

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ' ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως αντιγραφή.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ – ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Ενδιάμεσο Διαγώνισμα - 24 Νοεμβρίου 2023

Διάρκεια: 2 ώρες

1. Δείξτε ότι στο γραμμικό χώρο συναρτήσεων

$$C^1_\ell([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} : f' \text{ υπάρχει και είναι συνεχής, } f(a) = 0\}$$

η ποσότητα $\|f\| = \int_a^b |f'(x)| dx$ είναι νόρμα.

2. (α) Σε ένα χώρο X με νόρμα και για κάποια στοιχεία $x, x_n \in X$ ($n = 1, 2, \dots$) έχουμε τη σύγκλιση $x_n \rightarrow x$. Δείξτε ότι $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$.

(β) Αν $x \in \mathbb{C}^n$ δείξτε ότι

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2.$$

3. Σε ένα χώρο X με νόρμα, με ένα υπόχωρο Y , και για κάποιο $x \in X$, έχουμε ότι τα δύο στοιχεία $y_1, y_2 \in Y$ είναι βέλτιστες προσεγγίσεις του x από τον υπόχωρο Y . Δείξτε ότι και κάθε κυρτός συνδυασμός των y_1, y_2 είναι επίσης βέλτιστη προσέγγιση του x από τον υπόχωρο Y .

4. Δίδεται $\epsilon > 0$ και η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, για $x \in [\epsilon, 1]$. Δείξτε ότι $\omega_f(\delta) \leq \frac{\delta}{2\sqrt{\epsilon}}$, όπου $\omega_f(\cdot)$ είναι το μέτρο συνέχειας της f στο $[\epsilon, 1]$. Υπολογίστε επίσης το μέτρο συνέχειας της f στο διάστημα $[0, 1]$.

5. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι κλάσης C^1 (δηλ. έχει παράγωγο συνεχή στο \mathbb{R}). Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $p_n(x)$ τέτοια ώστε $p_n \rightarrow f$ και, ταυτόχρονα, $p'_n \rightarrow f'$, ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

6. Ας είναι $N \geq 1$ και $x_0 < x_1 < \dots < x_N$ διαφορετικά σημεία στο διάστημα $[a, b]$ και $\ell_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, N$, τα αντίστοιχα πολυώνυμα Lagrange. Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=0}^N \ell_i(x) = 1 \text{ και } \sum_{i=0}^N x_i \ell_i(x) = x.$$