ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ, ΤΜ. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Θεωρία Προσέγγισης και εφαρμογες, Άνοιξη 2013-14, Μιχ. Κολουντζάκης

Ομάδα ασκήσεων Νο 6

Πρόβλημα 1. Έστω $f(x) = \cos 3x + \cos 2x$. Βρείτε ένα (αλγεβρικό) πολυώνυμο $p(x)$ τέτοιο ώστε να ισχύει
$$f(x) = p(\cos x).$$

Πρόβλημα 2. Χωρίς να υπολογίσετε αόριστα ολοκληρώματα βρείτε το ορισμένο ολοκλήρωμα
$$\int_0^{2\pi} \cos^2 3x + (1 + \cos 5x)\sin^2 5x\, dx.$$

Εκφράστε όλες τις συναρτήσεις που εμφανίζονται μέσω εκθετικών συναρτήσεων και χρησιμοποιείστε τον κανόνα υπολογισμού εσωτερικών γινομένων τριγωνομετρικών πολυωνύμων μέσω των συντελεστών τους.

Πρόβλημα 3. Ορίζουμε
$$D_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ikx},$$
για $x \in \mathbb{R}$, $N = 1, 2, 3, \ldots$. Βρείτε ένα κλειστό τύπο για την $D_N(x)$ μέσω των x, N.

Πρόβλημα 4. Ας είναι
$$p(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k e^{ikx}, \quad q(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k e^{ikx}$$
δύο τριγωνομετρικά πολυώνυμα. (Αυτό σημαίνει ότι τα παραπάνω αθροίσματα είναι πεπερασμένα αθροίσματα παρά το ότι μοιάζουν με άπειρες σειρές. Μόνο πεπερασμένα το πλήθος δηλ. από τα p_k, q_k είναι μη μηδενικά.) Βρείτε τους συντελεστές του τριγωνομετρικού πολυωνύμου $p(x)q(x)$ μέσω των p_k, q_k.

Πρόβλημα 5. Έστω $c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, τέτοια ώστε $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| < \infty$.

(1) Δείξτε ότι η συνάρτηση
$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$
ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (δείξτε δηλ. ότι η σειρά αυτή συγκλίνει για κάθε x).

(2) Αν $S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$ δείξτε ότι $S_N \to f$ στην ∞ νόρμα (ομοιόμορφα δηλ. για $x \in [0, 2\pi]$ αλλά και για $x \in \mathbb{R}$).

(3) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής παντού.