Πανεπ. Κρητης, Τμημα Μαθηματικων, Πραγματικη Αναλυση, Ανοιξη 2009-10, Μιχ. Κολουντζακης

6ο φυλλάδιο προβλημάτων, 17 Μαρ. 2010

Πρόβλημα 1. Έστω $N \subseteq \mathbb{R}$, μη μετρήσιμο, και $f(x) = 1$ αν $x \in N$ και $f(x) = -1$ αν $x \in N^c$. (Ένας άλλος τρόπος να το γράψουμε αυτό είναι $f(x) = \mathbf{1}(x \in N) - \mathbf{1}(x \in N^c)$.) Δείξτε ότι η f δεν είναι μετρήσιμη ενώ η $|f|$ είναι.

Πρόβλημα 2. Βρείτε τις συναρτήσεις $\limsup_{n\to+\infty} f_n$, $\liminf_{n\to+\infty} f_n$ και $\lim_{n\to+\infty} f_n$ καθώς και τα πεδία ορισμού τους για τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων.

(i) $f_n(x) = x^n$ $(0 \le x \le 1)$,

(ii) $f_{2n}(x) = \left(1 + \frac{x}{2n}\right)^{2n}, f_{2n-1}(x) = \left(1 - \frac{x}{2n-1}\right)^{2n-1}$ $(0 \le x < +\infty)$,

(iii) $f_{2n}(x) = x - x^{2n}, f_{2n-1}(x) = x^{2n-1}$ $(0 \le x \le 1)$,

(iv) $f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \in \{r_1, \ldots, r_n\}, \\ 1, & \text{αν } x \in [0,1] \setminus \{r_1, \ldots, r_n\}, \end{cases}$ όπου $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{r_1, r_2, \ldots\}$ είναι οποιαδήποτε αρίθμηση του $\mathbb{Q} \cap [0,1]$.

Πρόβλημα 3. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής δείξτε ότι η σύνθεση $g(f(x))$ είναι μετρήσιμη.

Πρόβλημα 4. Έστω οποιοδήποτε $E \subseteq \mathbb{R}$ το οποίο δεν είναι Lebesgue μετρήσιμο στο $\mathbb{R}$. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τον τύπο $f(x) = \begin{cases} -e^x, & \text{αν } x \notin E, \\ e^x, & \text{αν } x \in E. \end{cases}$ Αποδείξτε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = a\}$ είναι είτε μονοσύνολο είτε κενό. Επομένως το σύνολο αυτό είναι Lebesgue μετρήσιμο στον $\mathbb{R}$ για κάθε a. Όμως, αποδείξτε ότι η f δεν είναι Lebesgue μετρήσιμη.