BULLETIN OF THE
GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 53, 2007 (15–22)

Les hypergroupes et H_v-groupes d'ordre 3

R. Bayon and N. Lygeros

Received 06/03/2005 Accepted 29/11/2007

Abstract

In this paper, we first present results connecting posets and Vougiouklis's P-hypergroups through the fundamental notion of automorphism group. Then we exploit propositions on the nature of Marty's hypergroups and the H_v-groups of Vougiouklis, in order to obtain their partition, enumeration and classification. Thus, we establish at least that there exist 3999 two by two non isomorphic hypergroups of order 3, 20 and 1026462 Hv-groups of order respectively 2 and 3, and 6494 minimal H_v-groups of order 3.

Résumé

Dans cet article, nous présentons tout d'abord des résultats qui mettent en relation les posets et les P-hypergroupes de Th. Vougiouklis via la notion fondamentale de groupe d'automorphismes. Ensuite nous exploitons des propositions sur la nature des hypergroupes de F. Marty et les H_v-groupes de Th. Vougiouklis afin de les partitionner, énumérer et classifier. Enfin nous obtenons ainsi, à isomorphie près, 3999 hypergroupes d'ordre 3, respectivement 20 et 1026462 H_v-groupes d'ordre 2 et 3, ainsi que 6494 H_v-groupes minimaux d'ordre 3.

1. Définitions

F. Marty a créé en 1934 la notion d'hypergroupe [18, 19].

Définition 1.1 (F. Marty [17]) $< H, . >$ *est un hypergroupe si* $(.) : H \times H \to p(H)$ *est une hyperopération associative pour laquelle l'axiome de reproduction hH=Hh=H est valide pour tout h de H.*

Définition 1.2 (Th. Vougiouklis [23]) *Soit* $G =< G, * >$ *un groupe et* $P \subset G, P \neq \emptyset$*; alors* $G_P =< G, *^P >$ *est un P-hypergroupe s'il est muni de l'hyperopération suivante :* $*^P : (x, y) \to x * P * y$

Cette classe a été étudiée par M. De Salvo [**?**] avec une restriction sur la longueur et la commutativité et de manière plus étendue par Th. Vougiouklis et en particulier pour 3 éléments avec S. Spartalis [26].

Une hyperopération est faiblement associative si pour tout $x, y, z \in H$, $x(yz) \cap (xy)z \neq \emptyset$.

Définition 1.3 (Th. Vougiouklis [24]) *$< H, . >$ est un H_v-groupe si $(.) : H \times H \to p(H)$ est une hyperopération faiblement associative pour laquelle l'axiome de reproduction hH=Hh=H est valide pour tout h de H.*

2. Posets, groupes et hypergroupes

Définition 2.1 *Un poset (partially ordered set) $P = (P, \leq)$ est un ensemble P muni d'un ordre partiel $\leq$.*
C. Chaunier et N. Lygeros ainsi que R. Fraïssé et N. Lygeros se sont attachés à l'énumération des posets [12, 6, 7, 8]. Ces travaux ont été repris pour l'énumération des modèles mixtes [3, 4].

G. Birkhoff [5] a mis en relations les posets et les groupes de taille finie. Par la suite C. Chaunier et N. Lygeros [9] précisent les liens entre le nombre n de sommets d'un poset et l'ordre a de son groupe d'automorphismes, en donnant la valeur minimale de n et la structure explicite du poset minimal lorsque a est fixé et premier. Ces résultats améliorent ceux de G. Birkhoff. En 1996, N. Lygeros et M. Mizony [16] ont amélioré la valeur donnée par G. Birkhoff pour une classe plus vaste de groupes finis et de manière constructive.

Ces relations entre posets et groupes peuvent être transposées aux P-hypergroupes.

Théorème 2.2 *Un poset P_0 peut être associé à chaque P-hypergroupe.*

Théorème 2.3 *Un poset P_0 de cardinal $a^2 + a$ peut être associé à tout P-hypergroupe $< G, P* >$ avec G de cardinal a.*

Théorème 2.4 *Soit a un nombre premier, $< G, P* >$ un P-hypergroupe et G un groupe de cardinal $a = 2$ ou $3, 5, 7$ ou 11 et plus, alors il y a un poset P_0 associé de cardinal respectivement a ou 3a ou 2a dont le groupe d'automorphismes est d'ordre a.*

Théorème 2.5 *Soit $< G, P* >$ un P-hypergroupe et G un groupe fini de cardinal a, non produit direct de deux groupes, engendré par des éléments d'ordres deux à deux distincts, alors il existe un poset dont le groupe d'automorphismes est isomorphe à G et dont le cardinal est égal à 3a.*

3. Cyclicité et Projectivité

Définition 3.1 (H.S. Wall [28]) *Un hypergroupe $< H, . >$ est cyclique de période finie par rapport à un élément h de H s'il existe un entier v tel que $H = h^1 \cup h^2 \cup \cdots \cup h^v$.*

Définition 3.2 *Un élément x de $< H, . >$ est projectif si et seulement si $xx = x$. $< H, . >$ est dit projectif si tous ses éléments sont projectifs.*

Théorème 3.3 *Le plus petit hypergroupe non-commutatif et non-cyclique est d'ordre 3.*

Proposition 3.4 *Si H est un hypergroupe de longueur 1 et un de ses éléments vérifie la propriété projective alors H est un groupe.*

Proposition 3.5 *Si H est un hypergroupe de longueur 1 alors il a un élément projectif.*

Théorème 3.6 (F. Marty) *Un hypergroupe de longueur 1 est un groupe.*
La combinaison des propositions 3 et 3 permet de démontrer de manière élémentaire le théorème de F. Marty. Ainsi nous voyons que la propriété projective peut jouer un rôle important dans l'obtention de résultats sur les hypergroupes.

4. Enumération d'hypergroupes

4.1. Hypergroupes d'ordre 2

Nous retrouvons les résultats de Th. Vougiouklis avec des étapes intermédiaires différentes. Plus précisément, il existe 81 hypergroupes potentiels, 35 candidats vérifient l'axiome de reproduction et 30 sont associatifs. Finalement il existe 14 hypergroupes d'ordre 2 auxquels il est nécessaire d'appliquer un test d'isomorphie.

Théorème 4.1 (Th. Vougiouklis [22]) *Il existe 8 hypergroupes d'ordre 2 non isomorphes deux à deux.*

Définition 4.2 [Th. Vougiouklis [25]] *Soit $< H, . >$ et $< H, * >$ deux hypergroupes. Nous disons que (.) est inférieure ou égale à $(*)$, et le notons $\leq$, si et seulement s'il existe $f \in Aut(G, *)$ tel que $xy \subseteq f(x * y)$ pour tout x, y de G.*

Remarque 1 Cette définition fut initialement utilisée dans les H_v-groupes.
Nous pouvons ainsi définir le poset des hypergroupes (cf. figure 1) [15].

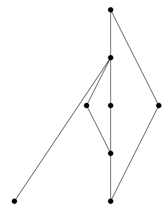

Figure 1: Diagramme de Hasse du poset des hypergroupes d'ordre 2

4.2. **Hypergroupes d'ordre 3**

Il existe à l'ordre 3, 40353607 hypergroupes potentiels, 10323979 candidats vérifient l'axiome de reproduction et 28111 sont associatifs. Il existe enfin 23192 hypergroupes d'ordre 3 auxquels il est nécessaire d'appliquer un test d'isomorphie. Nous retrouvons donc les résulats de R. Migliorato [20] et de G. Nordo [21] sur les hypergroupes d'ordre 3.

Théorème 4.3 (G. Nordo [21]) *Il existe 3999 hypergroupes d'ordre 3 non isomorphes deux à deux.*
Nous précisons ce résultat dans le tableau 1.

		Classes					
		Abéliens			non Abéliens		
		Cycliques	non Cycliques		Cycliques	non Cycliques	
			Proj.	non Proj.		Proj.	non Proj.
Ordre du groupe d'automorphismes	1	4	2	-	-	-	-
	2	3	-	-	6	1	-
	3	70	3	5	154	8	4
	6	360	2	17	3279	20	61

Table 1: Classification des hypergroupes d'ordre 3

Nous nous sommes aussi intéressés à des catégories plus spécifiques d'hypergroupes [2, 14, 1].

5. **Enumération de H_v-groupes**

Pour les H_v-groupes l'associativité est affaiblie ce qui conduit à une explosion combinatoire du nombre de candidats [13].

5.1. H_v**-groupes d'ordre 2**

Théorème 5.1 *Il existe, à isomorphie près, 20 H_v-groupes d'ordre 2 (cf. tableau 2).*

H_v-groupes	$\|Aut(H_v)\|$	H_v-groupes	$\|Aut(H_v)\|$
$(\{a\};\{b\};\{b\};\{a\})^*$	2	$(H;\{a\};H;\{b\})^*$	2
$(H;\{b\};\{b\};\{a\})$	2	$(\{a\};H;H;\{b\})^*$	1
$(\{a\};H;\{b\};\{a\})$	2	$(H;\{a\};\{a\};H)$	2
$(\{a\};\{b\};H;\{a\})$	2	$(H;\{b\};\{a\};H)$	1
$(H;\{a\};\{a\};\{b\})^*$	2	$(H;\{a\};\{b\};H)$	1
$(H;H;\{b\};\{a\})$	2	$(H;H;H;\{a\})^*$	2
$(H;\{b\};H;\{a\})$	2	$(H;H;H;\{b\})^*$	2
$(\{a\};H;H;\{a\})$	2	$(H;H;\{a\};H)$	2
$(\{b\};H;H;\{a\})$	1	$(H;H;\{b\};H)$	2
$(H;H;\{a\};\{b\})^*$	2	$(H;H;H;H)^*$	1

Table 2: Liste des H_v-groupes d'ordre 2 ($H = \{a, b\}$)

Les hypergroupes sont notés par *.

Nous représentons le poset des H_v-groupes d'ordre 2 (cf. figure 2).

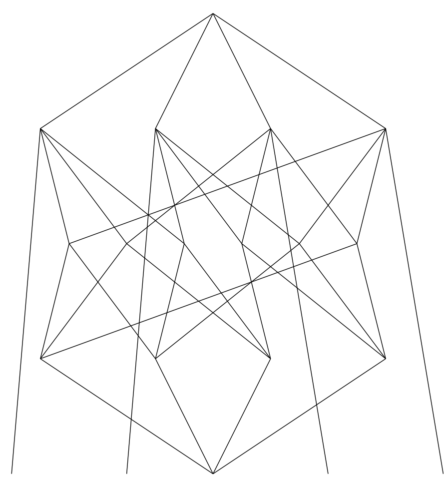

Figure 2: Poset des H_v-groupes d'ordre 2

5.2. H_v-groupes d'ordre 3

Théorème 5.2 *Il existe, à isomorphie près, 1026462 H_v-groupes d'ordre 3 (cf. tableau 3).*

Nous dirons qu'un H_v-groupe est minimal s'il ne contient aucun autre H_v-groupe défini sur le même ensemble [27].

Théorème 5.3 *Il existe, à isomorphie près, 6494 H_v-groupes minimaux d'ordre 3.* Nous retrouvons aussi le résultat de S-C. Chung et B-M Choi [**?**] à savoir qu'il existe 13 H_v-groupes minimaux avec élément neutre.

		Classes					
		Abéliens			non Abéliens		
		Cycliques	non Cycliques		Cycliques	non Cycliques	
			Proj.	non Proj.		Proj.	non Proj.
$\lvert Aut(H_v)\rvert$	1	5	2	-	4	2	-
	2	8	1	1	47	5	7
	3	243	8	14	2034	66	76
	6	7439	10	195	1003818	1083	11394

Table 3: Classification des H_v-groupes d'ordre 3

5.3. **Algorithme**

Définition 5.4 *Deux hypergroupes* $< H, . >$ *et* $< H, * >$ *sont isomorphes s'il existe* $f \in Aut(H, *)$ *tel que* $\forall (x, y) \in H^2 \; xy = f(x * y)$.
Notre algorithme est du type de celui de G. Nordo [21]. Nous représentons un ensemble H tel que $|H| = n$ par $\mathbf{H} = \{2^i / i \in \{0, \ldots, n-1\}\}$. Il est alors judicieux d'utiliser des opérateurs logiques comme outils de manipulation des ensembles. Par exemple si $A \subset H$ et $B \subset H$ alors $A \cup B \leftrightarrow \mathbf{A} + \mathbf{B}$ où $+$ est le *ou* logique et $A \cap B \leftrightarrow \mathbf{A}.\mathbf{B}$ où . est le *et* logique. Ensuite nous codons la table de Cayley en base $n! - 1$. Chacun des chiffres du nombre obtenu représente un élément de la table de Cayley.

Pour générer les candidats hypergroupes nous disposons d'un compteur en base $n! - 1$. Ce compteur énumère l'ensemble des nombres à n^2 chiffres. L'élaguage est effectué au cours de la génération des candidats en vérifiant de manière dynamique l'axiome de reproduction sur le produit de l'hyperopération. En d'autres termes, à chaque ligne générée nous vérifions que l'axiome de reproduction *à gauche* (i.e. $xH = H$) est valide. Si pour toute ligne l'axiome de reproduction à gauche est vérifié, nous testons ensuite la reproduction à droite et vérifions ainsi l'axiome de reproduction. Le cas échéant nous testons l'associativité.

Pour l'énumération des H_v-groupes, nous substituons au test d'associativité un test d'associativité faible. Lors de l'énumération des H_v-groupes minimaux, nous ajoutons la contrainte de minimalité aux candidats.

Si le candidat vérifie les deux propriétés, il s'agit d'un hypergroupe alors nous déterminons la partition à laquelle il appartient. Nous partitionnons les hypergroupes suivant le nombre d'hyperproduits xy de cardinal donné. Nous obtenons ainsi un partitionnement fin et uniforme de l'ensemble des hypergroupes, $\mathcal{H}$. Nous déterminons enfin les hypergroupes isomorphes. Pour cela nous testons deux à deux, les hypergroupes d'une même partition. Nous construisons alors un ensemble d'hypergroupes à isomorphie près, $\mathcal{H}/\cong$, qui est partitionné suivant le même critère. Ces deux ensembles nous permettent de construire efficacement le poset de hypergroupes. En effet pour chaque élément de $\mathcal{H}/\cong$ nous parcourons les éléments des partitions adéquates de $\mathcal{H}$, afin de déterminer les relations au sens de $<$ de Th. Vougiouklis [25]. Finalement nous parcourons l'ensemble $\mathcal{H}/\cong$ afin de déterminer les propriétés des hypergroupes et ainsi les classifier. Ces parties de notre algorithme s'effectuent de la même manière pour les H_v-groupes.

Remerciements

Nous tenons à remercier Patrice Deloche pour son aide constante.

Références

[1] R. Bayon and N. Lygeros. Remarques sur les hypergroupes canoniques au sens de Mittas. *Perfection*, Perfection, 10, 2004.

[2] R. Bayon and N. Lygeros. Catégories spécifiques d'hypergroupes d'ordre 3. In *Eléments structurels de la théorie des hyperstructures : Colloque de l'Université de Thrace*, à paraître mars 2005,

[3] R. Bayon and N. Lygeros and J.-S. Sereni. Nouveaux progrès dans l'énumération des modèles mixtes. In *Knowledge discovery and discrete mathematics : JIM'2003*, pages 243–246, Universtité de Metz, France, 2003. INDIA

[4] R. Bayon and N. Lygeros and J.-S. Sereni. New progress in enumeration of mixed models. *Appl. Math. E-Notes*, 5 : 60–65, 2005.

[5] G. Birkhoff. Sobre los grupos de automorfismos. *Revista Union Math. Arg*, 11 :155–157, 1946.

[6] C. Chaunier and N. Lygeros. The number of orders with thirteen elements. *Order*, 9(3) :203–204, 1992.

[7] C. Chaunier and N. Lygeros. Progrès dans l'énumération des posets. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 314(10) :691–694, 1992.

[8] C. Chaunier and N. Lygeros. Le nombre de posets à isomorphie près ayant 12 éléments. *Theoret. Comput. Sci.*, 123(1) :89–94, 1994. Number theory, combinatorics and applications to computer science (Marseille, 1991),

[9] C. Chaunier and N. Lygeros. Posets minimaux ayant un groupe d'automorphismes d'ordre premier. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 318(8) :695–698, 1994.

[10] S-C. Chung and B-M. Choi. H_v-groups on the set $\{e, a, b\}$. *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 10 :133–140, 2001.

[11] M. De Salvo. Commutative finite a-hypergroups of length two. *Annals of Discrete Mathematics*, 37 :147–156, 1988.

[12] R. Fraïssé and N. Lygeros. Petits posets : dénombrement, représentabilité par cercles et "compenseurs". *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 313(7) :417–420, 1991.

[13] N. Lygeros. Remarques sur les groupes, les hypergroupes et les hyperstructures, *Perfection*, 8, 2004.

[14] N. Lygeros. Remarques sur les hypergroupes renaissants au sens de Mittas. *Perfection*, 10, 2004.

[15] N. Lygeros. Sur le poset des hypergroupes d'ordre 2. *Perfection*, 10, 2004.

[16] N. Lygeros and M. Mizony. Construction de posets dont le groupe d'automorphismes est isomorphe à un groupe donné. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 322(3) :203–206, 1996.

[17] F. Marty. Sur une généralisation de la notion de groupe. In *8ème congrès des Mathématiciens Scandinaves, Stockholm*, pages 45–49, 1934.

[18] F. Marty. Rôle de la notion d'hypergroupe dans l'étude des groupes non abéliens. *C. R. Acad. Sci. Paris Math.*, 1935.

[19] F. Marty. Sur les groupes et hypergroupes attachés à une fraction rationnelle. *Annales scientifiques de l'E.N.S.*, 53 :83–123, 1936.

[20] R. Migliorato. Ipergruppi di cardinalità 3 e isomorfismi di ipergruppoidi commutativi totalmente regolari. *Atti Convegno su Ipergruppi, altre Strutture Multivoche e loro applicazioni, Udine*, 1985.

[21] G. Nordo. An algorithm on number of isomorphism classes of hypergroups of order 3. *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2 :37–42, 1997.

[22] Th. Vougiouklis. *Cyclicity of hypergroups*. PhD thesis, in Greek, 1980.

[23] Th. Vougiouklis. Cyclicity in a special class of hypergroups. *Acta Univ Car.-Math et Ph*, 22(1) :3–6, 1981.

[24] Th. Vougiouklis. The fundamental relation in hyperrings : The general hyperfield. In World Scientific, editor, *Fourth Int. Congress Algebraic Hyperstructures and Appl. (AHA)*, pages 203–211, 1991.

[25] Th. Vougiouklis. *Hyperstructures and their Representations*. Hadronic Press, 1994.

[26] Th. Vougiouklis and S. Spartalis. P-cyclic hypergroups with three characteristic elements. *Annals of discrete Mathematics*, 37 :421–426, 1988.

[27] Th. Vougiouklis and S. Spartalis and M. Kessoglides. Weak hyperstructures on small sets. *Ratio Mathematica*, 12 :90–96, 1997.

[28] H.S. Wall. Hypergroups. *American Journal of Mathematics*, 59 :78–98, 1937.

◇ R. Bayon
Institut Girard Desargues
Département de Mathématiques, Univ. Lyon 1
43 Bld du 11 Nov. 1918, F-69622
Villeurbanne Cedex France

◇ N. Lygeros
est Professeur invité des universités :
Université de Thrace
Université d'Athènes
Université de Missolongi
Grèce