Πανεπιστημιο Κρητης, Τμ. Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Θεωρια Προσεγγισης και εφαρμογες, Φθινοπωρο 2023-24, Μιχ. Κολουντζακης

Ομάδα ασκήσεων Νο 3

Πρόβλημα 1. Αν $x_n \to x$ σε ένα χώρο με νόρμα δείξτε ότι $\|x_n\| \to \|x\|$.

Πρόβλημα 2. Ας είναι $[a, b]$ ένα φραγμένο διάστημα και

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

μια διαμέριση του $[a, b]$ σε n διαστήματα. Ας είναι επίσης V το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ που σε κάθε διάστημα της μορφής $[x_i, x_{i+1}]$ είναι της μορφής $A_i x + B_i$ (κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις). Δείξτε ότι το V είαι γραμμικός χώρος. Ποια είναι η διάστασή του? Αποδείξτε επίσης ότι η ποσότητα (για $f \in V$)

$$\max_{i=0,1,\ldots,n} |f(x_i)|$$

είναι μια νόρμα στο V.

Σε ποια σημεία πιάνεται το μέγιστο μιας τμηματικά γραμμικής συνάρτησης?

Πρόβλημα 3. Αν είναι $f : [-1, 1] \to \mathbb{C}$ άρτια συνάρτηση, δηλ. $f(-x) = f(x)$, τότε δείξτε ότι υπάρχει μια ακολουθία πολυωνύμων $p_n(x)$ που συγκλίνουν ομοιόμορφα στην f στο $[-1, 1]$ και που είναι τέτοια ώστε οι περιττές δυνάμεις απουσιάζουν από τα μονώνυμα κάθε πολυωνύμου $p_n(x)$.

Προσεγγίστε ομοιόμορφα την $f(x)$ από μια ακολουθία πολυωνύμων $q_n(x)$. Ποια ακολουθία πολυωνύμων μπορείτε να φτιάξετε χρσιμοποιώντας την $q_n(x)$ που επίσης προσεγγίζει ομοιόμορφα την $f(x)$?

Πρόβλημα 4. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[0, 1] \cup [2, 3]$ η οποία είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της και έστω $\epsilon > 0$. Δείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο $p(x)$ τέτοιο ώστε $|f(x) - p(x)| < \epsilon$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της f.

Εφαρμόστε το θεώρημα του Weierstrass σε μια κατάλληλη συνεχή συνάρτηση στο διάστημα $[0, 3]$.

Πρόβλημα 5. Αν $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$ συνεχής και $\epsilon > 0$ δείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο $p(x)$ τέτοιο ώστε $|f(x) - p(x)| < \epsilon$ για κάθε $x \in [0, 1]$ και με $p(0.1) = f(0.1)$.

Χρησιμοποιείστε το θεώρημα του Weierstrass και προσθέστε μια κατάλληλη σταθερά στο πολυώνυμο που προσεγγίζει την f.

Πρόβλημα 6. Αν $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$ συνεχής και $\epsilon > 0$ δείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο $p(x)$ τέτοιο ώστε $|f(x) - p(x)| < \epsilon$ για κάθε $x \in [0, 1]$ και με

$$p(0.1) = f(0.1) \text{ και } p(0.2) = f(0.2).$$

Όπως και στο Πρόβλημα 5 αλλά τώρα προσθέτετε κάποιο κατάλληλο πολυώνυμο.

Πρόβλημα 7. Έσω $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ μια συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $p_n(x)$ τέτοια ώστε

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x), \quad \forall x \in [0, 1],$$

με τη σύγκλιση της σειράς να είναι ομοιόμορφη (δηλ. τα μερικά αθροίσματα της σειράς συγκλίνουν ομοιόμορφα στην $f(x)$).

Χρησιμοποιείστε επανειλημμένα το θεώρημα του Weierstrass.