Διάρκεια διαγωνίσματος 3 ώρες. Κλειστές όλες οι σημειώσεις.

Τελικό Διαγώνισμα, 5 Ιουνίου 2011

Πρόβλημα 1. (10 μονάδες)
Στο $\mathbb{R}^2$ βρείτε ποια είναι η απόσταση του σημείου $(0,0)$ από την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(0,-1)$ και $(1,0)$, στις νόρμες ℓ_∞ και ℓ_1.

Πρόβλημα 2. (10 μονάδες)
(α) Δώστε τον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας μιας συνάρτησης f.
(β) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο σύνολο $[1,+\infty)$, ενώ η συνάρτηση $g(x) = x^2$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο ίδιο σύνολο.

Πρόβλημα 3. (10 μονάδες)
Βρείτε το μέτρο συνέχειας $\omega_f(\delta)$ της συνάρτησης $f(x) = x^{1/2}$ για $x \in [0,\infty)$.

Πρόβλημα 4. (10 μονάδες)
Αποδείξτε το Πυθαγόρειο Θεώρημα: Αν $f_1,\ldots,f_k$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[a,b]$ και $\langle f_i, f_j\rangle = 0$ για $i \neq j$, τότε
$$\|f_1 + \cdots + f_k\|_2^2 = \|f_1\|_2^2 + \cdots + \|f_k\|_2^2,$$
όπου $\langle F(x), G(x)\rangle = \int_a^b F(x)\overline{G(x)}\,dx$ και $\|F\|_2^2 = \int_a^b |F(x)|^2\,dx$.

Πρόβλημα 5. (10 μονάδες)
Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Αποδείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο $p(x)$ με *ρητούς* συντελεστές τ.ώ. $|f(x) - p(x)| \le \epsilon$ για κάθε $x \in [a,b]$.

Πρόβλημα 6. (10 μονάδες)
Ας είναι $x_1, x_2, \ldots, x_n$ διαφορετικά σημεία στο $\mathbb{R}$ και $d_1, d_2, \ldots, d_n \in \mathbb{C}$. Δείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο $p(x)$ βαθμού $\le n-1$ τ.ώ. για $j = 1,2,\ldots,n$ να ισχύει $p(x_j) = d_j$. Δείξτε επίσης ότι αυτό το πολώνυμο είναι μοναδικό.

Εξηγείστε γιατί δε μπορούμε εν γένει να περιμένουμε το πολυώνυμο $p(x)$ να έχει βαθμό μικρότερο του $n-1$.

Πρόβλημα 7. (10 μονάδες)
Περιγράψτε τον κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης του Simpson και αποδείξτε ότι ολοκληρώνει ακριβώς κάθε πολυώνυμο βαθμού ≤ 3.

Πρόβλημα 8. (10 μονάδες)
Δείξτε ότι για κάθε ακέραιο $k \ge 0$ υπάρχει πολυώνυμο $p(x)$ ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $\cos kx = p(\cos x)$.

Υπόδειξη: $\cos kx = \mathrm{Re}\left[(e^{ix})^k\right]$.