Πανεπ. Κρητησ, Τμημα Μαθηματικων, Πραγματικη Αναλυση, Ανοιξη 2009-10, Μιχ. Κολουντζακησ
2ο μικρό διαγώνισμα, 24 Φεβ. 2010

Πρόβλημα 1. (10 μονάδες)
Έχουμε δύο σύνολα $K, L \subseteq \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε
$$K \subseteq \{(x,y) :\ x < 0\}, \quad L \subseteq \{(x,y) : x > 2\}.$$
Δείξτε ότι $m_2^*(K) + m_2^*(L) = m_2^*(K \cup L)$.

Λύση: Από την υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου ισχύει $m_2^*(K \cup L) \le m_2^*(K) + m_2^*(L)$, άρα αρκεί να δείξουμε την ανισότητα

$$m_2^*(K \cup L) \ge m_2^*(K) + m_2^*(L). \tag{1}$$

Αν κάποιο από τα K, L έχει άπειρο εξωτερικό μέτρο τότε το ίδιο ισχύει και για το $K \cup L$ οπότε η (1) ισχύει (αφού το αριστερό μέλος είναι $+\infty$). Άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα K, L έχουν πεπερασμένο εξωτερικό μέτρο και, από την υποπροσθετικότητα, το ίδιο ισχύει και για το $K \cup L$.

Έστω $\epsilon > 0$ και $I_1, I_2, \ldots \subseteq \mathbb{R}^2$ διαστήματα (ορθογώνια δηλαδή) που καλύπτουν το $K \cup L$ και είναι τέτοια ώστε
$$\sum_n V_2(I_n) \le m_2^*(K \cup L) + \epsilon.$$
Από τα I_n δημιουργούμε μια κάλυψη του K και μια του L ώς εξής. Ορίζουμε
$$I_n' = I_n \cap \{(x,y) :\ x < 0\}, \quad I_n'' = I_n \cap \{(x,y) :\ x > 2\}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$
Τότε $I_n' \cap I_n'' = \emptyset$ και άρα $V_2(I_n') + V_2(I_n'') \le V_2(I_n)$. Επίσης τα I_n' αποτελούν κάλυψη του K και τα I_n'' αποτελούν κάλυψη του L.

Άρα
$$m_2^*(K) + m_2^*(L) \le \sum_n V_2(I_n') + \sum_n V_2(I_n'') \le \sum_n V_2(I_n) \le m_2^*(K \cup L) + \epsilon.$$
Αφού το $\epsilon > 0$ μπορεί να είναι οτιδήποτε αυτό μας δίνει τη (1).

Σχόλιο: Το σημαντικό στα παραπάνω είναι ότι τα δύο σύνολα περιέχονται σε δύο ξένα ημιεπίπεδα H_1 και H_2 με άξονα παράλληλο με τον άξονα των y. Αυτό έχει σημασία γιατί αν I είναι διάστημα τότε $I \cap H_1$ είναι επίσης διάστημα, και άρα τέμνοντας την κάλυψη της ένωσης με ένα ημιεπίπεδο παίρνουμε και πάλι μια ένωση διαστημάτων που καλύπτει το ένα από τα δύο σύνολα. Αντίθετα δεν είναι σημαντικό το ότι υπάρχει θετική απόσταση ανάμεσά τους. Η λύση θα ήταν η ίδια αν τα δύο σύνολα ανήκαν το ένα στο ημιεπίπεδο $\{x < 0\}$ και το άλλο στο ημιεπίπεδο $\{x > 0\}$.