

Ομάδα ασκήσεων Νο 4

Πρόβλημα 1. Έστω $f \in C^1([a, b])$. Αυτό σημαίνει ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ (πλευρικές παράγωγοι στα δύο άκρα του διαστήματος) και η f' είναι συνεχής στο $[a, b]$. Αν ω_f είναι το μέτρο συνέχειας της f

$$\omega_f(\delta) = \sup_{\substack{x, y \in [a, b] \\ |x - y| < \delta}} |f(x) - f(y)|$$

δείξτε ότι $\omega_f(\delta) \leq \|f'\|_\infty \delta$.

Δώστε παράδειγμα όπου η ανισότητα αυτή πιάνεται ως ισότητα καθώς και ένα παράδειγμα όπου η ανισότητα είναι γνήσια.

💡 Θεώρημα μέσης τιμής.

Πρόβλημα 2. Έστω $\alpha > 0$. Μια συνάρτηση $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ λέγεται *Lipschitz- α* αν υπάρχει μια σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $x, y \in K$ να ισχύει

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha.$$

Το σύνολο όλων αυτών των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το K συμβολίζεται με Lip_α . Ας είναι K ένα διάστημα.

- (1) Δείξτε ότι κάθε τέτοια συνάρτηση είναι συνεχής στο K .
- (2) Αν $\alpha > 1$ δείξτε ότι οι μόνες συναρτήσεις που περιέχονται στο Lip_α είναι οι σταθερές.

💡 Δείξτε ότι κάθε τέτοια συνάρτηση έχει παντού παράγωγο 0.

- (3) Δείξτε ότι για $0 < \alpha \leq 1$ το σύνολο Lip_α είναι γραμμικός χώρος.
- (4) Αποδείξτε ότι αν $0 < \beta < \alpha \leq 1$ τότε $\text{Lip}_\alpha \subseteq \text{Lip}_\beta$. Αποδείξτε επίσης ότι ο εγκλεισμός αυτός είναι γνήσιος.

💡 Αποδείξτε πρώτα ότι για $x, y > 0$ ισχύει $(x + y)^\alpha \leq x^\alpha + y^\alpha$.

- (5) Βρείτε ένα άνω φράγμα για το μέτρο συνέχειας μιας συνάρτησης στο Lip_α .

Πρόβλημα 3. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ να είναι η συνάρτηση $f(x) = |x|$. Υπολογίστε το μέτρο συνέχειας της f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Πρόβλημα 4. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ για $x \in (0, 1)$. Υπολογίστε το μέτρο συνέχειας της f . Είναι η f ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, 1)$?

Πρόβλημα 5. Έστω $f, f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχείς συναρτήσεις ($n = 1, 2, \dots$).

- (1) Δείξτε ότι αν $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ τότε ισχύει $\omega_{f_n}(\delta) \rightarrow \omega_f(\delta)$ για κάθε $\delta > 0$. Είναι η σύγκλιση $\omega_{f_n} \rightarrow \omega_f$ ομοιόμορφη για όλα τα θετικά δ ?
- (2) Φτιάξτε ένα παράδειγμα τέτοιων συναρτήσεων που να έχουμε $f_n(x) \rightarrow f(x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$ αλλά να μην ισχύει $\omega_{f_n}(\delta) \rightarrow \omega_f(\delta)$ για κανένα θετικό δ .

Πρόβλημα 6. Χωρίς να υπολογίσετε άοριστα ολοκληρώματα βρείτε το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 3x + (1 + \cos 5x) \sin^2 5x \, dx.$$

💡 Εκφράστε όλες τις συναρτήσεις που εμφανίζονται μέσω εκθετικών συναρτήσεων και χρησιμοποιείτε τον κανόνα υπολογισμού εσωτερικών γινομένων τριγωνομετρικών πολυωνύμων μέσω των συντελεστών τους.

Πρόβλημα 7. Ας είναι

$$p(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k e^{ikx}, \quad q(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k e^{ikx}$$

δύο τριγωνομετρικά πολυώνυμα. (Αυτό σημαίνει ότι τα παραπάνω αθροίσματα είναι πεπερασμένα αθροίσματα παρά το ότι μοιάζουν με άπειρες σειρές. Μόνο πεπερασμένα το πλήθος δηλ. από τα p_k, q_k είναι μη μηδενικά.) Βρείτε τους συντελεστές του τριγωνομετρικού πολυωνύμου $p(x)q(x)$ μέσω των p_k, q_k .

Πρόβλημα 8. Έστω $c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, τέτοια ώστε $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| < \infty$.

(1) Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (δείξτε δηλ. ότι η σειρά αυτή συγκλίνει για κάθε x).

(2) Αν $S_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$ δείξτε ότι $S_N \rightarrow f$ στην ∞ νόρμα (ομοιόμορφα δηλ. για $x \in [0, 2\pi]$ αλλά και για $x \in \mathbb{R}$).

(3) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής παντού.