

Ομάδα ασκήσεων Νο 8

Παρακάτω $Q_n(x)$ είναι τα ορθογώνια πολυώνυμα (μονικά, $\deg Q_n = n$) ως προς το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} w(x) dx.$$

Πρόβλημα 1. Υπολογίστε τα $Q_0(x), Q_1(x), Q_2(x), Q_3(x)$ για το διάστημα $[-1, 1]$ και το βάρος $w(x) \equiv 1$.

💡 Χρησιμοποιήστε τον αναδρομικό τύπο που δίνεται στις σημειώσεις σας.

Πρόβλημα 2. Αποδείξτε ότι το Q_n έχει την ελάχιστη 2-νόρμα (αυτή που προέρχεται από το εσωτερικό γινόμενο) από όλα τα μονικά πολυώνυμα βαθμού ακριβώς n .

💡 Το τυχόν μονικό πολυώνυμο βαθμού n γράφεται στη μορφή $Q_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k Q_k(x)$.