BULLETIN OF THE
GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 52, 2006 (143–150)

Propriétés de permanence du faisceau de Gel'fand d'algèbres topologiques

Ali Oukhouya

Abstract

In this paper we study *properties of permanence of the Gel'fand sheaf* of certain important classes of topological algebras.

Introduction

L'étude des *propriétés de permanence de la notion de localisation d'algèbres topologiques* a été déjà faite concernant certaines opérations algébriques. En particulier, la limite inductive par A.Mallios [11] et la limite projective par A.Oukhouya [16] et aussi par A.Mallios-A.Oukhouya [13] ; en se basant sur tels résultats, A.Mallios a donné des applications à la géométrie différentielle classique et à la théorie quantique des champs, et on en a extrait aussi *le théorème local* pour quelques classes d'algèbres topologiques [14]. En exprimant les éléments d'une algèbre topologique E, comme des sections $\widetilde{x}$, $x \in E$, A. Mallios a montré que la notion du faisceau de Gel'fand est d'une grande importance dans ce cadre [8 ; 11]. Ce qui nous incite à étudier des propriétés de permanence concernant les *faisceaux de Gel'fand de la limite projective*, de la *limite inductive* et du *produit cartésien*, d'algèbres topologiques. A savoir, que si E et F sont deux algèbres topologiques, les fibres du faiceau de Gel'fand du produit $E \times F$ sont des réunions disjointes de celles de E et de F, si $E = \varprojlim E_i$ est la limite projective des E_i, les fibres du faisceau de Gel'fand de E sont des limites projectives de celles des E_i , et si $E = \varinjlim E_i$ est la limite inductive des E_i, les fibres du faisceau de Gel'fand de E sont des limites inductives de celles des E_i .

1. Préliminaires

E désigne une $\mathbb{C}$-*algèbre topologique* (multiplication *séparément continue* [7]), $\mathcal{M}(E)$ son spectre (l'ensemble des caractères continus non nuls de E) muni de la topologie faible et $\mathcal{C}_c(\mathcal{M}(E))$, l'algèbre des fonctions complexes continues sur $\mathcal{M}(E)$ munie de la topologie de la convergence uniformes sur les parties compactes de $\mathcal{M}(E)$. On note

$$\mathcal{G} : E \longrightarrow \mathcal{C}_c(\mathcal{M}(E))$$

la *transformée de Gel'fand* de E définie par :

$$\mathcal{G}(x) \equiv \widehat{x} : \mathcal{M}(E) \longrightarrow \mathbb{C}; \quad f \longmapsto \widehat{x}(f) := f(x),$$

pour chaque $x \in E$. L'image de E par la transformée de Gel'fand sera notée $E^\wedge$. E est dite *semi-simple* si sa transformée de Gel'fand est injective.
Pour tout ouvert $U \subseteq \mathcal{M}(E)$, on lui associe l'ensemble

$$(*) \qquad E^\wedge|_U := \{\widehat{x}|_U,\, x \in E\} \subseteq \mathcal{C}(U)$$

Quand U décrit l'ensemble des ouverts de $\mathcal{M}(E)$, $(*)$ définit un préfaisceau de $\mathbb{C}$-algèbres topologiques de base $\mathcal{M}(E)$, appelé *préfaisceau de Gel'fand* [10 ; 11].

Définition 1.1 Soit E une algèbre topologique de spectre $\mathcal{M}(E)$. *Le faisceau* de $\mathbb{C}$-algèbres topologiques de base $\mathcal{M}(E)$ engendré par le préfaisceau de Gel'fand, est appelé *faisceau de Gel'fand* de E, noté $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{M}(E))$, ou simplement $\mathcal{E}(E)$, si aucune confusion n'en résulte (ibid.).

Définition 1.2 Pour chaque $f \in \mathcal{M}(E)$ la *fibre* correspondante (du faisceau de Gel'fand $\mathcal{E}(E)$) est définie par la relation : $\mathcal{E}_f = \varinjlim(E^\wedge|_U), \quad U \in \mathcal{V}(f)$.

2. Propriétés de permanence

Théorème 2.1 *Soient E et F deux algèbres topologiques de spectres $\mathcal{M}(E)$ et $\mathcal{M}(F)$, et soient $\mathcal{E}(E) = \sum\limits_{f\in\mathcal{M}(E)} \mathcal{E}_f$ et $\mathcal{E}(F) = \sum\limits_{g\in\mathcal{M}(F)} \mathcal{E}_g$ leurs faisceaux de Gel'fand respectifs. Le faisceau de Gel'fand du produit cartésien $\mathcal{E}(E\times F)$ est la réunion disjointe des faisceaux de Gel'fand de E et F ; viz. $\mathcal{E}(E\times F) = \mathcal{E}(E) \vee \mathcal{E}(F)$.*

Preuve. On a $\mathcal{E}(E\times F) = \sum\limits_{h\in\mathcal{M}(E\times F)} \mathcal{E}_h$, où les $\mathcal{E}_h$ $(h \in \mathcal{M}(E\times F))$ sont les fibres du faisceau de Gel'fand de $E \times F$. D'après [7 : p.254, Lemma 1.1], $\mathcal{M}(E\times F)$ est homéomorphe à la réunion disjointe de $\mathcal{M}(E)$ et $\mathcal{M}(F)$. Notons $\phi : \mathcal{M}(E\times F) \longrightarrow \mathcal{M}(E) \vee \mathcal{M}(F)$ un tel homéomorphisme ; pour $h \in \mathcal{M}(E\times F)$, ou bien il existe $f \in \mathcal{M}(E)$ tel que $h = f\circ p_1$ ou bien il existe $g \in \mathcal{M}(F)$ tel que $h = g \circ p_2$. Supposons par exemple, qu'il existe $f \in \mathcal{M}(E)$ tel que $h = f \circ p_1$ et montrons que la fibre $\mathcal{E}_h$ associé au faisceau de Gel'fand $\mathcal{E}(E\times F)$ au point h est isomorphe (isomorphisme d'algèbres) à la fibre $\mathcal{E}_f$ du faisceau de Gel'fand $\mathcal{E}(E)$ au point f. Considèrons l'application canonique

$$\rho_f \ : \mathcal{E}_f \longrightarrow \mathcal{E}_h \ \ ; \ [\widehat{x}]_f \longmapsto [\widehat{(x,0)}]_h :$$

1) ρ_f *est bien définie*, en effet : soit $(x,y)\in E^2$ tel que $[\widehat{x}]_f=[\widehat{y}]_f$; il existe un voisinage U de f tel que $\widehat{x}|_U=\widehat{y}|_U$. Pour tout élément $t\in\phi^{-1}(U)\subseteq\mathcal{M}(E\times F)$; il existe $g\in U\subseteq\mathcal{M}(E)$ tel que $t=g\circ p_1$; comme $g\in U$, on a $\widehat{x}(g)=\widehat{y}(g)$ donc

$$\begin{aligned}\widehat{(x,0)}(t)&=t(x,0)=g\circ p_1\ (x,0)=g(x)=\widehat{x}(g)=\widehat{y}(g)\\&=g(y)=g\circ p_1(y,0)=t(y,0)=\widehat{(y,0)}(t);\end{aligned}$$

et par suite $\widehat{(x,0)}|_{\phi^{-1}(U)}=\widehat{(y,0)}|_{\phi^{-1}(U)}$. Comme $\phi^{-1}(U)$ est un voisinage de h , on a $[\widehat{(x,0)}]_h=[\widehat{(y,0)}]_h$ donc $\rho_f\ (\ [\widehat{x}]_f)=\rho_f\ ([\widehat{y}]_f)$.

2) ρ_f est un *morphisme d'algèbres* : en effet, soient $(x,y)\in E^2$ et $\lambda\in\mathbb{C}$, on a $[\widehat{x}]_f\ .\ [\widehat{y}]_f=[\widehat{xy}]_f$ donc, $\rho_f\ ([\widehat{x}]_f\ .[\widehat{y}]_f\ )=\rho_f\ ([\widehat{xy}]_f\ )=[\widehat{(xy,0)}]_h=[\widehat{(x,0)(y,0)}]_h=[\widehat{(x,0)}]_h.[\widehat{(y,0)}]_h=\rho_f\ (\ [\widehat{x}]_f).\rho_f([\widehat{y}]_f)$. D'où $\rho_f\ (\ [\widehat{x}]_f.[\widehat{y}]_f)=\rho_f\ (\ [\widehat{x}]_f).\rho_f\ ([\widehat{y}]_f)$. De même, on montre que $\rho_f\ (\ [\widehat{x}]_f+\lambda[\widehat{y}]_f)=\rho_f\ (\ [\widehat{x}]_f)+\lambda\rho_f\ ([\widehat{y}]_f)$.

3) ρ_f est *injective* : Soit $x\in E$ tel que $\rho_f\ (\ [\widehat{x}]_f)=0$, on a $[\widehat{(x,0)}]_h=0$, donc il existe un voisinage V de h tel que $\widehat{(x,0)}|_V=0$; comme $\phi(h)=f\in\mathcal{M}(E)$, $h=\phi^{-1}(f)\in\phi^{-1}(\mathcal{M}(E))$. Quitte à remplacer V par $V\cap\phi^{-1}(\mathcal{M}(E))$, on peut supposer que $\phi(V)\subseteq\mathcal{M}(E)\subseteq\mathcal{M}(E)\vee\mathcal{M}(F)$. Pour $t=\phi(g)\in\phi(V)$ $(g\in V)$, on a

$$\widehat{x}(t)=t(x)=\phi(g)(x)=g\circ j_1\ (x)=g(x,0)=0.$$

D'où $\widehat{x}|_{\phi(V)}=0$; comme ϕ est un homéomorphisme, $\phi(V)$ est un voisinage de f et par suite $[\widehat{x}]_f=0$.

4) Il reste à montrer que ρ est *surjective*. On a

$$\mathcal{E}_h=\{[\widehat{(x,y)}]_h:(x,y)\in E\times F\}$$

et

$$\rho(\mathcal{E}_f)\ =\ \{[\widehat{(x,0)}]_h:x\in E\}$$

Soit $(x,y)\in E\times F$, montrons que $[\widehat{(x,y)}]_h=[\widehat{(x,0)}]_h$: pour $h'\in\phi^{-1}(\mathcal{M}(E))$, il existe $f'\in\mathcal{M}(E)$ tel que $h'=f'\circ p_1$, donc $h'(x,y)=f'(x)=h'(x,0)$. D'où $\widehat{(x,y)}(h')=\widehat{(x,0)}(h')\quad\forall h'\in\phi^{-1}(\mathcal{M}(E))$, c'est-à-dire

$$\widehat{(x,y)}|_{\phi^{-1}(\mathcal{M}(E))}=\widehat{(x,0)}|_{\phi^{-1}(\mathcal{M}(E))};$$

Or, $\mathcal{M}(E)$ est un ouvert de $\mathcal{M}(E)\vee\mathcal{M}(F)$, ϕ est continue donc $\phi^{-1}(\mathcal{M}(E))$ est un voisinage de h et par suite $[\widehat{(x,y)}]_h=[\widehat{(x,0)}]_h$. Donc ρ_f est surjective et $\mathcal{E}_h=\mathcal{E}_f$, à un *isomorphisme d'algèbres près.* ■

Dans le théorème précédent on a examiné le côté algébrique ; en le complétant nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 2.2 *Soient E et F deux algèbres topologiques de spectres $\mathcal{M}(E)$ et $\mathcal{M}(F)$, respectivement. Alors, le faisceau de Gel'fand du produit cartésien $E \times F$ est donné par la relation,*

$$\mathcal{E}(E \times F) = \mathcal{E}(E) \vee \mathcal{E}(F),$$

à un homéomorphisme près, le second membre étant munie de la toplogie de la réunion disjointe (:"topologie somme").

Preuve. On considère la bijection ρ établie au théorème précédent, viz. $\rho : \mathcal{E}(E) \vee \mathcal{E}(F) \longrightarrow \mathcal{E}(E \times F)$, telle que

$$\rho([\widehat{x}]_f) = [\widehat{(x,0)}]_h \quad \text{si} \quad [\widehat{x}]_f \in \mathcal{E}(F), \quad \text{où} \quad h = f \circ p_1 \quad \text{et}$$
$$\rho([\widehat{y}]_g\ ) = [\widehat{(0,y)}]_{h'} \quad \text{si} \quad [\widehat{y}]_g \in \mathcal{E}(F), \quad \text{où} \quad h' = g \circ p_2$$

- Montrons que ρ *est ouverte* : Une base de topologie du faisceau de Gel'fand $\mathcal{E}(E)$ de E est donnée par $\beta = \{\widetilde{x}(U)$, tels que $x \in E$ et U un ouvert de $\mathcal{M}(E)\}$ et celle du faisceau de Gel'fand $\mathcal{E}(F)$ de F est donnée par $\beta' = \{\widetilde{y}(V), y \in F$ et V un ouvert de $\mathcal{M}(F)$ $\}$. Il suffit donc de montrer que $\widetilde{x}(U)$ et $\widetilde{y}(V)$ sont des ouverts de $\mathcal{E}(E \times F)$. Soient $(x,y) \in E \times F$ et U et V deux ouverts de $\mathcal{M}(E)$ et $\mathcal{M}(F)$, respectivement. On a : $\widetilde{x}(U) = \{\rho(\widetilde{x}(f)), f \in U\} = \{\rho([\widehat{x}]_f),\ f \in U\} = \{[\widehat{(x,0)}]_h\ , f \in U\} = \widehat{(x,0)}(\phi^{-1}(U))$ ($\phi : \mathcal{M}(E \times F) \longrightarrow \mathcal{M}(E) \vee \mathcal{M}(E)$ est l'homéomorphisme établi au Théorème 2.1, voir aussi [7 : Lemme 1-1 p ;205]). D'autre part, $\phi^{-1}(U)$ est un ouvert du $\mathcal{M}(E \times F)$, donc $\widehat{(x,0)}$ $(\phi^{-1}(U))$ est un ouvert du faisceau de Gel'fand $\mathcal{E}(E \times F)$ de $E \times F$, d'où ρ est ouverte.
- ρ est *continue*, en effet : la topologie de $\mathcal{M}(E \times F)$ est engendrée par l'ensemble $\{\phi^{-1}(U) \vee \phi^{-1}(V)$, tels que U ouvert de $\mathcal{M}(E)$ et V ouvert de $\mathcal{M}(F)$ $\}$, donc la topologie de $\mathcal{E}(E \times F)$ est engendré par $\{\widetilde{(x,y)}\ \phi^{-1}(U) \vee \widetilde{(x,y)}\ \phi^{-1}(V)$, où U est un ouvert de $\mathcal{M}(E)$ et V est un ouvert de $\mathcal{M}(F)$ $\}$. On a

$$\begin{aligned} \widehat{(x,y)}(\phi^{-1}(U)) &= \{\widehat{(x,y)}(\phi^{-1}(f)), f \in U \subseteq \mathcal{M}(E)\} \\ &= \{\widehat{(x,y)}(f \circ p_1\ ),\ f \in U \subseteq \mathcal{M}(E)\} \\ &= \{[\widehat{(x,y)}]_{f \circ p_1}\ , f \in U \subseteq \mathcal{M}(E)\}; \end{aligned}$$

et pour tout $g \in \mathcal{M}(E)$ on a : $g \circ p_1\ (x,y) = g(x) = g \circ p_1\ (x,0)$. Donc $\widehat{(x,y)}|_{\phi^{-1}(\mathcal{M}(E))} = \widehat{(x,0)}|_{\phi^{-1}(\mathcal{M}(E))}$; et comme $\phi^{-1}(\mathcal{M}(E))$ est un voisinage de $\phi^{-1}(f)$ dans $\mathcal{M}(E \times F)$, on a : $[\widehat{(x,y)}]_{\phi^{-1}(f)} = [\widehat{(x,0)}]_{\phi^{-1}(f)}$; d'où

$$\begin{aligned} \widehat{(x,y)}(\phi^{-1}(U)) &= \{[\widehat{(x,0)}]_{\phi^{-1}(f)}, \quad f \in U \subseteq \mathcal{M}(E)\} \\ &= \{\rho([\widehat{x}]_f), \quad f \in U \subseteq \mathcal{M}(E)\} = \rho(\widetilde{x}(U)), \end{aligned}$$

par suite $\widehat{(x,y)}(\phi^{-1}(U)) = \rho(\widetilde{x}(U))$, donc $\widetilde{x}(U)(= \rho^{-1}((x,y)\phi^{-1}(U)))$ est un ouvert de $\mathcal{E}(E)$. De même, on montre que $\widetilde{y}(V)(= \rho^{-1}((x,y)\phi^{-1}(V)))$ est un ouvert de $\mathcal{E}(F)$. Donc ρ est continue. ■

Soient E et F deux algèbres topologiques , on sait que $\beta = \{\widetilde{x}(U)$, $x \in E$ et U ouvert de $\mathcal{M}(E)\}$ est une base de topologie du faisceau de Gel'fand $\mathcal{E}(E)$ de E , de même $\beta' = \{\widetilde{y}(V)$, tels que $y \in F$ et V est un ouvert de $\mathcal{M}(F)\}$ est une base de topologie de F.
De la preuve de la proposition ci-dessus, découle aussi le résultat suivant :

Corollaire 2.3 *Une base de topologie du faisceau de Gel'fand du produit cartésien $E \times F$ est donnée par*

$$\beta \vee \beta' = \{\widetilde{x}(U) \vee \widetilde{y}(V); (x,y) \in E \times F,\ U \text{ un ouvert de } \mathcal{M}(E) \text{ et } V \text{ un ouvert de } \mathcal{M}(F)\}.$$

Théorème 2.4 *Soit $(E_i\ , p_{ij})_{i\ \in\ I}$ un système projectif strictement dense d'algèbres topologiques et $E = \varprojlim E_i$, sa limite projective. Les fibres du faisceau de Gel'fand de E sont des limites projectives de celles des E_i* , viz. on a $\mathcal{E}_f = \varprojlim \mathcal{E}_{f_i}$, $f \in \mathcal{M}(E)$.

Preuve. Soient $p_i\ : E \longrightarrow E_i$, $p_{ij}\ : E_j\ \longrightarrow E_i$, les applications de transition du système projectif, on considère leurs transposées

$$\rho_i\ =\ {}^t p_i\ : \mathcal{M}(E_i\ ) \longrightarrow \mathcal{M}(E) \quad \text{et} \quad \rho_{ij}\ =\ {}^t p_{ij}\ :\ \mathcal{M}(E_i\ ) \longrightarrow \mathcal{M}(E_j\ ),$$

on a $\mathcal{M}(E) = \varinjlim \mathcal{M}(E_i\ )$[7 : p.175, Lemma7.1] et $p_i\ (E_i\ ) = E$, de plus

$$E = \varprojlim E_i\ = \varprojlim \overline{p_i\ (E)} = \varprojlim p_i\ (E) \ \text{ et}$$
$$\mathcal{M}(E_i\ ) = \mathcal{M}(\overline{p_i\ (E)}) = \mathcal{M}(p_i\ (E)).\text{[ibid]}$$

on suppose, quitte à remplacer les E_i par les $p_i\ (\ E_i\ )$, que les applications de transition sont surjectives. Pour $f\ \in\ \mathcal{M}(E)$ on pose : $I_f\ =\ \{\ i\ \in\ I,$ tel que $f\ \in \rho_i\ (\mathcal{M}(E_i\ )\ )\ \}$. Puisque $\mathcal{M}(E)\ =\ \bigsqcup_{i\ \in\ I} \rho_i\ (\mathcal{M}(E_i\ )\ )$, I_f est une partie non vide de I. Pour tout couple $(i,j) \in I_f^2$, il existe $k \in I$ tel que $k \geq i$ et $k \geq j$ donc $\rho_i\ (\mathcal{M}(E_i\ )\ ) \subseteq \rho_k\ (\mathcal{M}(E_k\ )\ )$. Or $f \in \rho_i\ (\mathcal{M}(E_i\ )\ )$, donc $f \in \rho_k\ (\mathcal{M}(E_k\ )\ )$ et par suite $k \in I_f$, ce qui entraîne que $(I_f\ , \leq)$ est filtrant à droite. Pour tout $i \in I_f$, il existe $f_i\ \in \mathcal{M}(E_i\ )$ tel que $f = \rho_i\ (f_i\ )$., on peut se restreindre à une suite généralisée $(f_i\ )_{i\ \in\ I_f}$ de sorte que I_f vérifie

$$\rho_{ij}\ (f_i\ ) = f_j\ ,\ \forall (i,j) \in I_f^2\ : i \leq j.$$

On considère le système projectif $(\mathcal{E}_{f_i}, t_{ij})_{i\ \in\ I_f}$, avec pour tout $i \leq j$

$$t_{ij} : \mathcal{E}_{f_j}\ \longrightarrow \mathcal{E}_{f_i}\quad ,\quad [\widehat{x}\ ]_{f_i}\ \longmapsto [\widehat{p_{ij}\ (x)}]_{f_i}\ \ ,$$

et soit $X = \varprojlim \mathcal{E}_{f_i}$ sa limite projective et $t_i : X \longrightarrow \mathcal{E}_{f_i}$ les applications canoniques. Pour tout $i \in I_f$ soit

$$\theta_i : \mathcal{E}_f \longrightarrow \mathcal{E}_{f_i} : [\widehat{x}\,]_f \longmapsto [\widehat{p_i\,(x)}]_f\ ;$$

pour tout $i \leq j$ on a $\theta_i = t_{ij} \circ \theta_j$; donc $(\mathcal{E}_{f_i}, t_{ij}, \mathcal{E}_f, \theta_i)$ est un système projectif d'applications, donc d'après le théorème universel, il existe une application $\theta : \mathcal{E}_f \longrightarrow X$ telle que pour tout $i \in I_f$, $\theta_i = t_i \circ \theta$; on a donc

$$\theta_i(\,[\widehat{x}]_f) = [\widehat{p_i\,(x)}]_{f_i} = t_i(\theta([\widehat{x}]_f\,)),\ \forall x \in E,\ \forall\, i \in I_f \ \text{ et}$$
$$\theta([\widehat{x}]_f\,) = ([\widehat{p_i\,(x)}]_{f_i}\,)_{i\,\in\, I_f} \in \prod_{i\,\in\, I_f} \mathcal{E}_{f_i}.$$

Et comme $X = \varprojlim \mathcal{E}_{f_i}$, θ est surjective. Montrons que θ est injective, en effet : soit $[\widehat{x}]_f \in \mathcal{E}_f$ tel que $\theta([\widehat{x}]_f\,) = 0$; donc pour tout $i \in I_f$ on a $[\widehat{p_i\,(x)}]_{f_i} = 0$, par suite il existe un voisinage $U_i \subseteq \mathcal{M}(E_i\,)$ de f_i tel que $\widehat{p_i\,(x)}|_{U_i} = 0$, donc $(\widehat{x} o \rho_i\,)|_{U_i} = 0$ et $\widehat{x}|_{\rho_i\,(U_i)} = 0$. $U = \bigsqcup_{i \in I_f} \rho_i\,(U_i\,)$ est un voisinage de f dans $\mathcal{M}(E)$ et $\widehat{x}|_U = 0$, donc $[\widehat{x}]_f = 0$. On en déduit que θ est un *isomorphisme d'algèbres*, par suite on obtient, $\mathcal{E}_f = \varprojlim \mathcal{E}_{f_i}$. ■

Théorème 2.5 *Soit* $(E_i\,, p_{ij})_{i\,\in\, I}$ *un système inductif d'algèbres topologiques et* $E = \varinjlim E_i$, *sa limite inductive. Les fibres du faisceau de Gel'fand de* E *sont des limites inductives de celles des* E_i , i.e., $\mathcal{E}_f = \varinjlim \mathcal{E}_{f_i}$, $f \in \mathcal{M}(E)$.

Preuve. Pour $(i,j) \in I^2$, $i \leq j$, soient $j_i : E_i \longrightarrow E$ et $j_{ij} : E_i \longrightarrow E_j$ les applications de transition du système inductif $\mathcal{M}(E) = \varprojlim \mathcal{M}(E_i\,)$, pour tout $(i,j) \in I^2$, $i \leq j$, les applications de transition sont définies par

$$\rho_i = {}^t j_i : \mathcal{M}(E\,) \longrightarrow \mathcal{M}(E_i) \ \ \textit{et} \ \ \rho_{ij} = {}^t j_{ij} : \mathcal{M}(E) \longrightarrow \mathcal{M}(E_i\,).$$

Pour $f \in \mathcal{M}(E\,)$, il existe $(\,f_i)_{i\,\in\, I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{M}(E_i\,)$, tel que $\rho_{ij}\,(f_j\,) = f_i \quad \forall\,(i,j) \in I^2$ $(i \leq j)$, car $f = (\,f_i)_{i\,\in\, I} \in \varprojlim \mathcal{M}(E_i\,)$. Montrons que $\mathcal{E}_f = \varinjlim \mathcal{E}_{f_i}$: Pour $(i,j) \in I^2$, $i \leq j$, on définit l'application canonique suivante

$$t_{ij} : \mathcal{E}_{f_i} \longrightarrow \mathcal{E}_{f_j} \ \ , \ \ [\widehat{x}]_{f_i} \longmapsto [\widehat{j_{ij}\,(x)}]_{f_j}\ .$$

On vérifie facilement que $(\mathcal{E}_{f_i}\,, t_{ij})_{i\,\in I}$ est un système inductif, notons $Y = \varinjlim \mathcal{E}_{f_i}$ sa limite inductive et pour tout $i \in I$, $t_i : \mathcal{E}_{f_i} \longrightarrow Y$ ses applications canoniques. Pour tout $i \in I$ soit

$$\theta_i : \mathcal{E}_{f_i} \longrightarrow \mathcal{E}_f \ \ , \ \ [\widehat{x}]_{f_i} \longmapsto [\widehat{j_i\,(x)}]_f;$$

on a $\theta_i = \theta_j \circ t_{ij}$, $\forall\ (i,j) \in I^2$ avec $i \leq j$; donc $(\mathcal{E}_{f_i}, t_{ij}, \mathcal{E}_f, \theta_i)$ est un système inductif d'applications, par suite il existe une application $\theta : Y \longrightarrow \mathcal{E}_f$ telle que pour tout $i \in I$ on a $\theta_i = \theta \circ t_i$; donc θ est surjective, car $Y = \sum_{i \in I} t_i\ (\mathcal{E}_{f_i})$ et $\mathcal{E}_f = \sum_{i \in I} \theta_i\ (\mathcal{E}_{f_i})$.

Vérifions que θ est *injective* : soit $\alpha \in Y$ tel que $\theta(\alpha) = 0$, il existe $i \in I$ tel que $\alpha = t_i\ ([\widehat{x}]_{f_i})$, donc $\theta(t_i\ ([\widehat{x}]_{f_i})) = [\widehat{j_i\ (x)}]_f = 0$, par suite il existe un voisinage U de f dans $\mathcal{M}(E)$ tel que $\widehat{j_i\ (x)}|_U = 0$; comme $\widehat{j_i\ (x)} = \widehat{x} \circ \rho_i$, on a $\widehat{x}|_{\rho_i(U)} = 0$. Or $\rho_i\ (U)$ est un voisinage de f_i, $[\widehat{x}]_{f_i} = 0$, d'où $\alpha = t_i\ ([\widehat{x}]_{f_i}) = 0$. Par suite $\mathcal{E}_f = \varinjlim \mathcal{E}_{f_i}$, à un *isomorphisme d'algèbres près.* ■

Références

[1] R. Arens, *The problem of locally-A functions in a commutative Banach algebra A.* Trans. Amer. Math. Soc. 104(1962), 24-36.

[2] N. Bourbaki, *Théorie des ensembles, Chap. 3.* Hermann, Paris, 1967.

[3] N. Bourbaki, *Topologie générale , Chap. 1-4.* Hermann, Paris, 1971.

[4] R.M. Brooks, *Partitions of unity in F-algebras.* Math Ann. 77(1968), 265-272.

[5] I. Gel'fand, D. Raikov and G. Silov, *Commutative Normed Rings.* Chelsey, New York, 1964.

[6] R.A. Hassani, A. Blali, A. Oukhouya, *Clôture locale des algèbres topologiques.* Scient. Math. Japon. 61 (2005), 379-383.

[7] A. Mallios, *Topological algebras. Selected Topics.* North-Holland, Amsterdam, 1986.

[8] A. Mallios, *On geometric topological algebras.* J. Math. Anal. Appl. 172(1993), 301-322.

[9] A. Mallios, *The de Rham-Kähler complex of the Gel'fand sheaf of a topological algebra.* J. Math. Anal. Appl. 175(1993), 143-168.

[10] A. Mallios, *Geometry of Vector Sheaves. An Axiomatic Approach to Differential Geometry, Vols 1-2.* Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.

[11] A. Mallios, *On localising topological algebras.* Contemporary Math. 341(2004), 79-95.

[12] A. Mallios et A. Oukhouya, *k-algèbres topologiques.* Scient. Math. Japon, 61, (2005), 385-390.

[13] A. Mallios et A. Oukhouya, *La complétude vis-à-vis de localisation d'algèbres topologiques.* Scient. Math. Japon. 61, (2005), 391-396.

[14] A. Mallios et A. Oukhouya, *Sur la localisation du produit tensoriel topologique d'algèbres topologiques.* Bull. soc. math. Grèce. (à paraître)

[15] E.A. Michael, *Locally multiplicatively-convex topological algebras*. Mem. Amer. Math. Soc. AMS. 11(1952).

[16] A. Oukhouya, *On local topological algebras*. Scient. Math. Japon. 57(2003), 493-497. [elect. version : e7, 277-281].

◇ Ali Oukhouya
Ecole normale supérieure
Route Essaouira, B.P 2400
Marrakech, Maroc
aoukhouya@hotmail.com