10ο φυλλάδιο προβλημάτων, 17 Μαΐου 2010

Πρόβλημα 1. Δείξτε ότι αν ο τύπος του παραλληλογράμμου
$$\|f-g\|_p^2 + \|f+g\|_p^2 = 2\|f\|_p^2 + 2\|g\|_p^2,$$
ισχύει για κάθε $f, g \in L^p$ τότε $p = 2$.

Πρόβλημα 2. Ας είναι $M \subset L^2$ κλειστός γραμμικός υπόχωρος. Ορίζουμε τις απεικονίσεις $P : L^2 \to M$ και $Q : L^2 \to M^\perp$ ώστε να ισχύει $f = P(f) + Q(f)$ για κάθε $f \in L^2$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα της προβολής δείξτε ότι οι απεικονίσεις αυτές είναι καλώς ορισμένες, είναι γραμμικές και συνεχείς.

Πρόβλημα 3. (α) Στο χώρο $L^2([0,\pi])$ δείξτε ότι οι συναρτήσεις
$$1, \cos t, \cos 2t, \cos 3t, \ldots, \sin t, \sin 2t, \ldots$$
είναι ανά δύο ορθογώνιες. Ποια είναι η νόρμα αυτών;
(β) Αν η συνάρτηση $f \in L^2([0,\pi])$ είναι πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός κάποιων από τις παραπάνω συναρτήσεις με γνωστούς συντελεστές δείξτε πώς μπορείτε να υπολογίσετε τη νόρμα της f μέσω των συντελεστών αυτών.

Πρόβλημα 4. (α) Δείξτε ότι ο χώρος $L^2([0,1])$ είναι *διαχωρίσιμος*, έχει δηλ. ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο. (*Υπόδειξη:* Θεωρείστε το σύνολο των κλιμακωτών συναρτήσεων που παίρνουν ρητές τιμές και όπου τα διαστήματα έχουν ρητά άκρα. Δείξτε ότι είναι ένα τέτοιο πυκνό υποσύνολο.)
(β) Αν $\mathcal{F} \subset L^2([0,1])$ είναι ένα σύνολο με στοιχεία ανά δύο ορθογώνια μεταξύ τους, δείξτε ότι το σύνολο αυτό είναι αριθμήσιμο. (*Υπόδειξη:* Κατ΄ αρχήν μπορείτε να υποθέσετε ότι όλα τα στοιχεία του $\mathcal{F}$ έχουν νόρμα 1. Έπειτα υπολογίστε την απόσταση δύο στοιχείων του και δείξτε ότι είναι $\sqrt{2}$. Θεωρείστε τέλος μια ανοιχτή μπάλα ακτίνας $\sqrt{2}/2$ με κέντρο κάθε στοιχείο του $\mathcal{F}$. Τι σχέση έχουν αυτές μεταξύ τους;)