Ομάδα ασκήσεων Νο 7

Πρόβλημα 1. Αν είναι $x_j = a + jh$, με $h = (b-a)/N, j = 0, 1, \ldots, N$, δείξτε ότι

$$\left|\prod_{j=0}^{N}(x - x_j)\right| \le N!\frac{h^{N+1}}{4},$$

για $x \in [a, b]$.

Αν $a = -1, b = 1$ πώς πρέπει να επιλέξετε τα σημεία x_j ώστε να ελαχιστοποιήσετε την ποσότητα

$$\sup_{x\in[-1,1]}\left|\prod_{j=0}^{N}(x - x_j)\right|\ ;$$

Πρόβλημα 2. Έστω το γενικό πολυώνυμο βαθμού N:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_N x^N.$$

Ας υποθέσουμε ότι στον υπολογιστή σας ο πολλαπλασιασμός παίρνει πολύ περισσότερο χρόνο από την πρόσθεση (αυτό ίσχυε πραγματικά στους υπολογιστές πριν από 4 δεκαετίες). Βρείτε ένα τρόπο να υπολογίζετε το $p(x)$ χρησιμοποιώντας μόνο $\le N$ πολλαπλασιασμούς.

Πρόβλημα 3. Δείξτε ότι τα πολυώνυμα

$$x^k(1-x)^{N-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, N,$$

αποτελούν βάση του χώρου $\mathcal{P}_N$.

Πρόβλημα 4. Έστω $x_0, x_1, \ldots, x_N$ διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί και

$$L_j(x) = \prod_{i\ne j}\frac{x - x_i}{x_j - x_i}, \quad j = 0, 1, \ldots, N,$$

τα αντίστοιχα πολυώνυμα Lagrange. Πώς μπορείτε να γράψετε το πολυώνυμο x^3 ως γραμμικό συνδυασμό των $L_j(x)$ (υποθέστε φυσικά ότι $N \ge 3$);

Πρόβλημα 5. Έστω $x_0, x_1, \ldots, x_N$ διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί και $d_0, d_1, \ldots, d_N \in \mathbb{C}$. Ας υποθέσουμε ότι το πολυώνυμο $q_0(x)$, βαθμού $\le N-1$, παρεμβάλλει τις τιμές $d_0, d_1, \ldots, d_{N-1}$ στα σημεία $x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}$ και, ομοίως, ότι το πολυώνυμο $q_1(x)$, βαθμού $\le N-1$, παρεμβάλλει τις τιμές $d_1, d_2, \ldots, d_N$ στα σημεία $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Δείξτε ότι το πολυώνυμο

$$q(x) = \frac{x_N - x}{x_N - x_0}q_0(x) + \frac{x - x_0}{x_N - x_0}q_1(x)$$

είναι βαθμού $\le N$ και παρεμβάλλει τις τιμές $d_0, d_1, \ldots, d_N$ στα σημεία $x_0, x_1, \ldots, x_N$.

Πρόβλημα 6. Αν $f, f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_1 = 0$ δείξτε ότι για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ ισχύει $\lim_{n\to\infty}\widehat{f_n}(k) = \widehat{f}(k)$.

Πρόβλημα 7. Αν f, g είναι τριγωνομετρικά πολυώνυμα δείξτε ότι

$$\langle f, g\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n)\overline{\widehat{g}(n)}.$$

(Το άθροισμα που εμφανίζεται δεξιά έχει πεπερασμένους το πλήθος όρους αφού τα f, g είναι τριγωνομετρικά πολυώνυμα.)

Υπολογίστε την απόσταση $\|f - g\|_2$ ανάμεσα σε δύο τριγωνομετρικά πολυώνυμα μέσω των συντελεστών Fourier των f, g.

Πρόβλημα 8. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη και 2π-περιοδική. Ικανοποιεί επίσης τη διαφορική εξίσωση

$$Af'' + Bf' + Cf + D = 0,$$

όπου $A, B, C, D \in \mathbb{C}$ είναι σταθερές. Δείξτε ότι η ακολουθία των συντελεστών Fourier της f, $\left\{\widehat{f}(n)\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ικανοποιεί για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ την αλγεβρική εξίσωση

$$(-An^2 + iBn + C)\widehat{f}(n) + D\delta_n = 0,$$

όπου $\delta_n = 1$ αν $n = 0$ και 0 αν $n \neq 0$.

Πρόβλημα 9. Ας είναι $c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, τέτοια ώστε $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| < \infty$. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και είναι μια συνεχής, 2π-περιοδική συνάρτηση. Δείξτε επίσης ότι $\widehat{f}(n) = c_n$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.