BULLETIN OF THE
GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 52, 2006 (77–90)

Calcul fonctionnel holomorphe dans les algèbres localement p-convexes

M. Chahboun and A. El Kinani

Abstract

We define and study a holomorphic functional calculus in locally p-convex algebras. Some applications are also considered.

Mots clés : Fonction holomorphe, algèbre localement p-convexe, m-p- complétude, involution d'espace vectoriel.
1991 Mathematics subject classification : 46K99, 46H30.

Introduction

Dans [2], G. R. Allan a défini un calcul fonctionnel holomorphe dans les algèbres localement convexes pseudo-complètes. Pour les algèbres p-Banach, W. Zelazko ([23]) a utilisé la notion de "*p-admissibilité*" pour assurer l'existence d'un calcul holomorphe. Dans cet article, on se propose de construire un calcul fonctionnel holomorphe dans les algèbres localement p-convexes m-p-complètes, $0 < p \leq 1$. Pour ce faire, nous considérons le spectre ([2]) comme une partie de $\overline{C} = C \cup \{\infty\}$, compactifié d'Alexandroff de C. Cette notion est en fait le spectre régulier au sens de L. Waelbroeck ([22]). Nous montrons (Corollaire 2.10) que le spectre régulier de tout élément x, noté $Sp_r x$, est un compact non vide de $\overline{C}$. Nous considérons ensuite des fonctions f, holomorphes sur un ouvert U de $\overline{C}$, et donnons un sens à $f(x)$, où x est un élément non nécessairement régulier tel que $Sp_r x \subset U$. On montre (Proposition 3.5) que ce calcul est continu. Puis on établit (Proposition 4.5) le "*Spectral mapping theorem*". Nous étendons ensuite, pour les éléments réguliers, un lemme de J. W. Ford ([12]), sur l'existence de la racine carrée hermitienne (Proposition 4.6). Nous obtenons également une version du principe du maximum (Proposition 4.7).

1. Préliminaires

Soient (E, τ) un espace localement p-convexe séparé et $(|.|_i)_{i \in I}$une famille de p-semi-normes, $0 < p \leq 1$, définissant sa topologie. Si E est muni d'une structure d'algèbre telle que le produit est séparément continu, on dit que (E, τ) est une algèbre localement p-convexe (*a.l.p-c.*). Une *a.l.p-c.* est dite *m-p-complète* si, pour tout p-disque borné fermé et idempotent B, l'espace vectoriel E_B engendré par B, muni de la p-jauge $\|.\|_B$, de B, est une algèbre p-Banach (i.e., une algèbre p-normée complète). Un élément $x \in E$ est dit *régulier* si, et seulement si, il existe $\alpha > 0$ tel que l'ensemble $\left\{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^n : n \in N^*\right\}$ soit un borné de E. L'ensemble des éléments réguliers de E sera noté E_0. Pour $x \in E_0$, soit B la fermeture de l'enveloppe p-disquée de l'ensemble borné et idempotent $\left\{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^n : n = 1, ...\right\}$. Alors B est un p-disque borné fermé et idempotent tel que $x \in E_B$. Considérons la famille, notée $\mathcal{B}_r$, de tous les p-disques bornés fermés et idempotents de E et posons $\mathcal{B} = \{B \in \mathcal{B}_r : e \in B\}$. On a alors $E_0 = \bigcup \{E_B : B \in \mathcal{B}\}$. Soit $(E, (|.|_i)_{i\in I})$ une *a.l.p-c.* commutative et *m-p-complète.* On montre (Proposition 2.1) que E_0 est une sous-algèbre de E. Ainsi la *m-p-complètude* de l'algèbre $(E, (|.|_i)_{i\in I})$ signifie que l'algèbre $(E_0, \mathcal{B}_r)$ est complète. Pour $p = 1$, on retrouve les algèbres *"pseudo-Banach algebras" au* sens de G. R. Allan, H. G Dales et J. P. McClure de [3]. On s'intéresse aux fonctions holomorphes telles qu'elles sont définies dans [5]. On désigne par $H(U)$ l'ensemble des fonctions complexes holomorphes sur un ouvert U de $\overline{C}$. On rappelle qu'une fonction complexe f est holomorphe à l'infini si $\lim\limits_{\lambda \longrightarrow 0} f(\lambda^{-1}) = l$ et si la fonction $\widetilde{f}(\lambda) = f(\lambda^{-1})$ si $\lambda \neq 0$ et $\widetilde{f}(0) = l$ est holomorphe au point 0.

Dans toute la suite, les algèbres seront localement p-convexes, $0 < p \leq 1$, complexes et unitaires. Si e est l'unité, λ sera un abus de notation pour λe, où $\lambda \in C$. Pour tout $x \in E$, on définit $Spx = \{\lambda \in C : \lambda - x \notin G(E)\}$, où $G(E)$ est le groupe des éléments inversibles de E. Le rayon spectral de x est $\rho(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in Spx\}$ et le rayon de régularité de x est $\beta(x) = \inf\{\alpha > 0 : \lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha^{-1}x)^n = 0\}$ avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$.

2. Eléments et spectre réguliers

L'ensemble E_0 n'est pas nécessairement une algèbre ([22]). Dans le cas commutatif, on a ce qui suit

Proposition 2.1 *Soit $(E, (|.|_i)_{i\in I})$ une a.l.p-c. commutative et m-p-complète. Alors E_0 est une sous-algèbre de E.*

Preuve. Il suffit de montrer que $\mathcal{B}$ est filtrante à droite. Soient $B, C \in \mathcal{B}$. Pour tout $b \in B$, on considère l'application linéaire $L_b : c \longmapsto bc$, de E_C dans E et $\mathcal{F} = \{L_b : b \in B\}$. Tout élément de $\mathcal{F}$ est continu. De plus, pour $x \in E_C$, l'orbite $\{L_b(x) : b \in B\}$ est un borné de $(E, (|.|_i)_{i\in I})$. Par le théorème 2.6 ([18], p. 44), la famille $\mathcal{F}$ est équicontinue. Elle est donc équibornée. Par conséquent BC est un borné idempotent. Par suite, la fermeture $\overline{\Gamma_p(BC)}$, de l'enveloppe p-disquée $\Gamma_p(BC)$ de BC, est un élément de $\mathcal{B}$ contenant $B \cup C$. □

Comme conséquence, on a le résultat suivant.

Corollaire 2.2 *Soit $(E, (|.|_i)_{i\in I})$ une a.l.p-c. commutative et m-p-complète. Posons $B_0 = \bigcup \{B : B \in \mathcal{B}\}$. Alors*

(i) B_0 est un p-disque idempotent et absorbant dans E_0 et sa p-jauge $\|.\|_{B_0}$ est une p-semi-norme sur E_0.

(ii) pour tout $x \in E_0$, on a $\|x\|_{B_0} = \inf \{\|x\|_B : B \in \mathcal{B},\ x \in E_B\} = \beta(x)^p$.

Rappelons la notion, suivante, de spectre régulier au sens de L. Waelbroeck.

Définition 2.3 ([22]) Soient $(E, (|.|_i)_{i\in I})$ une *a.l.p-c.* et $x \in E$. On appelle *spectre régulier* de x, noté $Sp_r x$, la partie de $\overline{C} = C \cup \{\infty\}$, définie par

(i) Pour $\lambda \neq \infty, \lambda \in Sp_r x$ si, et seulement si, $\lambda - x$ n'admet pas d'inverse régulier dans E.

(ii) $\infty \in Sp_r x$ si, et seulement si, x n'est pas régulier.

Remarques 2.4 **(i)** Pour tout $x \in E$, on a $Spx \subset Sp_r x$.

(ii) Si E est commutative et m-p-complète, alors

a) $Sp_r x = Sp_{E_0} x$, pour tout $x \in E_0$, où $Sp_{E_0} x$ est le spectre algébrique de x relativement à l'algèbre E_0.

b) Pour tout $x \in E_0$, $Sp_{E_0} x$ est un compact de C.

Le résultat suivant, de preuve classique, permet de se ramener au cas commutatif.

Proposition 2.5 *Soient $\left(E, (|.|_i)_{i\in I}\right)$ une a.l.p-c., X une partie commutative de E. Alors*

1) il existe une sous-algèbre F, de E, commutative et maximale contenant X telle que $Sp_r x = Sp_{r,F} x$, pour tout $x \in F$.

2) Si E est m-p-complète, il en est de même de F.

Pour tout $x \in E$, on désigne par $Res(x)$, le complémentaire de $Sp_r x$ dans $\overline{C}$, appelé l'*ensemble résolvant* de x, et par R_x la *résolvante* de x définie par $R_x(\lambda) = (\lambda - x)^{-1}$ lorsque cet inverse existe dans E.

Proposition 2.6 *Soient $(E, (|.|_i)_{i\in I})$ une a.l.p-c. m-p-complète et $x \in E$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) x est régulier.

(ii) La résolvante $\lambda \longmapsto R_x(\lambda) = (\lambda - x)^{-1}$ est définie et bornée dans un voisinage ouvert de l'infini.

Preuve. **(i)⟹(ii)**. Soient $x \in E_0$ et $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in E_B$. Pour $|\lambda|^p > \|x\|_B$ et $\lambda \neq \infty$, on a $R_x(\lambda) \in E_B$ et $\|R_x(\lambda)\|_B \leq (|\lambda|^p - \|x\|_B)^{-1}$. Par conséquent $\lim\limits_{|\lambda| \longrightarrow \infty} \|R_x(\lambda)\|_B = 0$. Soit $M > 0$ tel que $R_x(\lambda) \in B$. Pour $|\lambda| > M$, la résolvante $\lambda \longmapsto R_x(\lambda)$ est définie et bornée dans $U = \left\{\lambda \in \overline{C} : |\lambda| > \max\left(M, \|x\|_B^{\frac{1}{p}}\right)\right\}$.

(ii)⟹(i). Soit U un voisinage ouvert de l'infini tel que la résolvante $\lambda \longmapsto R_x(\lambda)$ y est définie et bornée. Soit $B \in \mathcal{B}$ tel que $R_x(U) \subset B$. Pour $|\lambda|^p > \|x\|_B$, on a $(\lambda - x)^{-1} = \sum\limits_{n \geq 0} \lambda^{-n-1} x^n$ dans E_B. D'où la régularité de x. □

Le spectre régulier est un fermé de $\overline{C}$, comme le montre le résultat suivant.

Proposition 2.7 *Soient $(E, (|.|_i)_{i\in I})$ une a.l.p-c. m-p-complète et $x \in E$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

1) $\lambda_0 \in Res(x)$.

2) λ_0 admet un voisinage ouvert U, dans $\overline{C}$, tel que

(i) $(\lambda - x)^{-1}$ existe, pour tout $\lambda \neq \infty$ dans U,

(ii) l'ensemble $\left\{(\lambda - x)^{-1},\ \lambda \in U \text{ et } \lambda \neq \lambda_0\right\}$ est un borné de E.

Preuve. **a)** Si $\lambda_0 = \infty$, alors $x \in E_0$. Par la proposition 2.6, on a 1) $\Longleftrightarrow$ 2).

b) Supposons que $\lambda_0 \neq \infty$ et montrons 1) $\Longrightarrow$ 2). Si $\lambda_0 \in Res(x)$, alors $y = (\lambda_0 - x)^{-1} \in E_0$. Donc, d'après a), l'application $\lambda \longmapsto R_y(\lambda)$ est définie et bornée dans un voisinage de l'infini. Par suite la fonction $\lambda \longmapsto \left(y + (\lambda - \lambda_0)^{-1}\right)^{-1}$ est définie et bornée pour $\lambda \neq \lambda_0$ dans un voisinage ouvert U de λ_0. Comme $(\lambda - x)^{-1} = y - y^2 \left(y + (\lambda - \lambda_0)^{-1}\right)^{-1}$, l'application $\lambda \longmapsto R_x(\lambda)$ est définie et bornée sur l'ensemble $\{\lambda \in C : \lambda \neq \lambda_0, \lambda \in U\}$. Par conséquent, si $\lambda_0 \neq \infty$, l'application $\lambda \longmapsto R_x(\lambda)$ est définie et bornée sur U. Montrons maintenant 2) $\Longrightarrow$ 1). Soit $\lambda_0 \neq \infty$ et vérifiant (i) et (ii). Alors $y = (\lambda_0 - x)^{-1}$ existe. De plus, pour tout $\lambda \neq \lambda_0$ dans le voisinage U de λ_0, l'élément $y + (\lambda - \lambda_0)^{-1}$ est inversible. Comme $\left(y + (\lambda - \lambda_0)^{-1}\right)^{-1} = y^{-1}\left(1 - y^{-1}(\lambda - x)^{-1}\right)$, l'ensemble $\left\{\left(y + (\lambda - \lambda_0)^{-1}\right)^{-1},\ \lambda \in U \text{ et } \lambda \neq \lambda_0\right\}$ est un borné de E. D'où la régularité de $y = (\lambda_0 - x)^{-1}$ par a). Donc $\lambda_0 \in Res(x)$. □

Concernant l'holomorphie de la résolvante, on a ce qui suit.

Proposition 2.8 *Soient $(E, (|.|_i)_{i\in I})$ une a.l.p-c. m-p-complète et $x \in E$. Alors, pour tout $\lambda_0 \in Res(x)$, il existe un voisinage ouvert U de λ_0 contenu dans $Res(x)$ et $B \in \mathcal{B}$ tel que $R_x(U) \subset E_B$. De plus, la résolvante $\lambda \longmapsto R_x(\lambda)$ est holomorphe de U dans E_B*

Preuve. Soit $\lambda_0 \in Res(x)$. Si $\lambda_0 \neq \infty$, l'élément $R_x(\lambda_0)$ est défini et régulier par la proposition 2.6. Soit $B \in \mathcal{B}$ tel que $R_x(\lambda_0) \in (E_B, \|.\|_B)$. Si $|\lambda - \lambda_0| < \|R_x(\lambda_0)\|_B^{-\frac{1}{p}}$, alors, par la proposition 2.6, la série

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k\left(\lambda-\lambda_0\right)^k R_x(\lambda_0)^{k+1}$$

est convergente dans $(E_B, \|.\|_B)$ est sa somme est exactement $R_x(\lambda)$. On pose $U = \left\{\lambda \in C : |\lambda-\lambda_0| < \|R_x(\lambda_0)\|_B^{-\frac{1}{p}}\right\}$. C'est un voisinage ouvert de λ_0 dans lequel $\lambda - x$ est inversible et d'inverse $R_x(\lambda) = \sum_{k\geq 0}(-1)^k\left(\lambda-\lambda_0\right)^k R_x(\lambda_0)^{k+1}$. Comme $R_x(\lambda_0) \in E_B$, on a $R_x(\lambda) = \sum_{k\geq 0}(-1)^k\left(\lambda-\lambda_0\right)^k R_x(\lambda_0)^{k+1} \in E_B$, pour tout $\lambda \in U$. Ainsi $U \subset Res(x)$ et la résolvante $\lambda \longmapsto R_x(\lambda)$ est holomorphe de U dans E_B. Supposons maintenant que $\lambda_0 = \infty$. Soit $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in E_B$. Posons $U = \left\{\lambda \in \overline{C} : |\lambda|^p > \|x\|_B\right\}$. Alors, pour tout $\lambda \in U \cap C$, l'élément $\lambda - x$ est inversible et son inverse $R_x(\lambda)$ est dans E_B. De plus, $\|R_x(\lambda)\|_B \leq \left(|\lambda|^p - \|x\|_B\right)^{-1}$. Donc $\lim_{|\lambda|\to\infty} R_x(\lambda) = 0$ dans E_B. Montrons que l'application f définie par $f(\lambda) = R_x(\lambda^{-1})$ si $\lambda \neq 0$ et $f(0) = 0$ est holomorphe en zéro. On a $R_x(\lambda^{-1}) = \lambda\left(1 + x(\lambda^{-1}-x)^{-1}\right)$. Par ailleurs, $(\lambda^{-1}-x)^{-1}$ existe et $\lambda \longmapsto (\lambda^{-1}-x)^{-1}$ est bornée dans un voisinage de 0. Il en découle que $\lambda \longmapsto 1+x(\lambda^{-1}-x)^{-1}$ est bornée. D'où le résultat vu que $\lim_{\lambda\to 0}\left\|\lambda^{-1}R_x(\lambda^{-1})\right\|_B = 1$. □

Comme conséquences, on obtient les résultats suivants.

Corollaire 2.9 *Soient $(E, (|.|_i)_{i\in I})$ une a.l.p-c. m-p-complète, $x \in E$ et K un compact de $Res(x)$. Alors il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $R_x(\lambda) \in E_B$, pour tout $\lambda \in K$. De plus R_x est holomorphe dans un voisinage de K et à valeurs dans E_B.*

Preuve. Soit F la sous-algèbre commutative maximale contenant x. Par 2) de la proposition 2.5, $(F, (|.|_i)_{i\in I})$ est une *a.l.p-c.* unitaire et m-p-complète. Soit $\lambda \in K \subset Res(x)$. D'après la proposition 2.8, il existe un voisinage ouvert U_λ, de λ, dans $Res(x)$ tel que $R_x(\gamma) \in E_B$, pour tout $\gamma \in U_\lambda$, où $B \in \mathcal{B}$. Mais $R_x(\gamma) \in F$, pour $\gamma \in U_\lambda \subset Res(x)$. D'où, pour tout $\gamma \in U_\lambda$, $R_x(\gamma) \in F \cap E_B = F_A$, où $A = F \cap B$ qui est un p-disque borné idempotent et complétant de F. Par conséquent, R_x est une application de U_λ dans l'algèbre p-Banach $(F_A, \|.\|_A)$ qui est contenue dans $(F, (|.|_i)_{i\in I})$. Comme K est un compact, il existe un recouvrement fini d'ouverts $(U_k)_{1\leq k\leq n}$ et une famille de p-disques bornés idempotents et complétants $(A_k)_{1\leq k\leq n}$, dans F, tels que pour tout $\gamma \in U_k$, $R_x(\gamma) \in F_{A_k}$. En tenant compte du fait que l'algèbre F est commutative et m-p-complète, on montre qu'il existe un p-disque borné idempotent et complétant A tel que $\cup_{k=1}^n A_k \subset A$. D'où $R_x(K) \subset F_A \subset E_A$. De plus, $R_x(U_k)$ est borné, pour tout $k \in \{1, ..., n\}$. Ainsi $R_x(K)$ est borné. L'application R_x est alors holomorphe sur l'ouvert $U = \cup_{k=1}^n U_k$ vu qu'elle l'est sur chaque U_k. □

Corollaire 2.10 *Dans une a.l.p-c. m-p-complète* $(E, (|.|_i)_{i\in I})$*, le spectre de tout élément est un compact non vide de* $\overline{C}$.

Preuve. Il reste à montrer que $Sp_r x \neq \emptyset$. Supposons qu'il existe $x \in E$ tel que $Sp_r x = \emptyset$. Quitte à considérer la sous-algèbre commutative maximale engendrée par x, on peut supposer que E est commutative. Par le corollaire 2.9, il existe, pour $K = \overline{C}$, une algèbre p-Banach unitaire E_B telle que la résolvante R_x est holomorphe de $\overline{C}$ dans E_B. Soit $s : E_B \longrightarrow E_B/RadE_B$, la surjection canonique. Alors $s \circ R_x$ est holomorphe de $\overline{C}$ dans $E_B/RadE_B$. Elle est donc faiblement holomorphe. De plus, $s \circ R_x\,(C)$ est faiblement borné dans $E_B/RadE_B$. D'où $s \circ R_x$ est constante et même nulle puisque R_x tend vers 0 à l'infini. Ainsi la résolvante R_x est à valeurs dans $RadE_B$; contradiction. □

Le corollaire 2.10 permet d'obtenir une extension du théorème de Gelfand-Mazur.

Corollaire 2.11 *Soit* E *une a.l.p-c. m-p-complète qui est un corps. Si* $E = E_0$*, alors* E *est isomorphe à* C.

Comme conséquence, on obtient ce qui suit :

Corollaire 2.12 *Soit* E *une a.l.p-c. m-p-complète. Si* $E = E_0$*, alors* E *est une algèbre de Gelfand-Mazur (cf. [13]).*

Remarque 2.13 Le théorème de Gelfand-Mazur, établissant que toute algèbre de Banach complexe qui est un corps est isomorphe algébriquement et topologiquement au corps des complexes C, a été généralisé dans plusieurs directions. L'une d'elles recouvre la classe d'algèbres topologiques unitaires, séparées E, qui sont des corps, vérifiant $Sp_E x \neq \emptyset$, pour tout $x \in E$. Pour une *a.l.p-c* séparée unitaire *m-p*-complète $(E, (|.|_i)_{i\in I})$, le spectre de tout élément régulier de E est non vide. Ainsi, si tout élément de E est régulier i.e., $E = E_0$, alors E vérifie le théorème de Gelfand-Mazur. Signalons que le corps $E = C\,(X)$, des fractions rationnelles dans C, muni de la topologie localement convexe la plus fine montre que la condition $Sp_E x \neq \emptyset$, pour tout $x \in E$, est nécessaire.

3. Construction d'un calcul fonctionnel holomorphe

Soient $(E, (|.|_i)_{i\in I})$ une *a.l.p-c. m-p*-complète, $x \in E$ et Γ une courbe de Jordan rectifiable de $Res(x) \cap C$. Alors il existe une algèbre p-Banach E_B telle que $R_x(\Gamma) \subset E_B$. De plus, R_x est p-admissible sur Γ ([23]).

Proposition 3.1 *Soient* $(E, (|.|_i)_{i\in I})$ *une a.l.p-c. unitaire, m-p-complète,* $x \in E$ *tel que* $Res(x) \neq \emptyset$ *et* Γ *une courbe de Jordan rectifiable de* $Res(x) \cap C$*. Alors il existe* $B \in \mathcal{B}$ *tel que* *(i)* $R_x(\lambda) \in E_B$, *pour tout* $\lambda \in \Gamma$,

(ii) si f *est holomorphe sur un voisinage de* Γ, *l'application* $\lambda \longmapsto f(\lambda)R_x(\lambda)$ *est* p*-admissible, sur* Γ, *et l'on a* $\int_\Gamma f(\lambda)R_x(\lambda)d\lambda \in E_B$.

Preuve. Par le corollaire 2.9, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $R_x(\lambda) \in E_B$, pour tout $\lambda \in \Gamma$.De plus R_x est holomorphe dans un voisinage de Γdans E_B. Donc $\lambda \longmapsto f(\lambda)R_x(\lambda)$ est holomorphe dans un voisinage de Γ dans E_B. Par ailleurs, la fonction R_x est p-admissible sur Γ. Comme f est continue et bornée sur Γ, il s'ensuit que $\lambda \longmapsto f(\lambda)R_x(\lambda)$est p-admissible. Elle est donc Riemann intégrable sur Γ. D'où l'existence de $\int_\Gamma f(\lambda)R_x(\lambda)d\lambda$ dans E_B. □

Définition 3.2 ([21]) Une partie D, de $\overline{C}$, est dite *domaine de Cauchy* si

(i) D est ouvert

(ii) D a un nombre fini de composantes connexes d'adhérences deux à deux disjointes.

(iii) La frontière ∂D de D est une partie de C, constituée d'un nombre fini de chemins de Jordan rectifiables fermés et disjoints.

Remarques 3.3 Soient $\left(E, (|.|_i)_{i \in I}\right)$ une *a.l.p-c.m-p*-complète, $x \in E$ tel que $Res(x) \neq \emptyset$ et U un ouvert de $\overline{C}$ tel que $Sp_r x \subset U$.

1) L'existence d'un domaine de Cauchy D tel que $Sp_r x \subset D$ et $\overline{D} \subset U$ a été prouvée dans [21].

2) Par (iii) de la définition 3.2, si $f \in H(U)$, on a $\int\limits_{\partial D} f(\lambda)R_x(\lambda)d\lambda = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{\Gamma_k} f(\lambda) R_x(\lambda)d\lambda$, où $\partial D = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \Gamma_k$ et les Γ_k sont des arcs de Jordan rectifiables fermés et disjoints. Par la proposition 3.1, l'intégrale $\int\limits_{\partial D} f(\lambda)R_x(\lambda)d\lambda$ est un élément de E_0. De plus, elle est indépendante du choix de D vérifiant 1).

Pour la construction du calcul holomorphe, on va procéder par étapes.

1) Supposons que $Res(x) \neq \emptyset$. Deux cas se présentent.

a) Si $x \in E_0$, alors $Sp_r(x)$ est un compact de C et dans ce cas, on choisit un domaine de Cauchy D borné. Par la proposition 3.1, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $\int\limits_{\partial D} f(\lambda)R_x(\lambda)d\lambda \in E_B$. On définit $f(x)$ par $f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} f(\lambda)R_x(\lambda)d\lambda$. On a ainsi un morphisme unitaire ([23]), $\varphi_x : f \longmapsto f(x)$de $H(U)$ dans E_B, vérifiant $\varphi_x\,(Id) = x$, où $Id : \lambda \longmapsto \lambda$.

b) Si $x \notin E_0$, alors $+\infty \in Sp_r x$ et D un domaine de Cauchy non borné. Dans ce cas, on pose $f(x) = f(\infty) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} f(\lambda)R_x(\lambda)d\lambda$. Par la proposition 3.1, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $R_x(\partial D) \subset E_B$. L'application de $H(U)$ dans E_B, donnée par $f \longmapsto$

$f(x)=f(\infty)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} f(\lambda)R_x(\lambda)d\lambda$ est un morphisme unitaire d'espace vectoriel. De plus, pour $f_1, f_2 \in H(U)$, on vérifie facilement que $(f_1f_2)(x)=f_1(x)f_2(x)$.

2) Supposons maintenant que $Res(x)=\emptyset$, i.e. $Sp_r x=\overline{C}$. Par le théorème de Liouville, toute fonction $f\in H\left(\overline{C}\right)$ est constante. Si $f(\lambda)=k$, pour tout $\lambda\in\overline{C}$, où $k$est une constante. On pose $f(x)=k$.

En combinant 1) et 2), on obtient ce qui suit.

Proposition 3.4 *Soient $(E,(|.|_i)_{i\in I})$ une a.l.p-c. m-p-complète, $x\in E$ et U un ouvert de $\overline{C}$ contenant $Sp_r x$. Alors*

1) il existe un domaine de Cauchy D dans U, contenant $Sp_r x$ dans son intérieur et tel que $\overline{D}$ soit contenu dans U.

2) il existe un morphisme d'algèbre $\varphi_x : f\longmapsto f(x)$ de $H(U)$ dans E tel que

(i) $f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} f(\lambda)R_x(\lambda)d\lambda$, si $x\in E_0$

(ii) $f(x)=f(\infty)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} f(\lambda)R_x(\lambda)d\lambda$, si $Res(x)\neq\emptyset$ et $x\notin E_0$

(iii) $f(x)=ke$ si $f(\lambda)=k$, (k une constante), si $Res(x)=\emptyset$.

Le calcul fonctionnel construit est continu pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. En fait, on a même plus.

Proposition 3.5 *Soient $\left(E,(|.|_i)_{i\in I}\right)$ une a.l.p-c. m-p-complète, $x\in E$ et U un ouvert de $\overline{C}$ contenant $Sp_r x$. Si K est un compact contenu dans U et contenant $Sp_r x$ dans son intérieur, alors l'application $\varphi_x : f\longmapsto f(x)$ de $(H(U),p_K)$ dans $\left(E,(|.|_i)_{i\in I}\right)$ est continue, où $p_K(f)=\sup\limits_{\lambda\in K}(|f(\lambda)|)$.*

Preuve. Le résultat est trivial si $Res(x)=\emptyset$. Si maintenant $Res(x)\neq\emptyset$, soient D un domaine de Cauchy tel que $Sp_r x\subset D$ et $\overline{D}\subset intK$, et $(f_n)_n\subset H(U)$ telle que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}(\sup\limits_{\lambda\in K}|f_n(\lambda)|)=0$. Par la Proposition 3.1**,** il existe $B\in\mathcal{B}$ tel que, pour tout entier n, on a $\int\limits_{\partial D} f_n(\lambda)R_x(\lambda)d\lambda\in E_B$. Donc si $|\partial D|$ désigne la longueur de ∂D, on a

$$\left\|\int\limits_{\partial D} f_n(\lambda)R_x(\lambda)d\lambda\right\|_B \leq |\partial D|^p \sup_{\lambda\in\partial D}\|R_x(\lambda)\|_B\left(\sup_{\lambda\in\partial D}|f_n(\lambda)|\right)^p \underset{n}{\longrightarrow} 0,$$

vuque $\partial D\subset K$. Ainsi, si $x\in E_0$, on$\lim\limits_n f_n(x)=0$ dans $(E_B,\|.\|_B)$. Si x n'est pas régulier, alors $\infty\in Sp_r x$ et donc $\infty\in K$. Dans ce cas, on a

$$f_n(x)=f_n(\infty)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} f_n(\lambda)R_x(\lambda)d\lambda.$$

Par conséquent,

$$\|f_n(x)\|_B \leq \sup_{\lambda\in K} |f_n(\lambda)|^p + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^p \left\| \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} f_n(\lambda) R_x(\lambda) d\lambda \right\|_B \xrightarrow[n]{} 0.$$

□

4. "Spectral Mapping Theorem"

Soit $(E, (|.|_i)_{i\in I})$une *a.l.p-c.*commutative, et m-p-complète. Par commodité, on écrit $\mathcal{B} = (B_j)_{j\in J}$, où J est préordonné et dirigé. Pour tout B_j, on note par E_j l'algèbre commutative unitaire p-Banach E_{B_j} et par $\mathcal{M}_j^*$ l'ensemble des caractères non nuls de E_j, qui est un compact, non vide, pour la topologie faible ([23]). Pour $j \leq k$, en désignant par $\chi_{k_{|E_j}}$ la restriction de χ_k à E_j, on définit l'application $f_{jk} : \mathcal{M}_k^* \longrightarrow \mathcal{M}_j^*$, $\chi_k \longmapsto f_{jk}(\chi_k) = \chi_{k_{|E_j}}$. Il est clair que l'application f_{jk} est continue et que $\left(\mathcal{M}_j^*, f_{jk}\right)_{j,k\in J}$ définit un système projectif. De plus, $\varprojlim_j \mathcal{M}_j^*$est un compact, non vide, homéomorphe à $\mathcal{M}^*(E_0)$.

Proposition 4.1 *Soient $(E, (|.|_i)_{i\in I})$ une a.l.p-c. commutative, m-p-complète et $x \in E_0$. Alors, on a $Sp_r x = \{\chi(x) : \chi \in \mathcal{M}^*(E_0)\}$.*

Preuve. On va montrer que x est inversible dans E_0 si, et seulement si, $\chi(x) \neq 0$, pour tout $\chi \in \mathcal{M}^*(E_0)$. L'implication directe est triviale. Soit $x \in E_0$ tel que $\chi(x) \neq 0$, pour tout $\chi \in \mathcal{M}^*(E_0)$. Il suffit de montrer ([23]) qu'il existe $j_0 \in J$ tel que $x \in E_{j_0}$ et $\chi_{j_0}(x) \neq 0$, pour tout $\chi_{j_0} \in \mathcal{M}_{j_0}^*$. Supposons que pour tout E_j contenant x, il existe $\chi_j \in \mathcal{M}_j^*$ tel que $\chi_j(x) = 0$. Soit $k \in J$ tel que $x \in E_k$. Pour tout $j \geq k$, on pose $N_j = \left\{\chi_j \in \mathcal{M}_j^* : \chi_j(x) = 0\right\}$. C'est un compact non vide de $\mathcal{M}_j^*$. Le système $(N_j, f_{jl})_{j,l}$ est projectif. De plus $\varprojlim_{j\geq k} N_j \neq \emptyset$. Soient $(\psi_j)_{j\geq k} \in \varprojlim_{j\geq k} N_j$ et l'application $\chi_j = \psi_j$, si $j \geq k$ et $\chi_j = f_{jl}(\psi_l)$, si $l \geq j, l \geq k$. On vérifie facilement que $(\chi_j)_{j\in J}$ est un élément de $\varprojlim_j \mathcal{M}_j^*$. Comme $\mathcal{M}^*(E_0) \neq \emptyset$, il existe $\chi \in \mathcal{M}^*(E_0)$ tel que $\chi(x) = 0$; contradiction. □

Le "*Spectral mapping theorem*" s'étend aux éléments réguliers comme suit.

Corollaire 4.2 *Soient $(E, (|.|_i)_{i\in I})$ une a.l.p-c. m-p-complète, U un ouvert de $\overline{C}$ et $x \in E_0$ tel que $Sp_r x \subset U$. Pour tout $f \in H(U)$, on a $f(Sp_r x) = Sp_r f(x)$.*

Posons $E_1 = \{x \in E : Res(x) \neq \emptyset\}$. On a $E_0 \subset E_1$. De plus, les caractères de E_0 se prolongent à E_1 comme suit.

Proposition 4.3 *Soit $(E,(|.|_i)_{i\in I})$ une a.l.p-c. commutative et m-p-complète. Alors, pour tout caractère χ de l'algèbre E_0, il existe une unique application χ_1, à valeurs dans $\overline{C}$, définie sur E_1 prolongeant χ et vérifiant les propriétés suivantes*

i) $\chi_1(\lambda x)=\lambda\chi_1(x)$, pour tous $\lambda\in C$ et $x\in E_1$ (avec la convention $0.\infty=0$)

ii) $\chi_1(x+y)=\chi_1(x)+\chi_1(y)$, pour x, y, $x+y$ dans E_1 et $\chi_1(x)$, $\chi_1(y)$ n'étant pas simultanément infinis.

iii) $\chi_1(xy)=\chi_1(x)\chi_1(y)$, si x,y,$xy\in E_1$ et $\chi_1(x)$, $\chi_1(y)$ n'étant pas 0 ou ∞.

Preuve. Soient $x\in E_1$et $\lambda\neq\infty$ dans $Res(x)$. Soit $y=(\lambda-x)^{-1}\in E_0$. Si un tel caractère χ_1 existe, on doit avoir $\chi_1(\lambda-x)\chi(y)=1$. Donc $(\lambda-\chi_1(x))\chi(y)=1$. Si $\chi(y)=0$, alors $\chi_1(x)=\infty$ car sinon $\chi_1(\lambda-x)$ serait fini ; contradiction. Si $\chi(y)\neq 0$, on a $\chi_1(x)=\lambda-(\chi(y))^{-1}$. D'où l'unicité de χ_1. Montrons maintenant que $\chi_1(x)=\lambda-(\chi(y))^{-1}$ est indépendant de $\lambda\in Res(x)$. Soient $\mu\in Res(x)$ et $y^{'}=(\mu-x)^{-1}$. Si $\chi(y^{'})\neq 0$, alors $\chi_1(x)=\mu-(\chi(y))^{-1}$. On en déduit que $(\lambda-\mu)\chi(y)\chi(y^{'})=\chi(y^{'})-\chi(y)$. Si $\chi(y)\chi(y^{'})\neq 0$, on obtient $\lambda-(\chi(y))^{-1}=\mu-(\chi(y'))^{-1}$. Ainsi χ_1 prolonge χ et vérifie (i), (ii) et (iii). □

La proposition 4.1 s'étend à E_1 comme suit.

Proposition 4.4 *Soient $(E,(|.|_i)_{i\in I})$ une a.l.p-c. commutative, m-p-complète et $x\in E_1$. Alors, on a $Sp_r x=\{\chi_1(x):\chi\in\mathcal{M}^*(E_0)\}$.*

Preuve. Soient $x\in E_1$ et $\lambda\in Res(x)\cap C$. Soit $\chi\in\mathcal{M}^*(E_0)$. Par la proposition 4.3, on a $\chi_1(x)=\lambda-(\chi(y))^{-1}$. Pour tout $\mu\neq 0$,on a $\mu-y^{-1}=\mu y^{-1}(y-\mu^{-1})$. Comme y^{-1}est inversible, l'élément $(\mu-y^{-1})$ est inversible si, et seulement si, $y-\mu^{-1}$ est inversible. Si $y-\mu^{-1}$ est inversible dans E_0, alors $\mu-y^{-1}$ est inversible dans E. De plus $(\mu-y^{-1})^{-1}=\mu^{-1}(y-\mu^{-1})^{-1}y$ est régulier. Donc $\mu-y^{-1}$est inversible dans E_0. Inversement si $(\mu-y^{-1})^{-1}$ est régulier, alors $(\mu-y^{-1})^{-1}=\mu^{-1}+\mu^{-2}(y-\mu^{-1})^{-1}$. Donc $(y-\mu^{-1})^{-1}=\mu^2(\mu-y^{-1})^{-1}-\mu$ est un élément régulier. Par conséquent $(\mu-y^{-1})^{-1}\in E_0$ si, et seulement si, $(y-\mu^{-1})^{-1}\in E_0$. On en déduit que $Sp_r z=\left\{\mu^{-1}:\mu\in Sp_r y\right\}$. Donc $Sp_r x=\left\{\lambda-\mu^{-1}:\mu\in Sp_r y\right\}$ vu que $x=\lambda-z$. Par la proposition 4.1, on a $Sp_r y=\{\chi(y):\chi\in\mathcal{M}^*(E_0)\}$. En utilisant l'égalité $\chi_1(x)=\lambda-(\chi(y))^{-1}$, on obtient $Sp_r x=\{\chi_1(x):\chi\in\mathcal{M}^*(E_0)\}$. □

Voici maintenant une version globale du "*Spectral mapping theorem*".

Proposition 4.5 *Soient $(E,(|.|_i)_{i\in I})$ une a.l.p-c. m-p-complète, U un ouvert de $\overline{C}$ et x un élément de E tel que $Sp_r x\subset U$. Pour tout $f\in H(U)$, on a $f(Sp_r x)=Sp_r f(x)$.*

Preuve. Il reste à considérer le cas où $x\in E_1\backslash E_0$. Quitte à prendre la sous-algèbre commutative maximale, contenant x, on peut supposer que E est commutative. Comme $f(x)\in E_0$, on a $Sp_r f(x)=\{\chi(f(x)):\chi\in\mathcal{M}^*(E_0)\}$ et $f(Sp_r x)=\{f(\chi_1(x)):\chi\in\mathcal{M}^*(E_0)\}$. D'où le résultat vu que $\chi(f(x))=f(\chi_1(x))$.

Soit $(E, (|.|_i)_{i\in I})$ une *a.l.p-c.*, unitaire et munie d'une involution d'espace vectoriel $x \longmapsto x^*$([4]). Pour $a \in E$, on définit la partie réelle de a par $\mathrm{Re}\, a = \frac{1}{2}(a + a^*)$. Un élément $a \in E$ est dit *hermitien* (resp. *normal*) si $a = a^*$(resp. $a^*a = aa^*$). On désigne par $H(E)$ (resp. $N(E)$) l'ensemble des éléments hermitiens (resp. normaux). Une *involution* d'espace vectoriel $x \longmapsto x^*$ est dite *généralisée* si $(xy)^* = y^*x^*$ (involution d'algèbre), ou $(xy)^* = x^*y^*$ (anti-morphisme involutif), pour tous $x, y \in E$. Dans ce qui suit, on note par $|.|$ la *fonction de Ptàk* ([17]) définie, sur E, par $|a| = \rho\,(aa^*)^{\frac{1}{2}}$. □

Le résultat qui suit est une généralisation d'un lemme de J. W. Ford ([12]) sur l'existence de la racine carrée hermitienne, pour les éléments réguliers. Une version de ce lemme, dans le cas p-Banach à involution généralisée, a été obtenue dans [9]. Dans le cas localement m-convexe, des extensions de ce résultat ont été établies, par D. Sterbova, dans [19] et [20] (voir aussi [10]).

Proposition 4.6 *Soient $(E, (|.|_i)_{i\in I})$ une a.l.p-c. m-p-complète, munie d'une involution généralisée $x \longmapsto x^*$ et $h \in H(E) \cap E_0$ tel que $Sp_r h \subset \{\lambda \in C : \mathrm{Re}\,\lambda > 0\}$. Alors il existe $k \in H(E) \cap E_0$ tel que $k^2 = h$.*

Preuve. Soit $U = C\backslash R^-$. Il existe $f \in H\,(U)$ telle que $f^2(\lambda) = \lambda$ et $f(1) = 1$. Soit Γ un contour fermé contenant $Sp_r h$ dans son intérieur $int\Gamma$ et vérifiant $int\Gamma \cup \Gamma \subset U$. Posons $k = f(h) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda - h)^{-1}d\lambda$. Il est clair que $k \in E_0$. De plus $k^2 = h$. Il reste à montrer que k est hermitien. Sans perte de généralité, on peut supposer que E est commutative. La sous-algèbre E_0 est alors m-p complète, donc une réunion filtrante d'algèbres p-Banach. Ainsi, l'algèbre $E_0/RadE_0$ est m-p complète. Soit s la surjection canonique de E_0 sur $E_0/RadE_0$. On a $Sp_{E_0/RadE_0}s\,(h) = Sp_{E_0}h = Sp_r h$. Montrons que $s(k)$ est hermitien. Soient $0 < R < r_0$ tel que $Sp_r h \subset D\,(r_0, R)$ et $\overline{D\,(r_0, R)} \subset U$. Comme $E_0/RadE_0$ est à involution continue, on a $s(k)^* = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z-r_0|=R} \overline{f\,(z)}\mathrm{Re}\left[(z + s(h) - 2r_0)\,(z - s(h))^{-1}\right]\frac{|dz|}{R}$ (cf. [9]). Par ailleurs, pour tout $z \in U$, on a $f\,(\overline{z}) = \overline{f\,(z)}$. D'où $s\,(k)^* = s\,(k)$. Ainsi $k^* - k \in RadE_0$. Posons $k = u + iv$. Alors $v \in RadE_0$. Comme $k^2 = u^2 + v^2 + 2iuv = h$, on a $uv = 0$. Par ailleurs $0 \notin Sp_{E_0}k$ vu que $0 \notin Sp_{E_0}h$. Donc u est inversible. Par conséquent $v = 0$. D'où $k^* - k = 2iv = 0$. □

Voici une version du *principe du maximum*, pour les fonctions holomorphes dans les *a.l.p-c.m-p*-complètes et à éléments réguliers.

Proposition 4.7 *Soit $(E, (|.|_i)_{i\in I})$ une a.l.p-c. m-p-complète à éléments réguliers, munie d'une involution dalgèbre $x \longmapsto x^*$ continue, hermitienne et U un voisinage de $\overline{D\,(0, 1)}$. Soit x un élément normal tel que $|x| < 1$. Si $f \in H\,(U)$, alors $|f(x)| \leq$* $\sup\{|f(y)| : y \in U_e\} \leq \infty$; *où U_e est la composante connexe de l'unité dans l'ensemble des éléments unitaires $U(E) = \{x \in E : xx^* = x^*x = 1\}$.*

Preuve. Soit F la sous-algèbre fermée maximale commutative, stable par involution et contenant x. On considère la transformation de Möbius donnée, pour tout $\lambda \in \overline{D(0,1)}$, par $\Psi_x(\lambda) = (\lambda + x)(1 + \lambda x^*)$. Alors

$$Sp_r(\Psi_x(\lambda)) = \left\{ (\lambda + \chi(x)) \left(1 + \lambda \overline{\chi(x)}\right)^{-1} : \chi \in \mathcal{M}^*(F) \right\}.$$

Par conséquent $Sp_r(\Psi_x(\lambda)) \subset \overline{D(0,1)}$, pour tout $|\lambda| \leq 1$. Par le calcul holomorphe, $f(\Psi_x(\lambda))$ est bien définie pour tout $|\lambda| \leq 1$. Quitte à considérer la sous-algèbre $F/RadF$, on peut supposer que F est semi-simple ; donc la fonction de Ptàk $|.|$ est une norme d'algèbre. Soit φ dans le dual topologique de l'algèbre normée $(E, |.|)$. Considérons la fonction $\Theta(\lambda) = \exp \varphi(f(\Psi_x(\lambda)))$, pour $|\lambda| \leq 1$. Comme Θ est holomorphe sur $D(0,1)$ et continue sur $\overline{D(0,1)}$, on a $|\Theta(0)| \leq \sup\{|\Theta(\lambda)| : |\lambda| = 1\}$ par le principe du maximum. Par conséquent $\mathrm{Re}\varphi(f(x)) \leq \sup\{\mathrm{Re}\,\varphi(f(\Psi_x(\lambda))) : |\lambda| = 1\}$. D'où $\mathrm{Re}\varphi(f(x)) \leq \sup \mathrm{Re}\,\varphi(f(U_e))$. D'après le théorème de séparation ([7], p. 417), on obtient $f(x) \in \overline{\Gamma(f(U_e))}$, où $\overline{\Gamma(f(U_e))}$ désigne la fermeture de l'enveloppe convexe de $f(U_e)$ dans $(E, |.|)$. D'où $|f(x)| \leq \sup\{|f(u)| : u \in U_e\}$. □

Remarque 4.8 W. Zelazko ([23], [24] et [25]) a remarqué que, dans les algèbres normées, la propriété de bornitude locale est plus essentielle que celle de convexité locale. Il a montré qu'une grande partie de la théorie de Gelfand-Mazur reste encore valide dans la classe des algèbres p-Banach, $0 < p \leq 1$. Toutefois, son approche ne permet pas d'obtenir directement des résultats comme dans le cas Banach. Ceci est dû au fait qu'on ne peut pas toujours intégrer des fonctions à valeurs vectorielles. En fait S. Mazur et W. Orlicz ([14] et [15]) ont montré qu'un espace vectoriel topologique métrisable E est localement convexe si, et seulement si, on peut définir $\int f d\mu$, pour toute $f \in C(X, E)$ et toute mesure μ sur E, où X est un espace compact. D'autre part, D. Przeworska-Rolewicz et S. Rolewicz ([16]) ont remarqué que pour établir le calcul fonctionnel holomorphe dans les algèbres de Banach, on utilise des fonctions qui sont limites de séries convergant rapidement. Ils ont alors introduit la notion de p-admissibilité qui assure l'existence de l'intégrale au sens de Riemann des fonctions à valeurs dans une algèbre p-Banach. Cette notion est suffisante pour établir le calcul fonctionnel holomorphe dans les algèbres localement p-convexes, $0 < p \leq 1$; mais on ne sait pas si elle est encore suffisante dans les algèbres localement pseudo-convexes.

Remerciements. Les auteurs remercient vivement le Professeur A. Mallios pour ses précieuses suggestions et pour de nombreuses et stimulantes discussions accordées lors de ses visites à l'E.N.S de Rabat.

Références

[1] M. Akkar, A. El Kinani, M. Oudadess. *Calculs fonctionnels harmonique et analytique réel.* Ann. Sci. Math. Quebec 12 (1988), pp. 151-169.

[2] G. R. Allan. *A spectral theory for locally convex algebras.* Proc. London Math. Society (3) 15 (1965) pp. 399-421.

[3] G. R. Allan, H. G Dales et J. P. McClure. *Pseudo-Banach algebras*, Studia Math. XL (1971),pp. 55-69.

[4] F. F. Bonsall, J. Duncan. *Complete normed algebras.* Springer-Verlag 1973.

[5] H. Cartan. *Théories élémentaires des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes.* Hermann, Paris, 1963.

[6] M. Chahboun, A. El Kinani, M. Oudadess. *Algèbres localement uniformément A-pseudo-convexes advertiblement complètes.* Rend. Circ. Mat. Palermo. Série II Tome L (2001), pp. 271-284.

[7] N. Dunford, J. T. Schwarts. *Linear operators.* Interscience, New york, pt. I, 1958, pt. 1963.

[8] A. El Kinani. *Holomorphic functions operating in hermitien Banach algebras.* Proc. Amer. Math.Soc., 111 (4) (1991), pp. 931-939.

[9] A. El Kinani, A. Ifzarne. *Calcul harmonique dans les algèbres p-Banach involutives et applications.* Bull. Belg. Math. Soc. 8 (2001), pp. 685-697.

[10] M. Fragoulopoulou. *Symmetric topological $*$-algebras.* Applications ; Schriftenreihe Math. Ins. Univ. Münster, 3. Serie, Heft 9(1993), 1-124.

[11] K. Fan. *Analytic functions of a proper contraction.* Math. Z. 160 (1978), pp. 275-290.

[12] J. W. M. Ford. *A square root lemma for Banach $*$-algebras.* J. London Math. Soc. 42 (1967) pp. 521-522.

[13] A. Mallios. *Topological algebras. Selected topics.* North-Holland. 1986.

[14] S. Mazur and W. Orlicz. *Sur les espaces métriques linéaires.* I. Studia Math. T. X. (1948) pp. 184-208.

[15] S. Mazur and W. Orlicz. *Sur les espaces métriques linéaires.* II. Studia Math. T. XIII. (1953) pp. 137-179.

[16] D. Przewoska-Rolewicz et S. Rolewicz. *On integrals of functions with values in a complete linear metric space.* Studia Math. T. XXVI. (1966) pp. 121-131.

[17] V. Ptàk. *Banach algebras with involution.* Manuscripta Math. 6 (1972), pp. 245-290.

[18] W. Rudin. *Analyse réelle et complexe.* Masson, Paris. 1980.

[19] D. Sterbova. *Square roots and quasi-square roots in locally multiplicatively convex algebras.* Sb. Praci Prirodoved. Fak. Palaského v Olomouci Mat. 19(1980), pp.103-110.

[20] D. Sterbova. *Square roots of elements with unbounded spectrum.* Acta Univ. Palask. Olom. 79(1984), pp. 103-106.

[21] A. E. Taylor. *Spectral theory of closed distributive operators.* Acta Mathematica 84 (1950), pp. 42-49.

[22] L. Waelbroeck. *Algèbres commutatives : éléments réguliers.* Bull. Soc. Math. Belg. 9 (1957), pp. 42-49.

[23] W. Zelazko. *Selected topics in topological algebras.* Lecture notes. Series 31 (1971), Matimatisk Institut Aarhus Universiet-Aarhus.

[24] W. Zelazko. *On the locally bounded and m-convex topological algebras.* Studia Math. T. XIX. (1960) pp. 333-355.

[25] W. Zelazko. *Analytic functions in p-normed algebras.* Studia Math. T. XXI. (1962) pp. 345-350.

◇ M. Chahboun
Ecole Normale Supérieure
B.P. 5118 Takaddoum 10105 Rabat
Maroc

◇ A. El Kinani
Ecole Normale Supérieure
B.P. 5118 Takaddoum 10105 Rabat
Maroc