Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως αντιγραφή.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Δεύτερο Διαγώνισμα – 23 Νοεμβρίου 2026 *** Διάρκεια 2 ώρες
Όνομα, Επώνυμο, ΑΜ:

Οι απαντήσεις να είναι πλήρως αιτιολογημένες.

---

1. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη παντού και η παράγωγος f' είναι συνεχής παντού, δείξτε ότι υπάρχει ένας αριθμός $M > 0$ τέτοιος ώστε για κάθε $x, y \in [0, 1]$ να ισχύει $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$.

Λύση: Η συνεχής συνάρτηση $|f'|$ παίρνει μέγιστη τιμή στο συμπαγές διάστημα $[0, 1]$. Θέτουμε $M = 1 + \max_{t\in[0,1]} |f'(t)| > 0$. Αν $x \neq y$, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει ξ ανάμεσα στα x, y τέτοιο ώστε $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$. Άρα $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$. Για $x = y$ η ανισότητα είναι προφανής.

2. Αν $a \in \mathbb{R}$ βρείτε, με πλήρη αιτιολόγηση, το όριο

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax} - 1 - ax}{1 - \cos x}.$$

Λύση: Για κάθε $a \in \mathbb{R}$, ο αριθμητής και ο παρονομαστής τείνουν στο 0. Εφαρμόζουμε δύο φορές τον κανόνα του L'Hôpital: μετά την πρώτη παραγώγιση προκύπτει πάλι απροσδιόριστη μορφή $0/0$, ενώ μετά τη δεύτερη το όριο υπάρχει. Συγκεκριμένα,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax} - 1 - ax}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{ae^{ax} - a}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{a^2 e^{ax}}{\cos x} = a^2. \tag{1}$$

Οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες και οι παράγωγοι των παρονομαστών, $\sin x$ και $\cos x$ αντίστοιχα, δεν μηδενίζονται σε αρκετά μικρή διάτρητη περιοχή του 0, οπότε οι εφαρμογές του κανόνα δικαιολογούνται.

3. Για $x \geq 0$ δείξτε ότι $1 - \dfrac{x^2}{2} \leq \cos x$.

Λύση: Θέτουμε $F(x) = \cos x - 1 + x^2/2$. Έχουμε $F'(x) = -\sin x + x$ και $F''(x) = 1 - \cos x \geq 0$. Επομένως η F' είναι αύξουσα και, αφού $F'(0) = 0$, ισχύει $F'(x) \geq 0$ για $x \geq 0$. Άρα και η F είναι αύξουσα στο $[0, +\infty)$, οπότε $F(x) \geq F(0) = 0$, που είναι η ζητούμενη ανισότητα.

4. Ένας ηλεκτρονικός αισθητήρας μετρά τη θερμοκρασία ενός υγρού μέσω μιας αντίστασης. Η θερμοκρασία T καθορίζει την αντίσταση R, και η αντίσταση καθορίζει την τάση εξόδου U. Οι συναρτήσεις αυτές είναι παραγωγίσιμες, αλλά οι τύποι τους δεν είναι γνωστοί.

Τη χρονική στιγμή t_0 γνωρίζουμε ότι:

- Η θερμοκρασία είναι $40°\text{C}$ και αυξάνεται με ρυθμό $4°\text{C/min}$.
- Στους $40°\text{C}$, η αντίσταση είναι $120\,\Omega$ και η παράγωγός της ως προς τη θερμοκρασία είναι $0.5\,\Omega/°\text{C}$.

- Όταν η αντίσταση είναι $120\,\Omega$, η παράγωγος της τάσης εξόδου ως προς την αντίσταση είναι $-0.2\,\mathrm{V}/\Omega$.

Με ποιον ρυθμό μεταβάλλεται η τάση εξόδου τη στιγμή t_0;

Λύση: Η θερμοκρασία εξαρτάται από τον χρόνο, η αντίσταση από τη θερμοκρασία και η τάση από την αντίσταση. Γράφουμε λοιπόν $T = T(t)$, $R = r(T)$ και $U = u(R)$, οπότε η τάση ως συνάρτηση του χρόνου είναι $U(t) = u(r(T(t)))$. Από τον κανόνα της αλυσίδας,

$$U'(t_0) = u'(r(T(t_0)))\, r'(T(t_0))\, T'(t_0) = (-0.2) \cdot 0.5 \cdot 4 = -0.4\,\mathrm{V/min}. \tag{2}$$

Συνεπώς η τάση εξόδου μειώνεται με ρυθμό $0.4\,\mathrm{V/min}$.

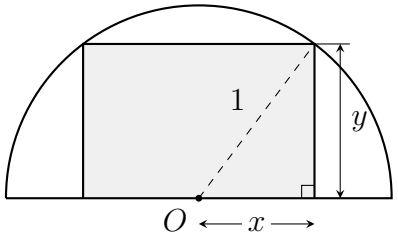
5. Ένα σωματίδιο κινείται πάνω στην καμπύλη $x^2 + xy + y^2 = 7$.
Τη στιγμή που περνά από το σημείο $(1, 2)$, η συντεταγμένη x αυξάνεται με ρυθμό 3 m/sec. Με ποιον ρυθμό μεταβάλλεται εκείνη τη στιγμή η συντεταγμένη y;

Λύση: Οι συντεταγμένες $x = x(t)$ και $y = y(t)$ εξαρτώνται από τον χρόνο. Παραγωγίζοντας τη σχέση της καμπύλης ως προς t, με τον κανόνα του γινομένου στον όρο xy, παίρνουμε

$$2xx' + x'y + xy' + 2yy' = 0, \qquad (2x + y)x' + (x + 2y)y' = 0. \tag{3}$$

Στο σημείο $(1, 2)$, με $x' = 3$, προκύπτει $4 \cdot 3 + 5y' = 0$, άρα $y' = -12/5\,\mathrm{m/sec}$. Επομένως η συντεταγμένη y μειώνεται με ρυθμό $12/5\,\mathrm{m/sec}$.

6. Ένα ορθογώνιο είναι εγγεγραμμένο σε ημικύκλιο ακτίνας 1: η μία πλευρά του βρίσκεται πάνω στη διάμετρο και οι δύο απέναντι κορυφές του πάνω στο ημικύκλιο. Ποιο πρέπει να είναι το ύψος του ορθογωνίου y ώστε να έχει το μέγιστο εμβαδό;



Λύση: Όπως στο σχήμα, έστω x το μισό της βάσης. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα, $x^2 + y^2 = 1$, άρα $x = \sqrt{1 - y^2}$. Το εμβαδό είναι $A(y) = 2y\sqrt{1 - y^2}$, με $0 < y < 1$. Επειδή το εμβαδό είναι θετικό και η συνάρτηση $t \mapsto t^2$ είναι γνησίως αύξουσα για $t \geq 0$, αρκεί να μεγιστοποιήσουμε το τετράγωνό του. Θέτουμε $B(y) = A(y)^2 = 4y^2(1 - y^2)$. Παραγωγίζοντας,

$$B'(y) = 8y - 16y^3 = 8y(1 - 2y^2). \tag{4}$$

Η παράγωγος είναι θετική για $0 < y < 1/\sqrt{2}$ και αρνητική για $1/\sqrt{2} < y < 1$. Άρα η B, και επομένως και το εμβαδό A, έχει μοναδικό μέγιστο στο $y = 1/\sqrt{2}$. Τότε η βάση είναι $\sqrt{2}$ και το μέγιστο εμβαδό είναι 1.