

Απειροστικός Λογισμός Ι - Φθινόπωρο 2026-27- Φυλλάδιο
Ασκήσεων [1] - Μιχάλης Κολουντζάκης

Οι ασκήσεις αυτές είναι για να λυθούν από εσάς τους ίδιους. Προσπαθήστε να λύσετε όσο γίνεται περισσότερες πριν έρθετε στα εργαστήρια της Παρασκευής όπου θα σας παρέχεται βοήθεια για τη λύση όσων από αυτές δεν έχετε καταφέρει να λύσετε.

Προσπαθείτε να γράφετε κάτω τα επιχειρήματά σας με τρόπο ώστε να φαίνεται καθαρά ποια πρόταση επικαλείστε κάθε φορά και πώς προκύπτει το κάθε τι το οποίο ισχυρίζεστε.

Φέρτε αυτό το Φυλλάδιο μαζί σας στο εργαστήριο.

Τελευταία ενημέρωση: **28 Σεπτεμβρίου 2026**

1. Αν $p(x), q(x)$ είναι πολυώνυμα υπολογίστε το όριο της ακολουθίας $a_n = \frac{p(n)}{q(n)}$ και δείξτε ότι αυτό εξαρτάται μόνο από τους βαθμούς $\deg p, \deg q$ των πολυωνύμων p, q και από τους συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων τους.

 Διαιρέστε αριθμητή και παρανομαστή στην $a_n = \frac{p(n)}{q(n)}$ με n^k όπου $k = \deg q$.

2. Ποιο είναι το λάθος στον παρακάτω υπολογισμό

$$1 = \lim 1 = \lim n \frac{1}{n} = \lim \left(\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_n \right) = \underbrace{\lim \frac{1}{n} + \lim \frac{1}{n} + \dots}_n$$

3. (α) Βρείτε ακολουθίες x_n, y_n που να μην έχουν όριο αλλά με την $x_n + y_n$ να έχει όριο.

(β) Βρείτε ακολουθίες x_n, y_n που να μην έχουν όριο αλλά με την $x_n \cdot y_n$ να έχει όριο.

4. Υπολογίστε το όριο $\lim_n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

 Πολλαπλασιάστε και διαιρέστε με τη συζυγή παράσταση $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$.

5. Αν $a \neq 1$ και $n \in \mathbb{N}$ δείξτε ότι

$$1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

6. (α) Αν $|a| < 1$ δείξτε ότι $a^n \rightarrow 0$.

(β) Αν $|a| < 1$ δείξτε ότι

$$\lim_n 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n = \frac{1}{1-a}.$$



Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 5.

7. Αν η υπακολουθία περιττών δεικτών της a_n

$$x_n = a_{2n+1}$$

και η υπακολουθία αρτίων δεικτών της a_n

$$y_n = a_{2n}$$

συγκλίνουν και οι δύο στο ίδιο όριο $L \in \overline{\mathbb{R}}$ δείξτε ότι και η a_n συγκλίνει στο L .

8. Ας ονομάσουμε μια υπακολουθία της a_n ουσιώδη υπακολουθία αν υπάρχουν άπειροι όροι της a_n που δεν περιέχονται σε αυτήν. Δείξτε ότι αν κάθε ουσιώδης υπακολουθία της a_n συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό (δεν υποθέτουμε ότι ο αριθμός αυτός είναι ο ίδιος για όλες τις ουσιώδεις υπακολουθίες) τότε η a_n συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.



Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την Άσκηση 7.

9. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας διαιρώντας αριθμητή και παρανομαστή με κατάλληλη δύναμη του n .

$$(1) \lim_n \frac{4n^3 - n + 2}{2n^3 + 5n^2 + 1}.$$

$$(2) \lim_n \frac{3n^2 + 1}{n^4 + 2n}.$$

$$(3) \lim_n \frac{-2n^4 + n}{n^2 + 3}.$$

10. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια, χρησιμοποιώντας συζυγείς παραστάσεις.

$$(1) \lim_n \left(\sqrt{n^2 + 3n} - n \right).$$

$$(2) \lim_n n \left(\sqrt{n^2 + 1} - n \right).$$

$$(3) \lim_n \left(\sqrt{n^2 + 4n + 1} - \sqrt{n^2 + n + 1} \right).$$

11. Για καθεμία από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν υπάρχει όριο στο $\overline{\mathbb{R}}$ και, αν υπάρχει, βρείτε το.

$$(1) a_n = \frac{2n + (-1)^n}{n + 1}.$$

$$(2) b_n = \frac{(-1)^n n}{n + 1}.$$

$$(3) c_n = n(1 + (-1)^n).$$

12. Βρείτε ακολουθίες x_n, y_n με $x_n \rightarrow +\infty$ και $y_n \rightarrow +\infty$ ώστε:

- (1) $x_n - y_n \rightarrow L$, όπου $L \in \mathbb{R}$ είναι δοσμένος.
- (2) $x_n - y_n \rightarrow +\infty$.
- (3) $x_n - y_n \rightarrow -\infty$.
- (4) Η $x_n - y_n$ να μην έχει όριο στο $\overline{\mathbb{R}}$.

Τι συμπεραίνετε για έναν υπολογισμό ορίου στον οποίο εμφανίζεται η παράσταση « $+\infty - (+\infty)$ »;

13. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του γεωμετρικού αθροίσματος (Άσκηση 5), υπολογίστε τα όρια των ακολουθιών

$$(1) s_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{3^k}.$$

$$(2) t_n = \frac{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n}{2^n}.$$

$$(3) u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2^k}.$$

14. Έστω $0 < a < 1$. Αποδείξτε ότι $na^n \rightarrow 0$.



Διαλέξτε r με $a < r < 1$ και εξετάστε το πηλίκο δύο διαδοχικών όρων της ακολουθίας $b_n = na^n$.

15. Έστω $m \geq 2$ ένας σταθερός φυσικός αριθμός. Υποθέτουμε ότι, για καθένα από τα $r = 0, 1, \dots, m-1$, η υπακολουθία a_{mn+r} συγκλίνει στο ίδιο $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Αποδείξτε ότι $a_n \rightarrow L$. Είναι ουσιώδες να είναι το όριο το ίδιο για όλα τα r ;

16.

- (1) Αν η a_n δεν είναι άνω φραγμένη, δείξτε ότι έχει υπακολουθία που τείνει στο $+\infty$.
- (2) Αν η a_n δεν είναι φραγμένη, δείξτε ότι έχει υπακολουθία που τείνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$.
- (3) Αν η a_n έχει υπακολουθία που τείνει στο $+\infty$, πρέπει και η ίδια να τείνει στο $+\infty$;