Οι ασκήσεις αυτές είναι για να λυθούν από εσάς τους ίδιους. Προσπαθείστε να λύσετε όσο γίνεται περισσότερες πριν έρθετε στα εργαστήρια της Παρασκευής όπου θα σας παρέχεται βοήθεια για τη λύση όσων από αυτές δεν έχετε καταφέρει να λύσετε.

Προσπαθείτε να γράφετε κάτω τα επιχειρήματά σας με τρόπο ώστε να φαίνεται καθαρά ποια πρόταση επικαλείστε κάθε φορά και πώς προκύπτει το κάθε τι το οποίο ισχυρίζεστε.

Φέρτε αυτό το Φυλλάδιο μαζί σας στο εργαστήριο.

Τελευταία ενημέρωση: 6 Μαΐου 2026

1 Στο μετρικό χώρο $C([0,1])$ (συνεχείς συναρτήσεις στο $[0,1]$) με τη μετρική $\rho(f,g) = \sup_{0\le x\le 1}|f(x)-g(x)|$, δείξτε ότι το σύνολο P που αποτελείται από όλα τα πολυώνυμα (που προφανώς είναι στο $C([0,1])$) δεν είναι ανοιχτό ούτε κλειστό.

2 Στον ίδιο μετρικό χώρο με το Πρόβλημα 1 δείξτε ότι το σύνολο

$$A = \{f \in C([0,1]) : \forall x \in [0,1] : f(x) < 2\}$$

είναι ανοιχτό. Είναι το σύνολο

$$B = \{f \in C([0,1]) : \forall x \in [0,1] : f(x) \le 2\}$$

ανοιχτό; Είναι το B κλειστό;

3 Δύο μετρικές ρ και d πάνω στο ίδιο σύνολο X λέγονται *ισοδύναμες* αν έχουν τις ίδιες συγκλίνουσες ακολουθίες, αν δηλ.

$$d(x_n,x)\to 0 \iff \rho(x_n,x)\to 0,$$

για κάθε $x, x_n \in X$ (μια ακολουθία στοιχείων του X, με άλλα λόγια, συγκλίνει ως προς τη μία μετρική αν και μόνο αν συγκλίνει ως προς την άλλη).

(1) Αποδείξτε ότι για $X = \mathbb{R}^n$ οι μετρικές $d_\infty(x,y)$, $d_1(x,y)$ και $d_2(x,y)$ είναι ανά δύο ισοδύναμες. Θυμίζουμε

$$d_\infty(x,y) = d_\infty((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = \max\{|x_j-y_j| :\ j = 1,2,\ldots,n\},$$

$$d_1(x,y) = d_1((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = \sum_{j=1}^n |x_j-y_j|,$$

και

$$d_2(x,y) = d_2((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = \left(\sum_{j=1}^n |x_j-y_j|\right)^{1/2}.$$

(2) Αποδείξτε ότι για $X = \mathbb{Z}$ η διακριτή μετρική και η συνηθισμένη μετρική $d(x,y) = |x-y|$ είναι μεταξύ τους ισοδύναμες.

(3) Αποδείξτε ότι για $X = \mathbb{R}$ η διακριτή μετρική και η συνηθισμένη μετρική $d(x,y) = |x-y|$ <u>δεν</u> είναι μεταξύ τους ισοδύναμες.

(4) Αποδείξτε ότι για $X = C([0,1]) = \{f : [0,1]\to\mathbb{R} :\ f \text{ συνεχής}\}$ η ομοιόμορφη μετρική

$$\rho(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)|$$

και η L_1 μετρική

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx$$

<u>δεν</u> είναι μεταξύ τους ισοδύναμες.
Υπόδειξη: Εξετάστε την ακολουθία $f_n \in C([0,1])$ με $f_n(x) = x^n$ ως προς τη σύγκλιση και με τις δύο μετρικές.

4 Ας είναι ρ και d δυο ισοδύναμες μετρικές πάνω στο ίδιο σύνολο X (δείτε Πρόβλημα 3 για τον ορισμό).

(1) Δείξτε ότι ένα σύνολο $A \subseteq X$ είναι κλειστό ως προς τη μετρική ρ αν και μόνο αν είναι κλειστό ως προς τη μετρική d. Ομοίως για ανοιχτά σύνολα.

(2) Ας είναι μια συνάρτηση $f : X \to Y$, όπου Y είναι ένας μετρικός χώρος με μετρική η. Δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής ως προς τη μετρική ρ (ως συνάρτηση δηλ. ανάμεσα στους μετρικούς χώρους (X, ρ) και (Y, η)) αν και μόνο αν είναι συνεχής ως προς τη μετρική d (ως συνάρτηση δηλ. ανάμεσα στους μετρικούς χώρους (X, d) και (Y, η)).

5 Σε ένα μετρικό χώρο ένα σύνολο $A \subseteq X$ λέγεται *φραγμένο* αν περιέχεται σε κάποια ανοιχτή μπάλα (δίσκο), αν υπάρχει δηλ. $x \in X$ και $r > 0$ τέτοιο ώστε $A \subseteq B_r(x) = \{y \in X : \ d(x, y) < r\}$, όπου d η μετρική του χώρου.

(1) Δείξτε ότι δύο ισοδύναμες μετρικές στο X (δείτε Πρόβλημα 3 για τον ορισμό) δεν έχουν απαραίτητα τα ίδια φραγμένα σύνολα. Βρείτε δηλ. παράδειγμα ενός χώρου X με δύο ισοδύναμες μετρικές ρ και d και ένα σύνολο $A \subseteq X$ που να είναι φραγμένο ως προς τη μετρική ρ αλλά όχι ως προς τη μετρική d.
Υπόδειξη: Αν η μετρική σε ένα χώρο είναι η διακριτή τότε όλα τα σύνολα είναι φραγμένα.

(2) Αν ο χώρος X έχει μετρική d δείξτε ότι η συνάρτηση

$$\rho(x, y) = \min \{d(x, y), 1\}$$

ορίζει επίσης μια μετρική στο X, η ρ είναι ισοδύναμη με τη d, και κάθε σύνολο είναι φραγμένο ως προς τη μετρική ρ.

(3) Αν ο χώρος X έχει μετρική d δείξτε ότι η συνάρτηση

$$\eta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

ορίζει επίσης μια μετρική στο X, η η είναι ισοδύναμη με τη d, και κάθε σύνολο είναι φραγμένο ως προς τη μετρική η.
Υπόδειξη: Για την τριγωνική ανισότητα θα χρειαστείτε ότι η συνάρτηση $\frac{x}{1+x}$ είναι αύξουσα για $x \geq 0$.