BULLETIN OF THE
GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 52, 2006 (125–132)

Sur la localisation du produit tensoriel topologique d'algèbres topologiques

Anastasios Mallios and Ali Oukhouya

Abstract

Our aim in the following discussion is to give sufficient conditions, so that a topological tensor product algebra be also local. As a byproduct, one proves, for instance, that a topological tensor product algebra can not be local, if one of the factor algebras is not. In that context, we further consider the form of the Gel'fand sheaf of a topological tensor product (locally convex) algebra, as well.

Introduction

La catégorie des algèbres topologiques locales, introduite par A. Mallios [8], [11], qui se base sur la théorie des faisceaux, joue un rôle fondamental pour déterminer la structure (intérieure) de plusieurs disciplines mathématiques et aussi physiques, comme par exemple, la géométrie différentielle et la physique quantique.

Cette étude est essentiellement la stabilité de la dite catégorie par des différentes opérations algébriques ; une continuation en effet de notre article précédent [13] où on a donné des conditions pour qu'une telle classe (classe d'algèbres topologiques locales) soit stable par le foncteur *limite projective*, à savoir ; il a été prouvé qu' *une limite projective E, d'algèbres topologiques locales, est locale si et seulement si sa transformée de Gel'fand $E^{\wedge}$ est fermée dans $\mathcal{C}_c(\mathcal{M}(E))$* (ibid., Théorème 2.4).

Donc pour le produit tensoriel topologique $E \otimes_\tau F$ de deux algèbres topologiques (localement convexes) locales E et F, sa localisation peut être obtenue, à partir de la fermeture de $(E \otimes_\tau F)^{\wedge}$, sous une *condition (P)* convenable, concernant la "*partition de l'unitè*" (Définition 2.2 et Théorème 2.5). D'autre part, nous montrons, que l'algèbre produit tensoriel topologique ne peut pas être locale, dans le cas semi-simple, si l'un des deux facteurs ne l'est pas (Proposition 2.1).

Dans la seconde partie de cet article nous exprimons *le faisceau de Gel'fand du produit tensoriel topologique* $E \otimes_\tau F$ en fonction de ceux de E et F (Théorème 3.1).

1. Préliminaires

E désigne une $\mathbb{C}$-algèbre topologique (multiplication *séparément continue* [7]), $\mathcal{M}(E)$ son spectre (l'ensemble des caractères continus non nuls de E) muni de la topologie faible et $\mathcal{C}_c(\mathcal{M}(E))$ l'algèbre des fonctions complexes continues sur $\mathcal{M}(E)$, munie de la topologie de la convergence uniformes sur les parties compactes de $\mathcal{M}(E)$. On note

$$\mathcal{G} : E \longrightarrow \mathcal{C}_c(\mathcal{M}(E))$$

la *transformée de Gel'fand* de E définie par :

$$\mathcal{G}(x) \equiv \widehat{x} : \mathcal{M}(E) \longrightarrow \mathbb{C}; \quad f \longmapsto \widehat{x}(f) := f(x),$$

pour chaque $x \in E$. L' image de E par la transformée de Gel'fand sera notée $E^{\wedge}$. E est dite *semi-simple* si sa transformée de Gel'fand est injective.
Pour tout ouvert $U \subset \mathcal{M}(E)$, on lui associe l'ensemble

$$E^{\wedge}|_U := \{\widehat{x}|_U, x \in E\} \subseteq \mathcal{C}(U). \tag{*}$$

Quand U décrit l'ensemble des ouverts de $\mathcal{M}(E)$, $(*)$ définit un préfaisceau de $\mathbb{C}$-algèbres topologiques de base $\mathcal{M}(E)$, appelé *préfaisceau de Gel'fand* [10].

Définition 1.1 Soit E une algèbre topologique de spectre $\mathcal{M}(E)$. *Le faisceau* de $\mathbb{C}$-algèbres topologiques de base $\mathcal{M}(E)$ engendré par le préfaisceau de Gel'fand, est appelé *faisceau de Gel'fand* de E, noté $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{M}(E))$, ou simplement $\mathcal{E}(E)$, si aucune confusion n'en résulte (ibid.).

Définition 1.2 Pour chaque $f \in \mathcal{M}(E)$ la *fibre* correspondante (du faisceau de Gel'fand $\mathcal{E}(E)$) est définie par la relation; $\mathcal{E}_f := \varinjlim(E^{\wedge}|_U), \quad U \in \mathcal{V}(f)$.

Définition 1.3 On dit qu'une *fonction* $\alpha : \mathcal{M}(E) \longrightarrow \mathbb{C}$, *appartient localement* à E, si pour tout f appartenant à $\mathcal{M}(E)$, il existe un élément x de E et un voisinage U de f tels que les restrictions à U des fonctions α et $\hat{x}$ coïncident, ça veut dire, on a, $\alpha|_U = \hat{x}|_U$.

Définition 1.4 *Une algèbre topologique* E est dite *locale*, si toute fonction α appartenant localement à E, lui appartient globalement (i.e. $\exists\, x \in E$ tel que $\alpha = \widehat{x}$).

Lemme 1.5 (A.Mallios, 1964) *Soient E et F deux algèbres localement convexes de spectres $\mathcal{M}(E)$ et $\mathcal{M}(F)$. Alors, le spectre du produit tensoriel topologique $E \otimes_\tau F$ est le produit cartésien des spectres de E et de F : $\mathcal{M}(E \otimes_\tau F) = \mathcal{M}(E) \times \mathcal{M}(F)$, à un homéomorphisme près.* (cf. [7, p.407, Lemma 1.1])

2. Localisation du produit tensoriel

Commençons d'abord par le résultat suivant.

Proposition 2.1 *Soient E et F deux algèbres localement convexes semi-simples ; si $E\otimes_\tau F$ est locale, alors E et F sont aussi locales.*

Preuve. Soit $\alpha : \mathcal{M}(\mathrm{E}) \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction appartenant localement à $E^\wedge$. On fixe un élément non nul y de F, et on considère l'application suivante :

$$\delta : \mathcal{M}(E\otimes_\tau F) \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{à} \quad f\otimes g \longmapsto \alpha(f).\widehat{y}(g).$$

- Montrons que δ *appartient localement* à $(E\otimes_\tau F\ )^\wedge$: Soit $f\otimes g$ un élément de $\mathcal{M}(E\otimes_\tau F)$, il existe un voisinage U de f dans $\mathcal{M}(E)$ et un élément x de E tels que $\alpha|_U = \widehat{x}|_U$, donc pour tout $h\in U$ et $g\in \mathcal{M}(F)$ on a, $\delta(h\otimes g) = \alpha(h).\widehat{y}(g) = \widehat{x}(h).\widehat{y}(g) = \widehat{x}\otimes\widehat{y}(h\otimes g)$, par suite $\delta|_{U\otimes\mathcal{M}(F)} = \widehat{(x\otimes y)}|_{U\otimes\mathcal{M}(F)}$.
- α *appartient globalement* à $E^\wedge$: en effet, puisque $E\otimes_\tau F$ est locale et δ lui appartient localement, il existe un élément $z = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\otimes y_i$ de $E\otimes F$ tel que $\delta = \widehat{z}$; par suite pour tout couple $(f,g)\in \mathcal{M}(E)\times\mathcal{M}(F)$ on a $\alpha(f).\widehat{y}(g) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i).g(y_i)$. F *étant semi-simple* et y non nul, donc il existe $g\in\mathcal{M}(F)$, tel que $\widehat{y}(g) = g(y)$ est non nul, alors

$$\alpha(f) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{g\ (\ y_i)}{g\ (\ y)}x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{g\ (\ y_i)}{g\ (\ y)}x_i\right) \qquad \forall f\in\mathcal{M}(E),$$

d'où $\alpha = \widehat{x}$, avec $x = \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{g\ (\ y_i)}{g\ (\ y)}x_i$. On en déduit que E *est locale*, et on montre de même que F est aussi locale. ■

Nous s'intéressons mainteant au sens inverse de la proposition ci-dessus.

Définition 2.2 On dit qu'une algèbre topologique E vérifie la *propriété* (P), si toute famille finie $(U_i)_{i=1,\ldots,n}$ d'ouverts de $\mathcal{M}(E)$ admet une partition de l'unité par des fonctions $(h_i)_{i=1,\ldots,n}$ appartenant localement à $E^\wedge$, c'est-à-dire :

$$\sum_{i=1}^{n} h_i = 1 \quad \textit{avec} \quad \mathit{Supph}_i \subseteq U_i \quad \textit{et} \quad h_i\geq 0, \quad \textit{pour tout} \quad i\in\{1,\ldots,n\}\subseteq\mathbb{N}.$$

Exemple. *L'algèbre* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes, munie de la topologie de la convergence uniforme, *vérifie la propriété* (P).

Proposition 2.3 *Soient E et F deux algèbres topologiques (localement convexes) locales. Si α est une fonction de $\mathcal{C}(\mathcal{M}(E))\otimes\mathcal{C}(\mathcal{M}(F))$ appartenant localement à $(E\otimes_\tau F)^\wedge$, elle appartient aussi globalement à $(E\otimes_\tau F)^\wedge$.*

Preuve. Par hypothèse $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \otimes \beta_i$, où $\alpha_i \in \mathcal{C}(\mathcal{M}(E))$ et $\beta_i \in \mathcal{C}(\mathcal{M}(F))$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$. Alors les α_i et les β_i appartiennent localement à $E^\wedge$ et $F^\wedge$ respectivement, en effet : On peut supposer que les deux familles $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ et $\{\beta_1, ..., \beta_n\}$ sont linéairement indépendantes, par suite il existe une familles de caractères $\{g_1, ..., g_n\} \subseteq \mathcal{M}(F)$ telle que la matrice $A = (\beta_j(g_i))_{ij}$ soit inversible. Soit $f \in \mathcal{M}(\mathrm{E})$, on a

$$\begin{aligned} \alpha_{g_1}(f) =& \alpha(f \otimes g_1) = \beta_1(g_1)\alpha_1(f) + ... + \beta_n(g_1)\alpha_n(f) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{g_n}(f) =& \alpha(f \otimes g_n) = \beta_1(g_n)\alpha_1(f) + ... + \beta_n(g_n)\alpha_n(f), \end{aligned}$$

comme pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, α_{g_i} appartient localement à $E^\wedge$, il existe une famille $\{x_1, ..., x_n\}$ d'éléments de E et un voisinge U de f tels que $\alpha_{g_i}|_U = \widehat{x}_i|_U \quad \forall\ i \in \{1, ..., n\}$. Donc pour tout $h \in U$,

$$A(\alpha_1(h), ..., \alpha_n(h)) = (\widehat{x}_1(h), ..., \widehat{x}_n(h)).$$

A étant inversible, alors

$$(\alpha_1(h), ..., \alpha_n(h)) = A^{-1}(\widehat{x}_1(h), ..., \widehat{x}_n(h)) = (\widehat{y}_1(h), ..., \widehat{y}_n(h)),$$

d'où pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $\alpha_i|_U = \widehat{y}_i|_U$ et α_i appartient localement à $E^\wedge$.
On montre de la même manière que β_i appartient localement à $F^\wedge$. Comme E et F sont locales, il existe deux familles d'éléments $\{z_1, ..., z_n\} \subseteq E$ et $\{t_1, ..., t_n\} \subseteq F$ telles que pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $\alpha_i = \widehat{x}_i$ et $\beta_i = \widehat{y}_i$, par suite $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \widehat{x}_i \otimes \widehat{y}_i$, alors α appartient globalement à $(E \otimes_\tau F)^\wedge$. ∎

Lemme 2.4 *Soient E et F deux algèbres topologiques. Si E vérifie la propriété (P), toute fonction α appartenant localement à $(E \otimes_\tau F)^\wedge$ peut être approchée par une suite d'éléments de $\mathcal{C}(\mathcal{M}(E)) \otimes \mathcal{C}(\mathcal{M}(F))$ de la forme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \otimes \beta_i$, où les α_i et les β_i appartiennent localement à $E^\wedge$ et à $F^\wedge$, respectivement.*

Preuve. Soit α une fonction appartenant localement à $(E \otimes_\tau F)^\wedge \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{M}(E) \times \mathcal{M}(F))$, et soit V un voisinage de 0 dans $\mathcal{C}(\mathcal{M}(E) \times \mathcal{M}(F))$. On montre l'existence d'un élément $z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \otimes \beta_i$ de $\mathcal{C}(\mathcal{M}(E)) \otimes \mathcal{C}(\mathcal{M}(F))$, tel que $\alpha - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \otimes \beta_i \in V$, et α_i et β_i appartiennent localement à $E^\wedge$ et $F^\wedge$ respectivement ; en effet : $\mathcal{C}(\mathcal{M}(E) \times \mathcal{M}(F))$ étant muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de $\mathcal{M}(\mathrm{E}) \times \mathcal{M}(F)$, on peut supposer l'existence d'un réel $\varepsilon > 0$ et de deux compacts K et K' de $\mathcal{M}(\mathrm{E})$ et $\mathcal{M}(F)$ respectivement, tels que

$$V = S_{K \times K'}(\varepsilon) = \{\beta \in \mathcal{C}(\mathcal{M}(E) \times \mathcal{M}(F), \ \text{ tel que } |\beta(f,g)| \leq \varepsilon \quad \forall (f,g) \in K \times K'\}.$$

Nous considérons la fonction, $\widetilde{\alpha} : \mathcal{M}(\mathrm{E}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{M}(F))$, à $f \longmapsto \alpha_f = \alpha(f,.)$. Comme $\widetilde{\alpha}$ est continue, pour tout $f \in \mathcal{M}(E)$ il existe un voisinage ouvert U_f de f tel que, $\widetilde{\alpha}(U_f) \subseteq \widetilde{\alpha}(f) + S_{K'}(\varepsilon)$, où $S_{K'}(\varepsilon) = \{ \beta \in \mathcal{C}(\mathcal{M}(F), \text{tel que } |\beta(g)| \leq \varepsilon \ \ \forall g \in K' \}$, donc

$$| \alpha(h,g) - \alpha(f,g) | \leq \varepsilon \quad \forall h \in U_f \ \ \forall g \in K'.$$

Puisque K est compact, on peut extraire de la famille d'ouverts $(U_f)_{f \in \mathcal{M}(E)}$ un recouvrement fini $U_{f_1}, ..., U_{f_m}$ de K. Par suite ; pour tout $i \in \{1, ..., m\}$,

$$| \alpha(h,g) - \alpha(f_i,g) | \leq \varepsilon \quad \forall h \in U_{f_i} \ \ et \ \ \forall g \in K'.$$

D'autre part, E vérifie la propriété (P), donc il existe une partition de l'unité par des fonctions $(h_i)_{i=1,...,m}$, appartenant localement à $E^{\wedge}$.

On prend $z = \sum\limits_{i=1}^{m} h_i \otimes \alpha_{f_i}$, pour $i \in \{1, ..., m\}$, h_i appartient localement à $E^{\wedge}$ et α_{f_i} appartient localement à $F^{\wedge}$. D'autre part, pour tout $f \in K$ et $g \in K'$

$$\left| \alpha(f,g) - \sum_{i=1}^{m} h_i(f).\alpha_{f_i}(g) \right| \leq \sum_{i=1}^{m} h_i(f).[\alpha(f,g) - \alpha(f_i,g)].$$

De plus, si $f \in U_{f_i}, | \alpha(h,g) - \alpha(f_i,g) | \leq \varepsilon$ et si $f \notin U_{f_i}$, $h_i(f) = 0$ et comme $K \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m} U_i$. On a

$$\sum_{i=1}^{m} h_i(f).[\alpha(f,g) - \alpha(f_i,g)] \leq \sum_{i=1}^{m} h_i(f).\varepsilon = \varepsilon \ \ \forall f \in K \ \ et \ \ \forall g \in K',$$

$$\left| \alpha(f,g) - \sum_{i=1}^{m} h_i(f).\alpha_{f_i}(g) \right| \leq \varepsilon \ \ \forall f \in K \ \ et \ \ \forall g \in K'.$$

D'où, $\alpha - \sum\limits_{i=1}^{m} h_i \otimes \alpha_{f_i} \in S_{K \times K'}(\varepsilon)$. ■

Le théorème suivant nous donne une caractérisation, concernant *la localisation du produit tensoriel topologique*, comme il en découle de deux résultats ci-dessus.

Théorème 2.5 *Soient E et F deux algèbres localement convexes locales dont les spectres sont des k-espaces et telles que une d'elles vérifie la propriété (P). Alors, leur produit tensoriel topologique $E \otimes_\tau F$ est locale si, et seulement si, $(E \otimes_\tau F)^{\wedge}$ est fermé dans $\mathcal{C}(\mathcal{M}(E) \times \mathcal{M}(F)) \cong \mathcal{C}(\mathcal{M}(E \otimes_\tau F))$.*

Preuve. On a $\mathcal{M}(E \otimes_\tau F) = \mathcal{M}(E) \times \mathcal{M}(F)$, donc $\mathcal{C}(\mathcal{M}(E \otimes_\tau F)) = \mathcal{C}(\mathcal{M}(E) \times \mathcal{M}(F)) = \mathcal{C}(\mathcal{M}(E)) \widehat{\otimes}_\varepsilon \mathcal{C}(\mathcal{M}(F))$ [7 : p.392, Corollary 1.1]. D'après le lemme ci-dessus une fonction α de $\mathcal{M}(E \otimes_\tau F)$ dans $\mathbb{C}$ appartenant localement à $(E \otimes_\tau F)^{\wedge}$ est limite d'une suite généralisée d'éléments de $\mathcal{C}(\mathcal{M}(E)) \otimes \mathcal{C}(\mathcal{M}(F))$ dont les α_i et les β_i appartiennent localement à $E^{\wedge}$ et à $F^{\wedge}$, respectivement. Par suite α est limite d'une suite généralisée d'éléments de $(E \otimes_\tau F)^{\wedge}$. Comme ce dernier est fermé dans $\mathcal{C}(\mathcal{M}(E) \times \mathcal{M}(F))$, α lui appartient globalement. ■

3. Faisceau de Gel'fand du produit tensoriel

Théorème 3.1 *Etant données deux algèbres localement convexes E et F de spectres $\mathcal{M}(E)$ et $\mathcal{M}(F)$, soient $\mathcal{E}(E) = \sum_{f\in\mathcal{M}(E)} \mathcal{E}_f$ et $\mathcal{E}(F) = \sum_{g\in\mathcal{M}(F)} \mathcal{E}_g$ leurs faisceaux de Gel'fand respectifs. Alors, le faisceau de Gel'fand du produit tensoriel topologique $E\otimes_\tau F$ est donné par : $\mathcal{E}(E\otimes F) = \sum_{(f,g)\,\in\mathcal{M}(E)\times\mathcal{M}(F)} \mathcal{E}_f \otimes \mathcal{E}_g$, à une bijection près.*

Preuve. On a par définition $\mathcal{E}(E\otimes F) = \sum_{h\,\in\mathcal{M}(E\otimes F)} \mathcal{E}_h$. D'après le Lemme 1.5, pour tout $h \in \mathcal{M}(E\otimes F)$, il existe un unique couple $(f,g) \in \mathcal{M}(E)\times\mathcal{M}(F)$ tel que $h = f\otimes g$. Montrons que $\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_f \otimes \mathcal{E}_g$, à un isomorphisme d'algèbres près.
On considère l'application canonique,

$$\rho_h : \mathcal{E}_f \times \mathcal{E}_g \longrightarrow \mathcal{E}_h \quad ; \quad ([\widehat{x}]_f , [\widehat{y}]_g) \longmapsto [\widehat{x\otimes y}]_h .$$

- Vérifions que ρ *est bien définie* : soient (x,y) et (z,t) deux couples de $E\times F$ tels que $([\widehat{x}]_f , [\widehat{y}]_g) = ([\widehat{z}]_f , [\widehat{t}]_g)$; il existe alors des voisinages ouverts U de f et V de g, tels que $\widehat{x}|_U = \widehat{z}|_U$ et $\widehat{y}|_V = \widehat{t}|_V$. En considérant $U\otimes V = \{ f\otimes g$, tels que $f\in U$ et $g\in V\}$, on obtient $\widehat{x\otimes y}|_{U\otimes V} = \widehat{z\otimes t}|_{U\otimes V}$; car, pour $f\otimes g\in U\otimes V$ on a, $\widehat{x\otimes y}(f\otimes g) = (f\otimes g)(x\otimes y) = f(x)g(y) = \widehat{x}(f)\widehat{y}(g) = \widehat{z}(f)\widehat{t}(f) = f(z)g(t) = (f\otimes g)(z\otimes t) = (\widehat{z\otimes t})(f\otimes g)$; donc $\widehat{x\otimes y}|_{U\otimes V} = \widehat{z\otimes t}|_{U\otimes V}$, et puisque $U\otimes V$ est un voisinage de $h = f\otimes g$ [7 : p.409, Theorem 1.1], $[\widehat{x\otimes y}]_h = [\widehat{z\otimes t}]_h$ d'où $\rho\,([\widehat{x}]_f , [\widehat{y}]_g) = \rho([\widehat{z}]_f , [\widehat{t}]_g)$ et ρ_h est bien définie.
- ρ_h *est bilinéaire*, en effet : pour $(x,z)\in E\times E$, $y\in F$ et $\lambda \in\mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned}\rho_h([\widehat{x}]_f + \lambda[\widehat{z}]_f, [\widehat{y}]_g) &= \rho_h([(\widehat{x+\lambda z})]_f, [\widehat{y}]_g) = [(x+\lambda z)\widehat{\otimes} y]_h\\ &= [(x\otimes y + \lambda z\otimes y)]_h = [(\widehat{x\otimes y} + \lambda\widehat{z\otimes y})]_h\\ &= [\widehat{x\otimes y}]_h + \lambda[\widehat{z\otimes y}]_h = \rho_h([\widehat{x}]_f, [\widehat{y}]_g) + \lambda\rho([\widehat{z}]_f, [\widehat{y}]_g);\end{aligned}$$

  donc ρ_h est linéaire par rapport à la première composante ; on vérifie de même qu'elle est linéaire par rapport à la deuxième composante.
- Comme ρ_h est bilinéaire, on considére sa linéarisation $\widetilde{\rho}_h : \mathcal{E}_f \otimes \mathcal{E}_g \longrightarrow \mathcal{E}_h$, pour un élément $\omega = \sum_{i=1}^{n} [\widehat{x}_i]_f \otimes [\widehat{y}_i]_g \in E_f \otimes \mathcal{E}_g$, on a

$$\widetilde{\rho}_h \left(\sum_{i=1}^{n} [\widehat{x}_i]_f \otimes [\widehat{y}_i]_g \right) = \left[\sum_{i=1}^{n} \widehat{x_i \otimes y_i} \right]_h .$$

- Vérifions que $\widetilde{\rho}_h$ *est surjective* : les éléments de $\mathcal{E}_h$ sont de la forme $[\widehat{z}]_h$, $z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in E\otimes F$, on a $\sum_{i=1}^{n} [\widehat{x}_i]_f \otimes [\widehat{y}_i]_g \in \mathcal{E}_f \otimes \mathcal{E}_g$ et $\widetilde{\rho}_h\,(\sum_{i=1}^{n} [\widehat{x}_i]_f \otimes [\widehat{y}_i]_g) = [\sum_{i=1}^{n} \widehat{x_i \otimes y_i}]_h = [\widehat{z}]_h$, donc $\widetilde{\rho}_h$ est surjective.

- Vérifions que $\widetilde{\rho}_h$ *est injective* : soit $\omega = \sum_{i=1}^{n} [\widehat{x}_i]_f \otimes [\widehat{y}_i]_g \in \mathcal{E}_f \otimes \mathcal{E}_g$ tel que $\widetilde{\rho}_h(\omega) = \widetilde{\rho}_h(\sum_{i=1}^{n}[\widehat{x}_i]_f \otimes [\widehat{y}_i]_g) = 0$, donc $[\sum_{i=1}^{n} \widehat{x_i \otimes y_i}]_h = 0$, par suite il existe un voisinage $U \otimes V$ de $h = f \otimes g$, où U est un voisinage ouvert de f et V est un voisinage ouvert de g, tel que

$$\sum_{i=1}^{n} \widehat{x_i \otimes y_i}|_{U\otimes V} = 0, \quad donc \quad \sum_{i=1}^{n} \widehat{x}_i|_U \otimes \widehat{y}_i|_V = 0.$$

Comme $\mathcal{E}_f = \varinjlim E^\wedge|_U$ et $\mathcal{E}_g = \varinjlim F^\wedge|_V$, on a $\mathcal{E}_f \otimes \mathcal{E}_f = \varinjlim E^\wedge|_U \otimes F^\wedge|_V$.
Alors, $\omega = \sum_{i=1}^{n}[\widehat{x}_i]_f \otimes [\widehat{y}_i]_g$ est l'image de $\sum_{i=1}^{n} \widehat{x}_i|_U \otimes \widehat{y}_i|_V$, donc $\omega = 0$.
D'où $\widetilde{\rho}_h$ injective, par suite $\widetilde{\rho}_h$ est un isomorphisme. ■

Proposition 3.2 *Soient E et F deux algèbres localement convexes de spectres respectivement $\mathcal{M}(E)$ et $\mathcal{M}(F)$. Une base de topologie du faisceau de Gel'fand du produit tensoriel topologique $E\otimes_\tau F$ est donnée par : $\beta = \{\sum_{i=1}^{n} \widetilde{x}_i(U) \otimes \widetilde{y}_i(V)$, tels que $(x_i, y_i) \in E \times F$, U un ouvert de $\mathcal{M}(E)$ et V un ouvert de $\mathcal{M}(F)\}$.*

Preuve. On vérifie que *la bijection établie dans le théorème ci-dessus est* en fait *un homéomorphisme* : On sait que la topologie de $\mathcal{E}(E\otimes F)$ est engendrée par $\beta = \widetilde{z}(W)$, tels que $z \in E\otimes F$ et W un ouvert de $\mathcal{M}(E\otimes F)$ et puisque $\mathcal{M}(E\otimes F) \simeq \mathcal{M}(E)\times\mathcal{M}(F)$ on a $\{U \otimes V$, tels que U ouvert de $\mathcal{M}(E)$ et V ouvert de $\mathcal{M}(E)\}$ est une base de topologie de $\mathcal{M}(E \otimes F)$; par suite une base de topologie de $\mathcal{E}(E \otimes F)$ s'écrit sous la forme : $\beta = \{ \widetilde{z}(U \otimes V)$, tels que $z \in E \otimes F$ et U ouvert de $\mathcal{M}(E)$ et V ouvert de $\mathcal{M}(E)\}$. Pour $h = f \otimes g \in U\otimes V$, on a $\widetilde{z}(h) = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i(h) = \sum_{i=1}^{n} [\widehat{x_i \otimes y_i}]_h$ et

pour $i = 1, ..., n$, on a

$$(\widetilde{x_i \otimes y_i})(h) = [\widehat{x_i \otimes y_i}]_h = \widetilde{\rho}_h([\widehat{x}_i]_f \otimes [\widehat{y}_i]_g) = \widetilde{\rho}_h(\widetilde{x}_i(f) \otimes \widetilde{y}_i(g)),$$

donc $(\widetilde{x_i \otimes y_i})(U \otimes V) = \widetilde{\rho}_h(\widetilde{x}_i(U) \otimes \widetilde{y}_i(V))$, $\widetilde{z}(U \otimes V) = \widetilde{\rho}_h(\sum_{i=1}^{n} \widetilde{x}_i(U) \otimes \widetilde{y}_i(V))$

et $\quad \widetilde{z}(U \otimes V) \simeq \sum_{i=1}^{n} \widetilde{x}_i(U) \otimes \widetilde{y}_i(V) \subseteq \sum_{(f,g) \in\mathcal{M}(E)\times\mathcal{M}(F)} \mathcal{E}_f \otimes \mathcal{E}_g$.
On conclut que β est une base de topologie du faisceau de Gel'fand du produit tensoriel. ■

Références

[1] R. Arens, *The problem of locally-A functions in a commutative Banach algebra A*. Trans. Amer. Math. Soc. 104(1962), 24-36.

[2] N. Bourbaki, *Théorie des ensembles, Chap. 3.* Hermann, Paris, 1967.

[3] N. Bourbaki, *Topologie générale , Chap. 1-4.* Hermann, Paris, 1971.

[4] R. M. Brooks, *Partitions of unity in F-algebras.* Math Ann. 77(1968), 265-272.

[5] I. Gel'fand, D. Raikov and G. Silov, *Commutative Normed Rings.* Chelsey, New York, 1964.

[6] R. A. Hassani, A. Blali, A. Oukhouya, *Clôture locale des algèbres topologiques.* Scient. Math. Japon. 61 (2005), 379-383.

[7] A. Mallios, *Topological algebras. Selected Topics.* North-Holland, Amsterdam, 1986.

[8] A. Mallios, *On geometric topological algebras.* J. Math. Anal. Appl. 172(1993), 301-322.

[9] A. Mallios, *The de Rham-Kähler complex of the Gel'fand sheaf of a topological algebra.* J. Math. Anal. Appl. 175(1993), 143-168.

[10] A. Mallios, *Geometry of Vector Sheaves. An Axiomatic Approach to Differential Geometry,* Vols 1-2. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.

[11] A. Mallios, *On localising topological algebras.* Contemporary Math. 341(2004), 79-95.

[12] A. Mallios, *Modern Differential Geometry in Gauge Theories,* Vol. I : Maxwel Fields, Vol. II : Yang-Mills Fields. Birkhäuser, Boston, 2005.

[13] A. Mallios et A. Oukhouya, *k-algèbres topologiques.* Scient. Math. Japon. 61 (2005), 385-390.

[14] A. Mallios et A. Oukhouya, *La complétude vis-à-vis de localisation d'algèbres topologiques.* Scient. Math. Japon. 61 (2005) 391-396.

[15] E.A. Michael, *Locally multiplicatively-convex topological algebras.* Mem. Amer. Math. Soc. 11 (1952).

[16] A. Oukhouya, *On local topological algebras.* Scient. Math. Japon. 57(2003), 493-497. [elect. version : e7, 277-281].

◇ Anastasios Mallios
Mathematical Institute, University of Athens,
Panepistimiopolis. GR-15784 Athens, Greece

amallios@math.uoa.gr

◇ Ali Oukhouya
Ecole normale supérieure
Route Essaouira, B.P 2400
Marrakech, Maroc
aoukhouya@hotmail.com