

Πρόβλημα 1. (10 μονάδες) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $C = \int_{\mathbb{R}} e^f < \infty$. Δείξτε ότι
$$m\{f > \lambda\} \leq Ce^{-\lambda},$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Λύση:

$$Ce^{-\lambda} = e^{-\lambda} \int_{\mathbb{R}} e^f \geq e^{-\lambda} \int_{\{f > \lambda\}} e^f \geq e^{-\lambda} \int_{\{f > \lambda\}} e^\lambda = e^{-\lambda} m\{f > \lambda\} e^\lambda = m\{f > \lambda\}.$$