BULLETIN OF THE
GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 53, 2007 (29–38)

Sur les multiplicateurs d'une algèbre à poids $L^p_\Omega(\mathbb{R}^n)$

R. Choukri, A. El Kinani and A. Oukhouya

Received 07/10/2006 Accepted 27/03/2007

Abstract

We consider the algebra $L^p_\Omega(\mathbb{R}^n)$, where

$$p \in \left]1, +\infty\right[\text{ and } \Omega = \left\{ \left(1 + \|x\|^2\right)^s : s \in \mathbb{N} \cap \left] \frac{n(p-1)}{2}, +\infty \right[\right\}$$

is a family of weights. We prove that a bounded linear operator on $L^p_\Omega(\mathbb{R}^n)$ is a multiplier if and only if it commutes with the translation operators. We also show that multipliers for $L^p_\Omega(\mathbb{R}^n)$ are exactely convolution operators.

1991 *Mathematics subject classification*: 46H20. 46C50.
Mots-clés: Algèbre localement m-convexe, poids, fonction p-ième integrable, produit de convolution, multiplicateur

1. Préliminaires et introduction

Une algèbre localement multiplicativement convexe ($a.l.m.c.$ en abrégé) est une algèbre localement convexe (E, τ) dont la topologie τ est définie par une famille $(|.|_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de semi-normes sous-multiplicatives ([1], [9] et [10]). Pour $\lambda \in \Lambda$, on désigne par $E_\lambda = E/Ker\,|.|_\lambda$, où $Ker\,|.|_\lambda = \{x \in E : |x|_\lambda = 0\}$, l'algèbre quotient de E par $Ker\,|.|_\lambda$ et $\pi_\lambda : E \longrightarrow E/Ker\,|.|_\lambda$ la surjection canonique. Pour $x \in E$, la classe $\pi_\lambda(x)$ de x sera notée x_λ. On munit E_λ de la norme $\|.\|_\lambda$ définie par $\|x_\lambda\|_\lambda = |x|_\lambda$. Soit $\widehat{E_\lambda}$ l'algèbre complétée de $(E_\lambda\, \|.\|_\lambda)$. Dans toute la suite, la norme de l'algèbre $\widehat{E_\lambda}$ sera encore notée $\|.\|_\lambda$. Si $\left(E, (|.|_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}\right)$ est séparée, alors E est isomorphe à une sous-algèbre du produit $\prod_{\lambda \in \Lambda} \widehat{E_\lambda}$. Si E est séparée et complète, alors E est algèbriquement et topologiquement isomorphe à la limite projective d'algèbres de Banach $\widehat{E_\lambda}$.

Pour $1 < p < +\infty$, les espaces de Banach $L^p(\mathbb{R}^n)$ ne sont pas des algèbres pour le produit ordinaire. Deux fonctions complexes f et g mesurables, sur $\mathbb{R}^n$, sont dites "convolables" si la fonction $y \longmapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable pour presque tout x; dans ce cas, on peut définir presque partout

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

La fonction $f*g$ est dite le produit de convolution de f et g. Les espaces $\left(L^p(\mathbb{R}^n), \|.\|_p\right)$, $1 < p < +\infty$, ne sont pas aussi des algèbres pour le produit de convolution. Dans toute la suite, nous ne ferons pas de différence entre deux fonctions égales presque partout. Un poids sur $\mathbb{R}^n$ est une fonction ω positive, mesurable et localement intégrable sur $\mathbb{R}^n$. Pour $1 < p < +\infty$, posons

$$\omega_s(x) = \left(1 + \|x\|^2\right)^s, \text{ pour } s > \frac{n(p-1)}{2}$$

et

$$\Omega = \{\omega_s : s \in \Lambda_{n,p}\}, \text{ où } \Lambda_{n,p} = \mathbb{N} \cap \left]\frac{n(p-1)}{2}, +\infty\right[.$$

On définit les espaces fonctionnels suivants:

$$L_s^p(\mathbb{R}^n) = \left\{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C} : f \text{ mesurable et } |f|^p \omega_s \in L^1(\mathbb{R}^n)\right\}$$

et

$$L_\Omega^p(\mathbb{R}^n) = \left\{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C} : f \text{ mesurable et } |f|^p \omega \in L^1(\mathbb{R}^n), \text{ pour tout } \omega \in \Omega\right\}.$$

L' espace $L_s^p(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach pour la norme $|.|_s$ donnée par

$$|f|_s = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega_s(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ pour tout } f \in L_s^p(\mathbb{R}^n)$$

et son dual s'identifie à l'espace $L_{s'}^q(\mathbb{R}^n)$, où $s' = -\frac{q}{p}s$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dans toute la suite, nous considérons le produit de convolution dans l'espace $L_\Omega^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in]1, +\infty[$. Comme la fonction $x \longmapsto \omega_s^{\frac{1}{1-p}}(x) = \left(1 + \|x\|^2\right)^{\frac{s}{1-p}}$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^n)$ vu que $s > \frac{n(p-1)}{2}$, on voit que $L_\Omega^p(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$. De plus, pour tout $s > \frac{n(p-1)}{2}$, on a

$$\|f\|_1 \leq A_s |f|_s, \text{ pour tout } f \in L_s^p(\mathbb{R}^n) \tag{1}$$

où

$$A_\mathbf{s} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \omega_s^{-\frac{q}{p}}(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Par ailleurs, par la proposition 2.1 de [3], on a

$$\omega_s^{\frac{1}{1-p}} * \omega_s^{\frac{1}{1-p}}(x) \leq c_s \omega_s^{\frac{1}{1-p}}(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n,$$

où

$$c_s = 2^{1+\frac{2s}{1-p}} \int_{\mathbb{R}^n} \omega_s^{\frac{1}{1-p}}(y)dy < \infty.$$

Ainsi, par la proposition 2.1 de [6], l'espace $\left(L_\Omega^p(\mathbb{R}^n), (|.|_s)_s\right)$ est une *a.l.m.c.* métrisable complète. Pour $\lambda \in \mathbb{R}^n$, l'application $e_\lambda : x \longmapsto e^{-2\pi i\lambda x}$ est dans $L_{s'}^q(\mathbb{R}^n)$, pour tout

$s > \frac{n(p-1)}{2}$. Ceci nous amène à considérer, pour $f \in L_{\Omega}^{p}(\mathbb{R}^{n})$, la transformation de Fourier de f, notée $\hat{f}$, définie par

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-2\pi ixy}dy, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

Pour la cotransformation de Fourier de f, elle sera notée $\overline{\mathcal{F}}f$ i.e.,

$$\overline{\mathcal{F}}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{2\pi ixy}dy, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

On désignera par $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions complexes continues sur $\mathbb{R}^n$ à support compact et $M(\mathbb{R}^n)$ l'espace de Banach des mesures complexes de Borel régulières et bornées sur $\mathbb{R}^n$ muni de la norme

$$\|\mu\| = |\mu|(\mathbb{R}^n), \text{ pour tout } \mu \in M(\mathbb{R}^n),$$

où $|\mu|$ est la variation totale de μ. Pour $a \in \mathbb{R}^n$, on note par τ_a l'opérateur de translation défini par $(\tau_a f)(t) = f(t-a)$. L'espace $L_{\Omega}^{p}(\mathbb{R}^{n})$ est stable par τ_a, $a \in \mathbb{R}^n$. En effet soit $f \in L_{s}^{p}(\mathbb{R}^{n})$ avec $s > \frac{n(p-1)}{2}$. Alors

$$|\tau_a f|_s^p = \int_{\mathbb{R}^n} |(\tau_a f)(x)|^p \,\omega_s(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p \,\omega_s(y+a)dy.$$

Par ailleurs, on a

$$\left(1 + \|y+a\|^2\right) \leq \left(1 + \|y\|^2\right)(1 + \|a\|)^2.$$

En effet, cette dérnière inégalité est vraie pour $a = 0$. Pour $a \neq 0$, elle résulte de

$$2\|y\| \leq 2\|y\|^2 + 2 + \|y\|^2\|a\|, \text{ pour } a \neq 0.$$

Ainsi

$$|\tau_a f|_s \leq (1 + \|a\|)^{\frac{2s}{p}} |f|_s, \text{ pour tout } f \in L_s^p(\mathbb{R}^n).$$

On désigne par $\mathcal{L}(L_{\Omega}^{p}(\mathbb{R}^{n}))$ l'espace vectoriel complexe des endomorphismes de $L_{\Omega}^{p}(\mathbb{R}^{n})$. Un multiplicateur de l'algèbre $L_{\Omega}^{p}(\mathbb{R}^{n})$ est un opérateur $T \in \mathcal{L}(L_{\Omega}^{p}(\mathbb{R}^{n}))$ tel que

$$T(f * g) = T(f) * g, \text{ pour tous } f, g \in L_{\Omega}^{p}(\mathbb{R}^{n}).$$

Soit G un groupe localement compact muni d'une mesure de Haar à droite dm. Dans [13], J. G. Wendel a initié l'étude des multiplicateurs à gauche de l'algèbre convolutive $\left(L^1(G,dm), \|.\|_1\right)$, où

$$\|f\|_1 = \int_G |f(x)|\, dm(x), \text{ pour tout } f \in L^1(G,dm).$$

Il a montré (Theorem 1, [13]) que si T est un multiplicateur à gauche sur $L^1(G,dm)$, alors il existe une mesure régulière unique μ à variation bornée telle que

$$T(f) = f * \mu, \text{ pour tout } f \in L^1(G,dm) \text{ et } \|T\| = \|\mu\|.$$

Dans ce papier, nous montrons (Proposition 2.2) que si $T \in \mathcal{L}(L^p_\Omega(\mathbb{R}^n))$ est un multiplicateur de $L^p_\Omega(\mathbb{R}^n)$, alors T est un opérateur de convolution (à droite) i.e., il existe $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$Tf = f * \mu, \text{ pour tout } f \in L^p_\Omega(\mathbb{R}^n).$$

Nous montrons ensuite (Théorème 2.3) qu'un opérateur de convolution (à droite) est en fait un multiplicateur de $L^p_\Omega(\mathbb{R}^n)$. De plus, nous prouvons (Théorème 2.3) qu'il y a équivalence entre cette dérnière proprtiété est le fait que T est un opérateur qui commute avec les translations.

2. Multiplicateurs de $L^p_\Omega(\mathbb{R}^n)$

Soit $T \in \mathcal{L}(L^p_\Omega(\mathbb{R}^n))$. Pour $s \in \Lambda_{n,p}$, posons

$$\|T\|_s = \sup\{|T(f)|_s : |f|_s \leq 1\}$$

et

$$\mathcal{L}_s(L^p_\Omega(\mathbb{R}^n)) = \{T \in \mathcal{L}(L^p_\Omega(\mathbb{R}^n)) : \ \|T\|_s < +\infty\}.$$

Comme $(L^p_\Omega(\mathbb{R}^n), |.|_s)$ est un espace de Banach, l'expression $T \longmapsto \|T\|_s$ définie une norme d'algèbre de Banach sur $\mathcal{L}_s(L^p_\Omega(\mathbb{R}^n))$. On définit l'espace suivant:

$$\mathcal{L}_\Omega(L^p_\Omega(\mathbb{R}^n)) = \{T \in \mathcal{L}(L^p_\Omega(\mathbb{R}^n)) : \|T\|_s < +\infty, \text{ pour tout } s \in \Lambda_{n,p}\}.$$

$\mathcal{L}_\Omega(L^p_\Omega(\mathbb{R}^n))$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(L^p_\Omega(\mathbb{R}^n))$. Comme, pour tout $s \in \Lambda_{n,p}$, on a

$$\|T \circ S\|_s \leq \|T\|_s \|S\|_s, \text{ pour tous } T, S \in \mathcal{L}_\Omega(L^p_\Omega(\mathbb{R}^n)),$$

l'espace $\left(\mathcal{L}_\Omega(L^p_\Omega(\mathbb{R}^n)), (|.|_s)_s\right)$ est une *a.l.m.c.* De plus, par le Théorème 1.1 de [11], l'agèbre $\left(\mathcal{L}_\Omega(L^p_\Omega(\mathbb{R}^n)), (|.|_s)_s\right)$ est complète et l'on a

$$\mathcal{L}_\Omega(L^p_\Omega(\mathbb{R}^n)) = \varinjlim_s \mathcal{L}_s(L^p_\Omega(\mathbb{R}^n)) = \bigcap_s \mathcal{L}_s(L^p_\Omega(\mathbb{R}^n)).$$

Soit $T \in \mathcal{L}_\Omega(L^p_\Omega(\mathbb{R}^n))$ un multiplicateur de $L^p_\Omega(\mathbb{R}^n)$. Comme $L^p_\Omega(\mathbb{R}^n)$ est commutative, on a

$$T(f) * g = f * T(g), \text{ pour tous } f, g \in L^p_\Omega(\mathbb{R}^n).$$

D'où

$$\widehat{T(f)}\hat{g} = \hat{f}\widehat{T(g)}, \text{ pour tous } f, g \in L^p_\Omega(\mathbb{R}^n). \tag{2}$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}^n$, on choisit $g \in L^p_\Omega(\mathbb{R}^n)$ telle que $\hat{g}(\lambda) \neq 0$ et on pose

$$\varphi(\lambda) = \frac{\widehat{T(g)}(\lambda)}{\hat{g}(\lambda)}.$$

Par **(2),** on voit que φ est indépendante du choix de g. De plus, on a

$$\widehat{(Tf)} = \varphi \hat{f}, \text{ pour tout } f \in L^p_\Omega(\mathbb{R}^n).$$

Soit maintenant ψ une autre fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\widehat{(Tf)} = \psi \hat{f}, \text{ pour tout } f \in L^p_\Omega(\mathbb{R}^n).$$

Alors

$$(\varphi - \psi)\hat{f} = 0, \text{ pour tout } f \in L^p_\Omega(\mathbb{R}^n).$$

Par ailleurs, par la proposition 2.2 de [4], pour $\lambda \in \mathbb{R}^n$, il existe $f \in L^p_\Omega(\mathbb{R}^n)$ telle que $\hat{f}(\lambda) \neq 0$. Il s'ensuit que $\varphi = \psi$. Ainsi si $T \in \mathcal{L}_\Omega(L^p_\Omega(\mathbb{R}^n))$ est un multiplicateur de $L^p_\Omega(\mathbb{R}^n)$, alors il existe une fonction unique φ définie sur $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\widehat{(Tf)} = \varphi \hat{f}, \text{ pour tout } f \in L^p_\Omega(\mathbb{R}^n). \tag{3}$$

De plus, la fonction φ satisfait la relation suivante:

Proposition 2.1 *Soit $T \in \mathcal{L}_\Omega(L^p_\Omega(\mathbb{R}^n))$ un multiplicateur de $L^p_\Omega(\mathbb{R}^n)$ et φ la fonction vérifiant **(3).** Alors il existe $M > 0$*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} F(t)\varphi(t)dt \right| \leq M \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} F(t)e^{-2\pi itx}dt \right|, \text{ pour tout } F \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. Par hypothèse, on a

$$\varphi\hat{f} \in L^p_\Omega(\mathbb{R}^n)^\wedge, \text{ pour tout } f \in L^p_\Omega(\mathbb{R}^n),$$

où

$$L^p_\Omega(\mathbb{R}^n)^\wedge = \left\{ \hat{h} : \ h \in L^p_\Omega(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

Soit U un ouvert relativemant compact de $\mathbb{R}^n$. Soit φ_0 une fonction indéfiniment dérivable, sur $\mathbb{R}^n$, à support compact, égale à 1 sur U et $0 \leq \varphi_0 \leq 1$. Posons $f = \overline{\mathcal{F}}(\varphi_0)$. Alors $f \in L^p_\Omega(\mathbb{R}^n)$ par le théorème de Paley-Wiener. De plus $\hat{f}$ est égale à 1 sur U. Il s'ensuit que $\varphi = \varphi\hat{f}$ sur U. Comme $\varphi\hat{f}$ est continue, la fonction φ est alors continue. Pour tout $s \in \Lambda_{n,p}$, posons

$$\left|\hat{f}\right|'_s = |f|_s, \text{ pour tout } f \in L^p_\Omega(\mathbb{R}^n). \tag{4}$$

Cette dérnière égalité est bien définie vue que l'application L'espace $f \longmapsto \hat{f}$ est injective. L'espace $\left(L_\Omega^p(\mathbb{R}^n)^\wedge, \left(|.|_s'\right)_s\right)$ devient alors une *a.l.m.c.* métrisable complète et l'application

$$S(\hat{f}) = \varphi \hat{f}, \text{ pour tout } f \in L_\Omega^p(\mathbb{R}^n)$$

est linéaire de $L_\Omega^p(\mathbb{R}^n)^\wedge$ dans $L_\Omega^p(\mathbb{R}^n)^\wedge$. Soient f_n, $f \in L_\Omega^p(\mathbb{R}^n)$ tels que

$$\lim_n \hat{f}_n = \hat{f} \text{ et } \lim_n \varphi \hat{f}_n = \hat{g} \text{ dans } \left(L_\Omega^p(\mathbb{R}^n)^\wedge, \left(|.|_s'\right)_s\right).$$

Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\hat{g}(\lambda) = \lim_n \varphi(\lambda)\hat{f}_n(\lambda) = \varphi(\lambda)\lim_n \hat{f}_n(\lambda) = \varphi(\lambda)\hat{f}(\lambda).$$

D'où S est à graphe fermé. Elle est alors continue. Ainsi, pour tout $s_1 \in \Lambda_{n,p}$, il existe $s_2 \in \Lambda_{n,p}$ et $K > 0$ tel que

$$\left|\varphi \hat{f}\right|_{s_1}' = \left|S(\hat{f})\right|_{s_1}' \leq K \left|\hat{f}\right|_{s_2}', \text{ pour tout } f \in L_\Omega^p(\mathbb{R}^n). \tag{5}$$

Soient $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$. Soit $f_0 \in L_\Omega^p(\mathbb{R}^n)$, $f_0 \neq 0$, telle que $Supp\overline{\mathcal{F}}(f_0)$ est compact. Une telle fonction existe (prendre $f_0 \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)^\wedge$). Ensuite, quitte à remplacer f_0 par αf_0, où $0 < \alpha \leq \frac{1+\varepsilon}{\left|\overline{\mathcal{F}} f_0\right|_{s_2}}$, on peut supposer que $\left|\overline{\mathcal{F}} f_0\right|_{s_2} \leq 1+\varepsilon$. Soit maintenant $f_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction égale à f_0 sauf en des points $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ et $f_1(\lambda_i) = 1$, pour $i = 1, ..., m$. Comme $f_1 = f_0$ presque partout, on a $f_1 \in L_\Omega^p(\mathbb{R}^n)$, $\left|\overline{\mathcal{F}} f_1\right|_{s_2} \leq 1+\varepsilon$ et $f_1(\lambda_i) = 1$, pour $i = 1, ..., m$. Posons $f = \overline{\mathcal{F}} f_1$. Alors $f \in L_\Omega^p(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\left|\hat{f}\right|_{s_2}' = |f|_{s_2} \leq 1+\varepsilon \text{ et } \hat{f}(\lambda_i) = 1, \text{ pour } i = 1, 2, ..., m.$$

Soit $c_1, c_2, ..., c_m \in \mathbb{C}$ et $\hat{g} = \varphi \hat{f}$. Alors

$$\left|\sum_{i=1}^m c_i \varphi(\lambda_i)\right| = \left|\sum_{i=1}^m c_i \hat{g}(\lambda_i)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{i=1}^m c_i e^{-2\pi i \lambda_i t}\right) g(t) dt\right|.$$

Posons $h(t) = \sum_{i=1}^m c_i e^{-2\pi i \lambda_i t}$. On a alors

$$\left|\sum_{i=1}^m c_i \varphi(\lambda_i)\right| \leq \|g\|_1 \|h\|_\infty.$$

En tenant compte de **(1)**, **(4)**, **(5)** et du fait que $\hat{g} = \varphi \hat{f}$, on obtient

$$\|g\|_1 \leq A_{s_1} |g|_{s_1} = A_{s_1} \left|\varphi \hat{f}\right|_{s_1}' \leq A_{s_1} K |f|_{s_2} \leq A_{s_1} K(1+\varepsilon).$$

D'où

$$\left|\sum_{i=1}^{m} c_i\varphi(\lambda_i)\right| \leq M(1+\varepsilon)\left\|h\right\|_\infty, \text{ où } M = A_{s_1}K.$$

Comme ε est arbitraire, il s'ensuit que, pour $\lambda_1,\ \lambda_2, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}^n$ et $c_1, c_2, ..., c_m \in \mathbb{C}$, on a

$$\left|\sum_{i=1}^{m} c_i\varphi(\lambda_i)\right| \leq M\left\|h\right\|_\infty.$$

Ainsi, pour tout $F \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} F(t)\varphi(t)dt\right| \leq M \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n} F(t)e^{-2\pi itx}dt\right|.$$

Proposition 2.2 *Soit $T \in \mathcal{L}_\Omega\left(L^p_\Omega\left(\mathbb{R}^n\right)\right)$ un multiplicateur de $L^p_\Omega\left(\mathbb{R}^n\right)$. Alors il existe une mesure $\mu \in M\left(\mathbb{R}^n\right)$ telle que*

$$Tf = f*\mu, \textit{ pour tout } f \in L^p_\Omega\left(\mathbb{R}^n\right).$$

Preuve. Considérons l'application linéaire $L : L^p_\Omega\left(\mathbb{R}^n\right) \longrightarrow C$ définie par

$$L(F) = \int_{\mathbb{R}^n} F(t)\varphi(t)dt, \text{ pour tout } F \in L^p_\Omega\left(\mathbb{R}^n\right).$$

Alors, par la propostion 2.1, on a

$$|L(F)| \leq K\left\|\hat{F}\right\|_\infty, \text{ pour tout } F \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n).$$

Soit maintenant $\Phi : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)^\wedge \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\Phi(\hat{f}) = L(f), \text{ pour tout } f \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n),$$

où

$$\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)^\wedge = \left\{\hat{f} :\ f \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)\right\}.$$

Alors Φ est bien définie. De plus, elle est linéaire et on a

$$\left|\Phi(\hat{f})\right| \leq K\left\|\hat{f}\right\|_\infty, \text{ pour tout } f \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n).$$

Par le théorème de Hahn-Banach, elle se prolonge à l'algèbre $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^n)$ des fonctions continues qui s'annullent à l'infini sur $\mathbb{R}^n$ en une forme linéaire continue Φ_0. Par le théorème de représentation de Riesz, il existe une mesure complexe bornée de Radon μ sur $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\|\mu\| = \|\Phi\| = \|\Phi_0\|$$

et

$$\Phi_0(\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(m) d\mu(m), \text{ pour tout } \psi \in \mathbb{C}_0(\mathbb{R}^n).$$

En particulier, pour tout $F \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$L(F) = \Phi(\hat{F}) = \Phi_0(\hat{F}) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{F}(m) d\mu(m).$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(t)\varphi(t)dt = \int_{\mathbb{R}^n} d\mu(m) \int_{\mathbb{R}^n} F(t)e^{-2\pi itm}dt, \text{ pour tout } F \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$$

Il s'ensuit que

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi itm} d\mu(m), \text{ presque partout pour tout } t \in \mathbb{R}^n.$$

Ainsi,

$$\varphi = \overset{\wedge}{\mu}.$$

Et par **(2)**, on a

$$Tf = f * \mu, \text{ pour tout } f \in L^p_\Omega(\mathbb{R}^n).$$

Théorème 2.3. *Pour $T \in \mathcal{L}_\Omega(L^p_\Omega(\mathbb{R}^n))$, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1) *T commute avec les translations i.e., $T\tau_a = \tau_a T$, pour tout $a \in \mathbb{R}^n$.*

2) *T est un multiplicateur de $L^p_\Omega(\mathbb{R}^n)$.*

3) *T est un opérateur de convolution (à droite) i.e., il existe une mesure $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$ telle que*

$$Tf = f * \mu, \text{ pour tout } f \in L^p_\Omega(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. 1)$\Longrightarrow$2) Supposons que $T\tau_a = \tau_a T$, pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ et que, pour tout $s \in \Lambda_{n,p}$, on a

$$|T(f)|_s \leq \|T\|_s |f|_s, \text{ pour tout } f \in L^p_\Omega(\mathbb{R}^n).$$

Soient $s \in \Lambda_{n,p}$ fixé et $k \in L^q_{s'}(\mathbb{R}^n)$, où $s' = -\frac{q}{p}s$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors l'application

$$f \longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} Tf(t)k(t)dt$$

est une forme linéaire bornée sur $L^p_s(\mathbb{R}^n)$. En effet, pour tout $f \in L^p_s(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} Tf(t)k(t)dt \right| \leq \|Tf\|_s \|k\|_{s'} \leq \|T\|_s |k|_{s'} |f|_s.$$

Il existe alors $h \in L^q_{s'}(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} Tf(t)k(t)dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)h(t)dt, \text{ pour tout } f \in L^p_s(\mathbb{R}^n).$$

Soient $f, g \in L^p_\Omega(\mathbb{R}^n)$. Alors $f, g \in L^p_s(\mathbb{R}^n)$ et on vérifie facilement que on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} Tf * g(t)k(t)dt = \int_{\mathbb{R}^n} T(f * g)(t)k(t)dt$$

et ceci, pour tout $k \in L^q_{s'}(\mathbb{R}^n)$. Par le théorème de Hahn-Banach, on obtient

$$Tf * g = T(f * g), \text{ pour tous } f, g \in L^p_s(\mathbb{R}^n);$$

et donc

$$Tf * g = T(f * g), \text{ pour tous } f, g \in L^p_\Omega(\mathbb{R}^n).$$

2)$\Longrightarrow$3) résulte de la proposition 2.2. Pour finir, montrons l'implication
3)$\Longrightarrow$1). Supposons qu'il existe une mesure $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$Tf = f * \mu, \text{ pour tout } f \in L^p_\Omega(\mathbb{R}^n).$$

Alors, pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, on a

$$(T\tau_a)f) = (\tau_a f) * \mu = \tau_a(f * \mu) = (\tau_a T)(f).$$

D'où

$$T\tau_a = \tau_a T, \text{ pour tout } a \in \mathbb{R}^n.$$

Remerciements. Les auteurs remercient vivement les arbitres pour leurs pertinantes remarques et suggestions qui ont bien permi l'amélioration de la première version de ce travail.

Références

[1] R. Arens, Dense inverse limit rings, Michigan Math. J. 5 (1958), 169-182.

[2] A. El Kinani, Algèbres de Sobolev et structure m-convexe, Le Matematiche, Vol LVII (2002)-Fasc.II, pp. 175-183.

[3] A. El Kinani, Algèbres de Sobolev généralisées, Rend. Circ. Mat. Palermo, Série II. Tomo LIV(2005), pp. 319-328.

[4] A. El Kinani, Régularité d'une algèbre m-convexe à poids, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 13 (2006), no. 1, 159-166.

[5] A. El Kinani, Sur les idéaux d'une algèbre de Beurling généralisée. Le Matematiche, Vol. 61, (A paraître).

[6] A. El Kinani et A. Benazzouz, Structure m-convexe dans l'espace à poids $L^p_\Omega(\mathbb{R}^n)$. Bull. Belg. Math. Soc. 10 (2003), pp. 49-57.

[7] E. Hewitt K.A. Ross, Abstract Harmonic Analysis. Vol. I, Second edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 115. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979.

[8] E. Hewitt K.A. Ross, Abstract harmonic analysis. Vol. II, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 152 Springer-Verlag, New York-Berlin 1970.

[9] A. Mallios, Topological algebras. Selected topics, North Holland. 1986.

[10] E. A. Michael, Locally multiplicatively-convex topological algebras, Mem. Amer. Math. Soc. 11(1952).

[11] Y. Tsertos, On the locally m-convex algebra $L_\Gamma(E)$ and a differential-geometric interpretation of it. Portugaliae Math. V. 54 Fasc. 2-1997, pp. 127-137.

[12] J. G. Wendel, On isomorphism of group algebras. Pacific. J. Math. 1 (1951), 305-311.

[13] J. G. Wendel, Left centralizers and isomorphisms of group algebras. Pacific. J. Math. 2 (1952), 251-261.

◇ R. Choukri
Ecole Normale Supérieure,
B.P. 5118, Takaddoum,
10105 Rabat, Morocco
rachoukri@yahoo.fr

◇ A. El Kinani
Ecole Normale Supérieure,
B.P. 5118, Takaddoum,
10105 Rabat, Morocco
abdellah_elkinani@yahoo.fr

◇ A. Oukhouya
Ecole Normale Supérieure
Marrakech, Morocco
aoukhouya@hotmail.com