

Απειροστικός Λογισμός Ι - Φθινόπωρο 2026-27- Φυλλάδιο
Ασκήσεων **1** - Μιχάλης Κολουντζάκης

Λύσεις των ασκήσεων

1. Αν $x_n \rightarrow x \in \mathbb{R}$ και $y_n \rightarrow y \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι η ακολουθία $s_n = x_n + y_n$ τείνει στο $x + y$.

Λύση: Ας είναι $\delta > 0$. Θα βρούμε ένα δείκτη n_0 τ.ώ. αν $n \geq n_0$ να ισχύει $|s_n - (x + y)| < \delta$.

Εφαρμόζουμε τον ορισμό του ορίου για τις συγκλίσεις $x_n \rightarrow x$ και $y_n \rightarrow y$. Χρησιμοποιούμε ως ϵ στον ορισμό αυτό το $\delta/2$. Από τη σύγκλιση $x_n \rightarrow x$ υπάρχει κάποιος δείκτης n_1 τ.ώ. να ισχύει

$$(1) \quad n \geq n_1 \implies |x_n - x| < \delta/2.$$

Ομοίως από τη σύγκλιση $y_n \rightarrow y$ υπάρχει ένας δείκτης n_2 (δεν είναι αναγκαστικά ίδιος με τον n_1 αφού ο δείκτης που βρίσκουμε για ένα δεδομένο ϵ δεν εξαρτάται μόνο από το ϵ αλλά και από την ακολουθία) τ.ώ. να ισχύει

$$(2) \quad n \geq n_2 \implies |y_n - y| < \delta/2.$$

Ορίζουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Τώρα ισχύει

$$(3) \quad n \geq n_0 \implies (|x_n - x| < \delta/2 \text{ και } |y_n - y| < \delta/2).$$

Από την τριγωνική ανισότητα ($|a + b| \leq |a| + |b|$) όμως ισχύει

$$(4) \quad |s_n - (x + y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \delta/2 + \delta/2 = \delta \text{ αν } n \geq n_0,$$

που είναι αυτό που θέλαμε να δείξουμε.

2. Ποιες από τις παρακάτω ακολουθίες είναι μονότονες;

(1) $a_n =$ το πλήθος των διαιρετών του φυσικού αριθμού n

(2) $b_n =$ πόσοι πρώτοι αριθμοί είναι $\leq n$

(3) $c_n =$ με πόσους τρόπους μπορεί να γραφτεί ο n ως $n = k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_r^2$ όπου

$$(5) \quad r \geq 1 \text{ και } 1 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_r.$$

Με άλλα λόγια, το c_n μετράει με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να γράψουμε το n ως άθροισμα κάποιων τετραγώνων φυσικών αριθμών, όπου τους προσθετούς τους γράφουμε πάντα σε αύξουσα σειρά.

Λύση:

- (1) Υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί (φυσικοί αριθμοί που έχουν μόνο 2 διαιρέτες, τον εαυτό τους και το 1), άρα $a_n = 2$ για άπειρα n . Όμως η a_n επίσης παίρνει άπειρες φορές την τιμή 3, αφού αν p είναι ένας πρώτος αριθμός τότε το πλήθος των διαιρετών του p^2 είναι 3 (είναι οι $1, p, p^2$).

Μια ακολουθία που παίρνει άπειρες φορές τις τιμές 2 και 3 δε μπορεί να είναι τελικά φθίνουσα αφού μετά από κάθε 2 υπάρχει κάπου ένα 3 ούτε μπορεί να είναι τελικά αύξουσα αφού μετά από κάθε 3 υπάρχει κάπου ένα 2.

- (2) Η b_n είναι αύξουσα αφού $b_n \leq b_{n+1}$ για κάθε n . Ο λόγος είναι ότι κάθε πρώτος που είναι $\leq n$ είναι και $\leq n+1$, άρα οι πρώτοι που συνεισφέρουν στο b_n συνεισφέρουν και στο b_{n+1} .
- (3) Η c_n είναι αύξουσα αφού $c_n \leq c_{n+1}$. Αυτό ισχύει γιατί σε κάθε τρόπο που έχουμε να γράψουμε

$$(6) \quad n = k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_r^2$$

αντιστοιχεί ένας διαφορετικός τρόπος να γράψουμε με παρόμοιο τρόπο το $n+1$. Αυτός ο τρόπος είναι ο

$$(7) \quad n+1 = 1^2 + k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_r^2.$$

Παρατηρούμε ότι οι ακέραιοι $1, k_1, k_2, \dots, k_r$ είναι διατεταγμένοι σε αύξουσα σειρά, άρα ικανοποιείται η συνθήκη (5) στην εκφώνηση της άσκησης.

3. Εξηγήστε γιατί δεν έχει νόημα να λέμε ότι μια ακολουθία είναι «τελικά φραγμένη». Με άλλα λόγια, γιατί μια ακολουθία που είναι τελικά φραγμένη (ορίστε το πρώτα) είναι αναγκαστικά φραγμένη.

Λύση: Λέμε ότι μια ακολουθία έχει μια ιδιότητα «τελικά» αν έχει αυτή την ιδιότητα αφού αγνοήσουμε τους όρους της μέχρι κάποιο δείκτη. (Με άλλα λόγια αν έχει αυτή την ιδιότητα αφού πετάξουμε ένα πεπερασμένο αρχικό κομμάτι της.) Άρα το να είναι τελικά φραγμένη η a_n δε μπορεί παρά να σημαίνει ότι υπάρχει πραγματικό M και φυσικός αριθμός k τέτοια ώστε

$$(8) \quad n \geq k \implies |a_n| \leq M.$$

Πάρτε τότε

$$(9) \quad M_1 = \max \{M, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_{k-1}|\}.$$

Τότε για κάθε n έχουμε $|a_n| \leq M_1$, δηλ. η a_n είναι φραγμένη.

4.

- (1) Αποδείξτε ότι το άθροισμα δύο άνω φραγμένων ακολουθιών είναι άνω φραγμένο. (Ομοίως για κάτω φραγμένες και για φραγμένες.)
 - (2) Αποδείξτε ότι το άθροισμα δύο ακολουθιών που είναι τελικά αύξουσες (φθίνουσες) είναι τελικά αύξουσα (φθίνουσα).
-

Λύση:

- (1) Αν $a_n \leq M_1$ και $b_n \leq M_2$ τότε $a_n + b_n \leq M_1 + M_2$ οπότε το $M_1 + M_2$ είναι ένα άνω φράγμα για την ακολουθία $a_n + b_n$. Ομοίως για τα άλλα ερωτήματα.
 - (2) Υποθέτουμε ότι $a_n \leq a_{n+1}$ αν $n \geq n_1$ και $b_n \leq b_{n+1}$ αν $n \geq n_2$. Ορίζουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ και παρατηρούμε ότι αν $n \geq n_0$ τότε ισχύει $a_n \leq a_{n+1}$ και $b_n \leq b_{n+1}$. Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες ανισότητες παίρνουμε
- $$(10) \quad a_n + b_n \leq a_{n+1} + b_{n+1} \text{ για } n \geq n_0,$$
- δηλ. η ακολουθία $a_n + b_n$ είναι τελικά αύξουσα. Ομοίως για φθίνουσα.
-

5. Αποδείξτε ότι $x_n \rightarrow +\infty$ αν και μόνο αν κάθε πραγματικός αριθμός M είναι τελικά κάτω φράγμα της x_n .¹

Λύση: Ας υποθέσουμε αρχικά ότι $x_n \rightarrow +\infty$ και ας είναι $M \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε

$$(11) \quad n \geq n_0 \implies x_n \geq M.$$

Όμως αυτό είναι ακριβώς το τι σημαίνει $x_n \rightarrow +\infty$, οπότε ισχύει.

Αντίστροφα, αν κάθε $M \in \mathbb{R}$ είναι τελικά κάτω φράγμα της x_n τότε, αυτό σημαίνει, για κάθε $M \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε

$$(12) \quad n \geq n_0 \implies x_n \geq M,$$

το οποίο συνεπάγεται ότι $x_n \rightarrow +\infty$ όπως θέλαμε να δείξουμε.

¹Ενώ δεν έχει νόημα, όπως λέμε στην άσκηση 3 παραπάνω, να πούμε ότι μια ακολουθία «είναι τελικά κάτω φραγμένη» έχει νόημα να πούμε ότι «ο αριθμός M είναι τελικά κάτω φράγμα» μιας ακολουθίας. Αυτό σημαίνει απλά ότι αν αγνοήσουμε ένα αρχικό κομμάτι της ακολουθίας τότε όλοι οι υπόλοιποι όροι είναι $\geq M$.

6. Ο ορισμός του ορίου $x_n \rightarrow L \in \mathbb{R}$ είναι ο

$$(13) \quad \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : (n \geq n_0 \implies |x_n - L| < \epsilon).$$

Εξηγήστε γιατί ο ορισμός δεν αλλάζει αν η τελευταία γνήσια ανισότητα « $< \epsilon$ » γίνει « $\leq \epsilon$ ».

Λύση: Αν ισχύει, για κάποια ακολουθία x_n και για κάποιο $L \in \mathbb{R}$, ο ορισμός με την αυστηρή ανισότητα τότε φυσικά ισχύει και ο δεύτερος ορισμός, αφού η αυστηρή ανισότητα συνεπάγεται την «μικρότερη ή ίση».

Απομένει να δείξουμε ότι αν ισχύει ο δεύτερος ορισμός (που τον ξαναγράφουμε εδώ με το γράμμα δ στη θέση του ϵ , όπως έχουμε κάθε δικαίωμα να κάνουμε)

$$(14) \quad \forall \delta > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : (n \geq n_0 \implies |x_n - L| \leq \delta).$$

τότε ισχύει και ο πρώτος ορισμός.

Ας είναι λοιπόν $\epsilon > 0$. Επιλέγουμε στο δεύτερο ορισμό (που υποθέτουμε ότι ισχύει) $\delta = \epsilon/2$ (ή οποιοδήποτε άλλο $\delta < \epsilon$). Από το δεύτερο ορισμό παίρνουμε ότι υπάρχει n_0 τ.ώ. $n \geq n_0 \implies |x_n - L| \leq \epsilon/2 < \epsilon$ όπως έπρεπε να δείξουμε. Άρα ισχύει και ο πρώτος ορισμός.

7. Αποδείξτε, χρησιμοποιώντας τον ορισμό, ότι $a_n = n^2 - 10n \rightarrow +\infty$.

Λύση: Ορίζουμε $x_n = \frac{1}{2}n^2$.

Θα δείξουμε πρώτα ότι $a_n \geq x_n$ τελικά, δηλ. για n μεγαλύτερο από κάποιο δείκτη, ας τον πούμε n_1 . Η ανισότητα $n^2 - 10n \geq \frac{1}{2}n^2$ εύκολα λύνεται ως προς n και βρίσκουμε ότι ισχύει αν $n \geq n_1 = 20$.

Έστω τώρα $M > 0$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ώ.

$$(15) \quad n \geq n_0 \implies a_n \geq M.$$

Αρκεί, υποθέτοντας εξ αρχής ότι το n_0 που θα βρούμε θα είναι $\geq n_1 = 20$, να δείξουμε ότι

$$(16) \quad n \geq n_0 \implies x_n = \frac{1}{2}n^2 \geq M.$$

Λύνοντας την τελευταία ανισότητα ως προς n βρίσκουμε $n \geq \sqrt{2M}$. Αρκεί συνεπώς να θέσουμε

$$(17) \quad n_0 = \max \left\{ 20, \left\lceil \sqrt{2M} \right\rceil \right\}.$$

8. Αν $a_n \in \mathbb{Z}$ και $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι η a_n είναι τελικά σταθερή και ίση με a (άρα $a \in \mathbb{Z}$).

Λύση: Εφαρμόζουμε τον ορισμό του ορίου με $\epsilon = 1/10$. Άρα υπάρχει φυσικός αριθμός n_0 τέτοιος ώστε για $n \geq n_0$ να ισχύει

$$(18) \quad |a_n - a| < \frac{1}{10}.$$

Αυτό σημαίνει ότι ο πραγματικός αριθμός a απέχει το πολύ $1/10$ από τον ακέραιο αριθμό a_n για κάθε $n \geq n_0$. Αν όμως οι αριθμοί $a_n, n \geq n_0$ μπορούν να πάρουν δύο διαφορετικές τιμές $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ αυτό είναι αδύνατο. (Δεν είναι δυνατό να απέχει ένα σημείο a το πολύ $1/10$ από δύο διαφορετικούς ακέραιους.) Άρα όλες οι τιμές $a_n, n \geq n_0$, είναι ίδιες, η ακολουθία μας είναι τελικά σταθερή και ίση με a .

9. Αποδείξτε ότι μια ακολουθία δεν μπορεί να έχει δύο διαφορετικά πραγματικά όρια. Δηλ. αν $a_n \rightarrow a$ και $a_n \rightarrow b$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$, τότε $a = b$.

Λύση: Αν $a \neq b$, θέτουμε $\epsilon = |a - b|/3 > 0$. Από τις δύο συγκλίσεις υπάρχει κοινός δείκτης n_0 τέτοιος ώστε, για $n \geq n_0$, να ισχύουν $|a_n - a| < \epsilon$ και $|a_n - b| < \epsilon$. Η τριγωνική ανισότητα δίνει $|a - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < 2|a - b|/3$, άτοπο.

10. Έστω ότι οι ακολουθίες a_n, b_n διαφέρουν σε πεπερασμένο μόνο πλήθος όρων.

- (1) Δείξτε ότι $a_n \rightarrow L \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν $b_n \rightarrow L$.
- (2) Δείξτε ότι η a_n είναι φραγμένη αν και μόνο αν η b_n είναι φραγμένη.
- (3) Αν η a_n είναι αύξουσα, είναι αναγκαστικά και η b_n αύξουσα; Είναι τελικά αύξουσα;

Λύση: Υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_n = b_n$ για κάθε $n \geq N$.

- (1) Αν ένας δείκτης n_1 εξασφαλίζει $|a_n - L| < \epsilon$ για $n \geq n_1$, ο δείκτης $\max\{N, n_1\}$ εξασφαλίζει το ίδιο για τη b_n . Το αντίστροφο αποδεικνύεται με εναλλαγή των δύο ακολουθιών.
- (2) Ένα φράγμα για τη μία ακολουθία είναι τελικό φράγμα για την άλλη.
- (3) Όχι αναγκαστικά: πάρτε $a_n = n$, $b_1 = 100$ και $b_n = n$ για $n \geq 2$. Πάντως η b_n είναι τελικά αύξουσα, αφού $b_n = a_n \leq a_{n+1} = b_{n+1}$ για $n \geq N$.

11. Για καθεμία από τις παρακάτω ακολουθίες, $n \geq 1$, εξετάστε αν είναι αύξουσα, φθίνουσα ή ούτε το ένα ούτε το άλλο, και αν είναι άνω ή κάτω φραγμένη. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

- (1) $a_n = \frac{n}{n+1}$.
- (2) $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$.
- (3) $c_n = n + (-1)^n$.
- (4) $d_n = \frac{\lfloor n/2 \rfloor}{n}$.

Λύση:

- (1) $a_{n+1} - a_n = 1/((n+1)(n+2)) > 0$. Είναι γνήσια αύξουσα και $1/2 \leq a_n < 1$.
- (2) Δεν είναι μονότονη: $b_1 = -1 < b_2 = 1/2$ ενώ $b_2 > b_3 = -1/3$. Είναι φραγμένη, αφού $|b_n| \leq 1$.
- (3) $c_1 = 0 < c_2 = 3$ αλλά $c_2 > c_3 = 2$, άρα δεν είναι μονότονη. Είναι κάτω φραγμένη από το 0, αλλά όχι άνω φραγμένη αφού $c_n \geq n - 1$.
- (4) $d_{2k} = 1/2$ και $d_{2k-1} = (k-1)/(2k-1) < 1/2$. Δεν είναι μονότονη, αφού $d_1 = 0 < d_2 = 1/2 > d_3 = 1/3$. Είναι φραγμένη: $0 \leq d_n \leq 1/2$.

12.

- (1) Αν οι a_n, b_n είναι μη αρνητικές και αύξουσες, δείξτε ότι η $a_n b_n$ είναι αύξουσα.
- (2) Ισχύει το ίδιο χωρίς την υπόθεση ότι οι όροι είναι μη αρνητικοί;
- (3) Αν η $a_n + b_n$ είναι αύξουσα, πρέπει τουλάχιστον μία από τις a_n, b_n να είναι τελικά αύξουσα;

Λύση:

- (1) Έχουμε $a_n b_n \leq a_{n+1} b_n \leq a_{n+1} b_{n+1}$. Τα πρόσημα είναι απαραίτητα για τις δύο αυτές ανισότητες.
- (2) Όχι. Πάρτε $a_n = b_n = -1/n$. Είναι γνήσια αύξουσες, αλλά το γινόμενο $1/n^2$ είναι γνήσια φθίνον.
- (3) Όχι. Πάρτε $a_n = (-1)^n$ και $b_n = -(-1)^n$. Το άθροισμα είναι σταθερό, άρα αύξον με τη μη γνήσια έννοια, αλλά καμία από τις δύο ακολουθίες δεν είναι τελικά αύξουσα.

13.

- (1) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας που δεν είναι άνω φραγμένη αλλά δεν τείνει στο $+\infty$.
 - (2) Δείξτε ότι, αν μια αύξουσα ακολουθία δεν είναι άνω φραγμένη, τότε τείνει στο $+\infty$.
 - (3) Διατυπώστε και αποδείξτε την αντίστοιχη πρόταση για φθίνουσες ακολουθίες και το $-\infty$.
-

Λύση:

- (1) Πάρτε $a_n = n$ για άρτιο n και $a_n = 0$ για περιττό n . Δεν είναι άνω φραγμένη, αλλά το 1 δεν είναι τελικά κάτω φράγμα της.
 - (2) Για κάθε $M \in \mathbb{R}$ υπάρχει n_0 με $a_{n_0} > M$, αφού δεν υπάρχει άνω φράγμα. Από τη μονοτονία, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $a_n \geq a_{n_0} > M$.
 - (3) Αν η a_n είναι φθίνουσα και όχι κάτω φραγμένη, τότε $a_n \rightarrow -\infty$. Πράγματι, για κάθε $M \in \mathbb{R}$ υπάρχει n_0 με $a_{n_0} < M$, και για $n \geq n_0$ έχουμε $a_n \leq a_{n_0} < M$.
-

14. Έστω $a_n > 0$ για κάθε n . Αποδείξτε ότι $a_n \rightarrow +\infty$ αν και μόνο αν $1/a_n \rightarrow 0$. Ισχύει η συνεπαγωγή από δεξιά προς τα αριστερά αν υποθέσουμε μόνο ότι $a_n \neq 0$ αντί για $a_n > 0$;

Λύση: Αν $a_n \rightarrow +\infty$, για δοσμένο $\epsilon > 0$ έχουμε τελικά $a_n > 1/\epsilon$, άρα $0 < 1/a_n < \epsilon$. Αντίστροφα, έστω $1/a_n \rightarrow 0$. Για κάθε $M > 0$ έχουμε τελικά $0 < 1/a_n < 1/M$, άρα $a_n > M$. Για $M \leq 0$ η τελευταία ανισότητα ισχύει ήδη για κάθε n από τη θετικότητα. Χωρίς τη θετικότητα η συνεπαγωγή δεν ισχύει: για $a_n = -n$ έχουμε $1/a_n \rightarrow 0$ αλλά $a_n \rightarrow -\infty$.

15. Αποδείξτε ότι $a_n \rightarrow L \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν $a_{2n} \rightarrow L$ και $a_{2n-1} \rightarrow L$. Αν οι ακολουθίες των άρτιων και των περιττών όρων συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια, μπορεί η a_n να συγκλίνει;

Λύση: Αν $a_n \rightarrow L$, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει N ώστε $|a_n - L| < \epsilon$ για $n \geq N$. Για $k \geq N$ και οι δύο δείκτες $2k, 2k-1$ είναι $\geq N$, οπότε οι δύο ακολουθίες τείνουν στο L . Αντίστροφα, έστω ότι υπάρχουν K_1, K_2 ώστε $|a_{2k} - L| < \epsilon$ για $k \geq K_1$ και $|a_{2k-1} - L| < \epsilon$ για $k \geq K_2$. Θέτουμε $K = \max\{K_1, K_2\}$. Κάθε $n \geq 2K$ είναι της μορφής $2k$ ή $2k-1$ με $k \geq K$, άρα $|a_n - L| < \epsilon$. Αν τα δύο όρια διαφέρουν, η a_n δεν μπορεί να συγκλίνει: το

πρώτο μέρος και η μοναδικότητα του ορίου θα έδιναν ότι είναι ίσα.