. Αν $a \neq 1$ και $n \in \mathbb{N}$ δείξτε ότι

$$1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

Λύση: Ας είναι $x = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n$. Τότε εύκολα βλέπουμε ότι $x + a^{n+1} = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n + a^{n+1} = 1 + ax$. Λύνοντας την εξίσωση

$$x + a^{n+1} = 1 + ax$$

παιρνουμε το ζητούμενο.

6. (α) Αν $|a| < 1$ δείξτε ότι $a^n \rightarrow 0$.

(β) Αν $|a| < 1$ δείξτε ότι

$$\lim_n 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{1}{1-a}.$$



Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 5.

Λύση: (α) Έστω $a \in [0, 1)$. Αν $1 > \epsilon > 0$ θέλουμε να βρούμε n_0 τ.ώ. για $n \geq n_0$ να ισχύει $a^n < \epsilon$. Αυτό είναι ισοδύναμο με $n \ln a < \ln \epsilon$ ή αλλιώς $n > \frac{\ln(1/\epsilon)}{\ln(1/a)}$ (τώρα οι λογάριθμοι είναι θετικοί).

Παίρνουμε $n_0 = \left\lceil \frac{\ln(1/\epsilon)}{\ln(1/a)} \right\rceil$. Αν $a \in (-1, 0)$ παρατηρούμε ότι $a^n = (-1)^n |a|^n$ και χρησιμοποιούμε αυτό που μόλις αποδείξαμε.

(β) Από την Άσκηση 5 έχουμε

$$1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

και το όριο του δεξιού μέλους, χρησιμοποιώντας το (α), είναι το $(1-a)^{-1}$.

7. Αν η υπακολουθία περιττών δεικτών της a_n

$$x_n = a_{2n+1}$$

και η υπακολουθία αρτίων δεικτών της a_n

$$y_n = a_{2n}$$

συγκλίνουν και οι δύο στο ίδιο όριο $L \in \overline{\mathbb{R}}$ δείξτε ότι και η a_n συγκλίνει στο L .

Λύση: Ας πάρουμε την περίπτωση $L \in \mathbb{R}$. Η περίπτωση απείρου ορίου είναι εντελώς ανάλογη.

Ας είναι $\epsilon > 0$. Θα βρούμε n_0 τ.ώ.

$$(2) \quad n \geq n_0 \implies |a_n - L| < \epsilon.$$

Αφού $a_{2n+1} \rightarrow L$ και $a_{2n} \rightarrow L$ υπάρχουν n_1 και n_2 τέτοια ώστε

$$(3) \quad n \geq n_1 \implies |a_{2n+1} - L| < \epsilon \text{ και } n \geq n_2 \implies |a_{2n} - L| < \epsilon.$$

Παίρνουμε $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$. Εμείς θέλουμε να διαλέξουμε το n_0 ώστε να ισχύει η συνεπαγωγή 2.

Επιλέγουμε λοιπόν $n_0 = 10n_3$. Αν τώρα $n \geq n_0$ διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

- $n = 2k$ είναι άρτιος. Τότε $2k \geq 10n_3 \implies k \geq n_2$ άρα, από την (3), έχουμε $|a_{2k} - L| < \epsilon$.
- $n = 2k + 1$ είναι περιττός. Τότε $2k + 1 \geq 10n_3 \implies k \geq n_1$ άρα, από την (3), έχουμε $|a_{2k+1} - L| < \epsilon$.

8. Ας ονομάσουμε μια υπακολουθία της a_n ουσιώδη υπακολουθία αν υπάρχουν άπειροι όροι της a_n που δεν περιέχονται σε αυτήν. Δείξτε ότι αν κάθε ουσιώδης υπακολουθία της a_n συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό (δεν υποθέτουμε ότι ο αριθμός αυτός είναι ο ίδιος για όλες τις ουσιώδεις υπακολουθίες) τότε η a_n συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.



Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την Άσκηση 7.

Λύση: Οι a_{2n} και a_{2n+1} είναι ουσιώδεις υπακολουθίες της a_n . Ας είναι $a_{2n} \rightarrow x$ και $a_{2n+1} \rightarrow y$. Αν $x = y$ τότε από την Άσκηση 7 έχουμε το επιθυμητό συμπέρασμα. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι $x \neq y$ για να καταλήξουμε σε άτοπο.

Παρατηρούμε ότι η $b_n = a_{5n}$ είναι ουσιώδης υπακολουθία της a_n και άρα, σύμφωνα με την υπόθεσή μας, συγκλίνουσα. Η υπακολουθία αρτίων δεικτών της b_n είναι και υπακολουθία της a_{2n} άρα συγκλίνει στο x . Η υπακολουθία περιττών δεικτών της b_n είναι και υπακολουθία της a_{2n+1} άρα συγκλίνει στο y . Αφού $x \neq y$ έπεται ότι η b_n δε συγκλίνει, το οποίο είναι αντίφαση.

9. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας διαιρώντας αριθμητή και παρανομαστή με κατάλληλη δύναμη του n .

$$(1) \lim_n \frac{4n^3 - n + 2}{2n^3 + 5n^2 + 1}.$$

$$(2) \lim_n \frac{3n^2 + 1}{n^4 + 2n}.$$

$$(3) \lim_n \frac{-2n^4 + n}{n^2 + 3}.$$

Λύση:

$$(1) \text{ Διαιρούμε με } n^3. \text{ Το κλάσμα γίνεται } \frac{4 - 1/n^2 + 2/n^3}{2 + 5/n + 1/n^3} \text{ και τείνει στο } 2.$$

$$(2) \text{ Διαιρούμε με } n^4. \text{ Παίρνουμε } \frac{3/n^2 + 1/n^4}{1 + 2/n^3} \rightarrow 0.$$

$$(3) \text{ Γράφουμε το κλάσμα ως } n^2 \frac{-2 + 1/n^3}{1 + 3/n^2}. \text{ Το δεύτερο κλάσμα τείνει στο } -2, \text{ άρα είναι τελικά μικρότερο από } -1. \text{ Επομένως η αρχική ακολουθία είναι τελικά μικρότερη από } -n^2 \text{ και τείνει στο } -\infty.$$

10. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια, χρησιμοποιώντας συζυγείς παραστάσεις.

- (1) $\lim_n \left(\sqrt{n^2 + 3n} - n \right).$
- (2) $\lim_n n \left(\sqrt{n^2 + 1} - n \right).$
- (3) $\lim_n \left(\sqrt{n^2 + 4n + 1} - \sqrt{n^2 + n + 1} \right).$

Λύση:

- (1) Πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με τη συζυγή παράσταση έχουμε $\sqrt{n^2 + 3n} - n = \frac{3n}{\sqrt{n^2 + 3n} + n} = \frac{3}{\sqrt{1 + 3/n} + 1} \rightarrow \frac{3}{2}.$
- (2) Ομοίως, $n \left(\sqrt{n^2 + 1} - n \right) = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/n^2} + 1} \rightarrow \frac{1}{2}.$
- (3) Η διαφορά ισούται με

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & \frac{3n}{\sqrt{n^2 + 4n + 1} + \sqrt{n^2 + n + 1}} \\
 &= \frac{3}{\sqrt{1 + 4/n + 1/n^2} + \sqrt{1 + 1/n + 1/n^2}} \rightarrow \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

11. Για καθεμία από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν υπάρχει όριο στο $\overline{\mathbb{R}}$ και, αν υπάρχει, βρείτε το.

- (1) $a_n = \frac{2n + (-1)^n}{n + 1}.$
- (2) $b_n = \frac{(-1)^n n}{n + 1}.$
- (3) $c_n = n(1 + (-1)^n).$

Λύση:

- (1) Έχουμε $a_n - 2 = \frac{(-1)^n - 2}{n + 1}$, άρα $|a_n - 2| \leq \frac{3}{n + 1} \rightarrow 0$. Επομένως $a_n \rightarrow 2$.
- (2) Οι άρτιοι όροι τείνουν στο 1 και οι περιττοί στο -1 . Άρα η ακολουθία δεν έχει όριο, ούτε πεπερασμένο ούτε άπειρο.
- (3) $c_{2k} = 4k \rightarrow +\infty$ ενώ $c_{2k-1} = 0$. Άρα ούτε αυτή η ακολουθία έχει όριο στο $\overline{\mathbb{R}}$.

12. Βρείτε ακολουθίες x_n, y_n με $x_n \rightarrow +\infty$ και $y_n \rightarrow +\infty$ ώστε:

- (1) $x_n - y_n \rightarrow L$, όπου $L \in \mathbb{R}$ είναι δοσμένος.
- (2) $x_n - y_n \rightarrow +\infty$.
- (3) $x_n - y_n \rightarrow -\infty$.
- (4) Η $x_n - y_n$ να μην έχει όριο στο $\overline{\mathbb{R}}$.

Τι συμπεραίνετε για έναν υπολογισμό ορίου στον οποίο εμφανίζεται η παράσταση « $+\infty - (+\infty)$ »;

Λύση: Μπορούμε να πάρουμε αντίστοιχα:

- (1) $x_n = n + L, y_n = n.$
- (2) $x_n = 2n, y_n = n.$
- (3) $x_n = n, y_n = 2n.$
- (4) $x_n = n + (-1)^n, y_n = n.$

Και στις τέσσερις περιπτώσεις οι δύο ακολουθίες τείνουν στο $+\infty$, αλλά οι διαφορές τους συμπεριφέρονται διαφορετικά. Επομένως η παράσταση « $+\infty - (+\infty)$ » δεν προσδιορίζει κανένα όριο και δεν μπορεί να αντιμετωπιστεί ως αφαίρεση πραγματικών αριθμών.

13. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του γεωμετρικού αθροίσματος (Άσκηση 5), υπολογίστε τα όρια των ακολουθιών

$$(1) \ s_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{3^k}.$$

$$(2) \ t_n = \frac{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n}{2^n}.$$

$$(3) \ u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2^k}.$$

Λύση:

$$(1) \text{ Εφαρμόζουμε τον τύπο με λόγο } -1/3: s_n = \frac{1 - (-1/3)^{n+1}}{1 + 1/3} \rightarrow \frac{3}{4}.$$

$$(2) \text{ Έχουμε } t_n = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n} = 2 - 2^{-n} \rightarrow 2.$$

(3) Βγάζουμε κοινό παράγοντα το 2^{-n} και παίρνουμε

$$(5) \quad u_n = 2^{-n} \sum_{j=0}^n 2^{-j} = 2^{1-n} (1 - 2^{-(n+1)}) \rightarrow 0.$$

14. Έστω $0 < a < 1$. Αποδείξτε ότι $na^n \rightarrow 0$.

 Διאלέξτε r με $a < r < 1$ και εξετάστε το πηλίκο δύο διαδοχικών όρων της ακολουθίας $b_n = na^n$.

Λύση: Έχουμε $b_n > 0$ και $b_{n+1}/b_n = a(1+1/n) \rightarrow a$. Επιλέγουμε r με $a < r < 1$. Υπάρχει λοιπόν N τέτοιο ώστε $b_{n+1} \leq rb_n$ για κάθε $n \geq N$. Με επαγωγή ως προς $k \geq 0$ παίρνουμε $0 < b_{N+k} \leq b_N r^k$. Αφού $r^k \rightarrow 0$, από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $b_{N+k} \rightarrow 0$, δηλ. $na^n \rightarrow 0$.

15. Έστω $m \geq 2$ ένας σταθερός φυσικός αριθμός. Υποθέτουμε ότι, για καθένα από τα $r = 0, 1, \dots, m-1$, η υπακολουθία a_{mn+r} συγκλίνει στο ίδιο $L \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $a_n \rightarrow L$. Είναι ουσιώδες να είναι το όριο το ίδιο για όλα τα r ;

Λύση: Έστω πρώτα $L \in \mathbb{R}$ και $\epsilon > 0$. Για κάθε r υπάρχει $N_r \geq 1$ τέτοιο ώστε $k \geq N_r \implies |a_{mk+r} - L| < \epsilon$. Θέτουμε $N = \max\{N_0, \dots, N_{m-1}\}$. Αν $n \geq mN$, η διαίρεση με υπόλοιπο δίνει $n = mk + r$ με $0 \leq r < m$ και $k \geq N$. Επομένως $|a_n - L| < \epsilon$. Για $L = +\infty$ εφαρμόζουμε το ίδιο επιχείρημα στη συνθήκη $a_{mk+r} > M$, για κάθε δοσμένο $M \in \mathbb{R}$. Για $L = -\infty$ χρησιμοποιούμε τη συνθήκη $a_{mk+r} < M$. Το κοινό όριο είναι ουσιώδες: για παράδειγμα, αν $a_n = 0$ όταν το n διαιρείται με το m και $a_n = 1$ αλλιώς, οι υπακολουθίες αυτές είναι σταθερές αλλά η αρχική ακολουθία δεν συγκλίνει.

16.

- (1) Αν η a_n δεν είναι άνω φραγμένη, δείξτε ότι έχει υπακολουθία που τείνει στο $+\infty$.
- (2) Αν η a_n δεν είναι φραγμένη, δείξτε ότι έχει υπακολουθία που τείνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$.
- (3) Αν η a_n έχει υπακολουθία που τείνει στο $+\infty$, πρέπει και η ίδια να τείνει στο $+\infty$;

Λύση:

- (1) Κάθε ουρά (τελικό κομμάτι) της a_n είναι επίσης μη άνω φραγμένη: διαφορετικά, συνδυάζοντας ένα άνω φράγμα της ουράς με το μέγιστο των πεπερασμένων προηγούμενων όρων, θα βρίσκαμε άνω φράγμα για όλη την ακολουθία. Επιλέγουμε λοιπόν διαδοχικά $n_1 < n_2 < \dots$ με $a_{n_k} > k$. Τότε $a_{n_k} \rightarrow +\infty$.
- (2) Αν η a_n δεν είναι φραγμένη, δεν είναι άνω φραγμένη ή δεν είναι κάτω φραγμένη. Στην πρώτη περίπτωση εφαρμόζουμε το (1), ενώ στη δεύτερη το εφαρμόζουμε στην $-a_n$.
- (3) Όχι. Αν $a_n = n$ για άρτιο n και $a_n = 0$ για περιττό n , τότε $a_{2k} \rightarrow +\infty$, αλλά η a_n δεν τείνει στο $+\infty$.