Πανεπ. Κρητης, Τμ. Μαθηματικων, Θ. Προσεγγισης και Εφαρμογες, Ανοιξη 2010-11, Μιχ. Κολουντζακης

3ο φυλλάδιο ασκήσεων

Στα παρακάτω $T_n(x)$ συμβολίζει το πολυώνυμο Chebyshev βαθμού n.

Πρόβλημα 1. Βρείτε ποιο πολυώνυμο βαθμού n και με μεγιστοβάθμιο συντελεστή ίσο με 1 (“μονικό πολυώνυμο”) έχει την ελάχιστη ∞-νόρμα στο διάστημα $[a, b]$.

Τα πολυώνυμα $2^{1-n}T_n(x)$ αποτελούν τη λύση του προβλήματος για $a = 0, b = 1$. Κάντε αλλαγή μεταβλητής.

Πρόβλημα 2. Δείξτε ότι $|T_n(x)| > 1$ για $|x| > 1$.

Πρόβλημα 3. Δείξτε ότι $T_m(T_n(x)) = T_{mn}(x)$.

Χρησιμοποιείστε το ότι αν $x = \cos\theta$ τότε $T_k(x) = \cos k\theta$ για να αποδείξετε τη σχέση για $x \in [0, 1]$.

Πρόβλημα 4. Δείξτε ότι ανάμεσα σε δύο διαδοχικές ρίζες του $T_n(x)$ υπάρχει ακριβώς μία ρίζα του $T_{n-1}(x)$.

Πρόβλημα 5. Δείξτε ότι $|T_n'(x)| \le n^2$ για $|x| \le 1$.

Παραγωγίστε χρησιμοποιώντας τη μεταβλητή θ, όπου $x = \cos\theta$.

Πρόβλημα 6. Αν $\ell_i(x)$ είναι τα πολυώνυμα $\displaystyle\prod_{\substack{j=0,1,\ldots,N\\ j\neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$ που χρησιμοποιούνται στην παρεμβολή Lagrange στα διαφορετικά σημεία $x_0, x_1, \ldots, x_N$ δείξτε ότι $\ell_0(x) + \ell_1(x) + \cdots + \ell_N(x) = 1$ για $x \in \mathbb{R}$. Γενικεύοντας, ποια η τιμή του αθροίσματος $\sum_{j=0}^{N} x_j^k \ell_j(x)$;

Μην κάνετε πράξεις αλλά χρησιμοποιείστε τις ιδιότητες παρεμβολής.

Πρόβλημα 7. Αν $D_N(x) = \displaystyle\sum_{j=-N}^{N} e^{ijx} = \frac{\sin{(N+\frac{1}{2})x}}{\sin\frac{x}{2}}$ δείξτε ότι η 1-νόρμα $\|D_N\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)|\,dx$ τείνει στο ∞ για $N \to \infty$.

Βρείτε τις ρίζες της $D_N(x)$ και βρείτε κάτω φράγματα για το ολοκλήρωμα της $|D_N(x)|$ στα διαστήματα ανάμεσα σε δύο διαδοχικές της ρίζες.

Πρόβλημα 8. Δείξτε ότι για κάθε $N > 0$ υπάρχει μια $f_N \in C^{2\pi}$ τ.ώ. $S_N(f_N)(0) \to \infty$ και $|f_N(x)| \le 1$ για κάθε x.

Θυμηθείτε ότι $S_N(f)(0) = f * D_N(0)$ (συνέλιξη με τον πυρήνα του Dirichlet). Χρησιμοποιείστε το αποτέλεσμα του Προβλήματος 7. Πάρτε πρώτα ως $f_N(x)$ τη συνάρτηση $\operatorname{sgn} D_N(x)$ ($\operatorname{sgn} x$ ισούται με $+1$ αν $x > 0$, με -1 αν $x < 0$ και με 0 αν $x = 0$). Για τη συνάρτηση αυτή το ζητούμενο είναι φανερό αλλά η συνάρτηση δεν είναι συνεχής. Περιγράψτε γεωμετρικά (μιλώντας δηλ. για το γράφημα της f_N) πώς μπορείτε να τροποποιήσετε την f_N ώστε να γίνει συνεχής (και απολύτως μικρότερη ή ίση του 1) και να εξακολουθεί να ισχύει το ζητούμενο.