Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων

Λύσεις των ασκήσεων

1 Αν είναι X ο χώρος όλων των ακολουθιών αριθμών που συγκλίνουν απόλυτα

$$X = \left\{ (a_1, a_2, \ldots) : \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| < \infty \right\}$$

και $d(a, b) = \sum_{j=1}^{\infty} |a_j - b_j|$, όπου $a, b \in X$, δείξτε ότι η ποσότητα $d(a, b)$ είναι πάντα πεπερασμένη και είναι μετρική στο χώρο X.

Λύση: Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε $|a_j - b_j| \le |a_j| + |b_j|$ για κάθε j. Αθροίζοντας για όλα τα j παίρνουμε $d(a, b) \le \sum_j |a_j| + \sum_j |b_j| < \infty$.

Αν $d(a, b) = 0$ πρέπει όλοι οι όροι του αθροίσματος που ορίζει την $d(a, b)$ να είναι 0, άρα έχουμε $a_j = b_j$ για κάθε j, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι οι δύο ακολουθίες a και b είναι ίσες.

Η συμμετρία $d(a, b) = d(b, a)$ είναι προφανής.

Για την τριγωνική ανισότητα $d(a, b) \le d(a, c) + d(c, b)$ για κάθε $a, b, c \in X$, αθροίζουμε για όλα τα j την ανισότητα

$$|a_j - b_j| \le |a_j - c_j| + |c_j - b_j|.$$

2 Ας είναι $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ένα σύνολο πόλεων σε μια χώρα Ω. Ανάμεσα σε δύο πόλεις $x, y \in X$ μπορεί να υπάρχει ένας δρόμος που να τις συνδέει (με κάποιο θετικό και πεπερασμένο μήκος). Το δίκτυο των δρόμων που υπάρχουν στη χώρα Ω είναι τέτοιο που μπορεί κανείς να πάει (διανύοντας κάποιους από τους δρόμους αυτούς), από οποιαδήποτε πόλη $x \in X$ σε οποιαδήποτε άλλη πόλη $y \in X$. Ορίζουμε για δύο πόλεις x, y

$$d(x, y) = \begin{array}{c}\text{το ελάχιστο μήκος που χρειάζεται να}\\ \text{διανύσουμε για να πάμε από την πόλη } x \text{ στην πόλη } y.\end{array}$$

(Όλοι οι δρόμοι είναι διπλής κατεύθυνσης.) Δείξτε ότι η συνάρτηση $d(\cdot, \cdot)$ είναι μετρική στο X.

Λύση:

Αν $d(x, y) = 0$ αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να πάμε από την πόλη x στην πόλη y χωρίς να διανύσουμε κανένα δρόμο (αφού όλοι οι δρόμοι έχουν **θετικό** μήκος), άρα πρόκειται για την ίδια πόλη και $x = y$.

Αν από την x μπορούμε να πάμε στην y διανύοντας μήκος L τότε μπορούμε και από την y να πάμε στην x διανύοντας μήκος L, αντιστρέφοντας τη διαδρομή μας, πράγμα εφικτό αφού όλοι οι δρόμοι είναι διπλής κατεύθυνσης. Άρα $d(x, y) = d(y, x)$.

Για να δείξουμε την τριγωνική ανισότητα

$$d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y), \quad \text{για οποιεσδήποτε τρεις πόλεις } x, y, z,$$

αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει διαδρομή από την x στην y με μήκος $\le d(x, z) + d(z, y)$ (γιατί τότε το ίδιο θα ισχύει και για την ελάχιστη διαδρομή).

Ας είναι D_1 μια βέλτιστη διαδρομή (μπορεί να υπάρχουν και περισσότερες βέλτιστες) από την πόλη x στην πόλη z και D_2 μια βέλτιστη διαδρομή από την πόλη z στην πόλη y. Τότε μπορούμε να ακολουθήσουμε την εξής διαδρομή από την x στην y: πρώτα ακολουθούμε την D_1 και μετά την D_2. Αυτή η διαδρομή έχει μήκος ακριβώς $d(x, z) + d(z, y)$.

3 Έστω Σ ένα πεπερασμένο σύνολο το οποίο ονομάζουμε *αλφάβητο* και τα στοιχεία του *γράμματα*. Μια λέξη είναι μια πεπερασμένη ακολουθία $w = w_1 w_2 \cdots w_n$ από γράμματα $w_j \in \Sigma$, της οποίας το *μήκος* είναι ο αριθμός $n \in \{0, 1, \ldots\}$. Ας είναι X_N το σύνολο όλων των λέξεων με γράμματα από το Σ και μήκος ακριβώς N. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$d_H(w, v) = |\{j : w_j \ne v_j\}|,$$

για κάθε δύο λέξεις $w, v \in X_N$ (με άλλα λόγια, το $d_H(w, v)$ είναι το πλήθος των θέσεων όπου διαφέρουν οι δύο λέξεις w, v. Δείξτε ότι η $d_H(\cdot, \cdot)$ είναι μετρική στο X_N.

Λύση:

Αν $d_H(w, v) = 0$ αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να πάρουμε την v από την w χωρίς καμία αλλαγή, άρα $w = v$.

Η συμμετρία είναι επίσης φανερή: αν μπορούμε να πάρουμε την v από την w με k αλλαγές τότε μπορούμε και από την v να πάρουμε την w εκτελώντας τις αντίστροφες αλλαγές (και με ανάποδη σειρά), άρα πάλι με k αλλαγές.

Για την τριγωνική ανισότητα: αν μπορούμε να πάρουμε την x από την w με κάποιες k αλλαγές και την v από την x με κάποιες ℓ αλλαγές τότε μπορούμε να πάρουμε την v από την w με, το πολύ, $k + \ell$ αλλαγές, πηγαίνοντας μέσω της x. Αυτό δείχνει την τριγωνική ανισότητα.

4 Ας είναι $\Gamma = \{A, C, G, T\}$ και X το σύνολο όλων των μορίων DNA (λέξεις από γράμματα του Γ οποιουδήποτε πεπερασμένου μήκους – δείτε το Πρόβλημα 3). Αν $w \in X$ είναι ένα μόριο, τότε μια *πράξη* πάνω στο μόριο είναι ένα από τα παρακάτω: (α) διαγραφή ενός γράμματος, (β) προσθήκη ενός γράμματος (μέσα στο μόριο ή στα άκρα), (γ) αλλαγή ενός γράμματος του μορίου σε ένα άλλο. Αν $w, v \in X$ είναι δύο μόρια ορίζουμε

$$d(w, v) = \substack{\text{ο ελάχιστος αριθμός πράξεων που χρειάζονται} \\ \text{για να μετατραπεί το μόριο } w \text{ στο μόριο } v.}$$

Δείξτε ότι $d(w, v)$ είναι πάντα ένας πεπερασμένος αριθμός (κάθε μόριο δηλ. μπορεί να μετατραπεί σε οποιοδήποτε άλλο με πεπερασμένες στο πλήθος πράξεις) και επίσης ότι είναι μετρική πάνω στο X.

Λύση: Η απόδειξη για την άσκηση αυτή είναι ίδια ακριβώς με την απόδειξη για την άσκηση 3. Το μόνο ου χρειάζεται είναι να ερμηνεύσουμε τη λέξη «αλλαγή» με διαφορετικό τρόπο σε αυτή την άσκηση απ' ό,τι στην άσκηση 3. Στην άσκηση 3 αλλαγή σήμαινε αντικατάσταση ενός γράμματος από ένα άλλο ενώ εδώ σημαίνει κάτι πιο γενικό (τα (α,β,γ) που περιγράφονται παραπάνω). Το σημαντικό είναι ότι όλες οι πράξεις (α,β,γ) είναι αντιστρέψιμες.