Πανεπιστημιο Κρητης, Τμ. Μαθηματικων, Θ. Προσεγγισης, Ανοιξη 2010-11, Μιχ. Κολουντζακης

Διάρκεια διαγωνίσματος 2 ώρες. Κλειστές όλες οι σημειώσεις.

Πρώτο διαγώνισμα, 9 Μαϊου 2011

Πρόβλημα 1. (10 μονάδες)
Στο $\mathbb{R}^2$ βρείτε ποια είναι η απόσταση του σημείου $(0,0)$ από την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(0,-1)$ και $(1,0)$, στις νόρμες ℓ_2, ℓ_∞ και ℓ_1.

Πρόβλημα 2. (20 μονάδες)
(α) Αποδείξτε ότι αν $k \neq \ell$ τότε οι συναρτήσεις $f(x) = e^{ikx}$ και $g(x) = e^{i\ell x}$ είναι ορθογώνιες στο διάστημα $[0, 2\pi]$ ως προς το εσωτερικό γινόμενο που ορίζεται από τον τύπο

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x)\overline{v(x)}\,dx.$$

(β) Αν $\mathcal{T}_N$ είναι ο γραμμικός χώρος των τριγωνομετρικών πολυωνύμων βαθμού το πολύ N, και $p(x) = \sum_{k=-M}^{M} p_k e^{ikx}$ είναι ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο με $M \geq N$ τότε το πολυώνυμο του $\mathcal{T}_N$ που είναι εγγύτερα στο $p(x)$ στην L^2 απόσταση (που ορίζεται από το παραπάνω εσωτερικό γινόμενο) είναι το πολυώνυμο $\sum_{k=-N}^{N} p_k e^{ikx}$.

Πρόβλημα 3. (10 μονάδες)
Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση τ.ώ. και η f' είναι συνεχής παντού. Αν $a < b$ είναι δύο πραγματικοί αριθμοί και $\epsilon > 0$ δείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο $p(x)$ τ.ώ.

$$|f(x) - p(x)| \leq \epsilon, \quad \left|f'(x) - p'(x)\right| \leq \epsilon$$

για κάθε $x \in [a, b]$.

Πρόβλημα 4. (10 μονάδες)
Έστω $f \in C^{2\pi}$ (συνεχής στο $\mathbb{R}$ και 2π-περιοδική) τ.ώ. και $f' \in C^{2\pi}$. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(k)\right|^2 < \infty.$$

Πρόβλημα 5. (10 μονάδες)
Ποια είναι τα μηδενικά του πολυωνύμου Chebyshev βαθμού n, $T_n(x)$, στο διάστημα $(-1, 1)$; Έχει μηδενικά εκτός του $(-1, 1)$;