Πανεπιστημιο Κρητησ, Τμ. Μαθηματικων, Θ. Προσεγγισησ, Ανοιξη 2010-11, Μιχ. Κολουντζακησ

Διάρκεια διαγωνίσματος 3 ώρες. Κλειστές όλες οι σημειώσεις.

Διαγώνισμα Σεπτεμβρίου, 16 Σεπτεμβρίου 2011

Πρόβλημα 1. [10 μονάδες] Αν L η ευθεία στο επίπεδο που περνάει από τα σημεία $(0, -1)$ και $(2, 0)$ βρείτε την απόσταση του σημείου $(0, 0)$ από την L σε κάθε μία από τις νόρμες $\ell_1, \ell_2, \ell_\infty$.

Πρόβλημα 2. [5 μονάδες] Αν $x \in \mathbb{R}^4$ δείξτε ότι $\|x\|_2 \le 2\|x\|_2$.

Πρόβλημα 3. [10 μονάδες] Δείξτε ότι δεν υπάρχει αριθμός $K < \infty$ τ.ώ. για κάθε $g \in C([0, 1])$ να ισχύει $\|g\|_\infty \le K\|g\|_1$.

Πρόβλημα 4. [10 μονάδες] Έστω $f(x) \in C([0, 1])$ η συνάρτηση $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, όπου $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Δείξτε ότι

$$\|f\|_2^2 = \sum_{i,j=0}^{n} \frac{a_i \overline{a_j}}{i + j + 1}.$$

Πρόβλημα 5. (α) [5 μονάδες] Διατυπώστε με ακρίβεια το θεώρημα του Weierstrass για την ομοιόμορφη προσέγγιση συνεχών συναρτήσεων από αλγεβρικά πολυώνυμα.
(β) [10 μονάδες] Δείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ που δε μπορεί να προσεγγιστεί από ακολουθία αλγεβρικών πολυωνύμων σε καμία από τις νόρμες L^p, $1 \le p \le \infty$.

Πρόβλημα 6. [10 μονάδες] Αν $f \in C([-a, a])$ είναι μια άρτια συνάρτηση (δηλ. $f(-x) = f(x)$ για $x \in [-a, a]$) δείξτε ότι η f μπορεί να προσεγγιστεί ομοιόμορφα στο $[-a, a]$ από μια ακολουθία πολυωνύμων από τα οποία απουσιάζουν οι περιττές δυνάμεις του x.

Πρόβλημα 7. [10 μονάδες] Αν $T_n(x)$ είναι το n-οστό πολυώνυμο Chebyshev και m, n φυσικοί αριθμοί, δείξτε ότι $T_m(T_n(x)) = T_{mn}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Πρόβλημα 8. [10 μονάδες] Αν $\ell_i(x)$ είναι τα πολυώνυμα $\displaystyle\prod_{\substack{j=0,1,\ldots,N \\ j \ne i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$ που χρησιμοποιούνται στην παρεμβολή Lagrange στα διαφορετικά σημεία $x_0, x_1, \ldots, x_N$ βρείτε ένα απλί τύπο για τη συνάρτηση $S(x) = \sum_{j=0}^{N} x_j^k \ell_j(x)$;