Θεώρημα 0.1. *Αν* $A \subseteq \mathbb{R}^d$ *είναι μετρήσιμο και* $\epsilon > 0$ *τότε υπάρχει κλειστό* $F \subseteq A$ *τ.ώ.* $m(A \setminus F) < \epsilon$.

Απόδειξη.

Χρησιμοποιούμε το θεώρημα που λέει ότι για κάθε μετρήσιμο E κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ανοιχτό $G \supseteq E$ τ.ώ. $m(G) \le m(E) + \epsilon$.

Παρατηρείστε ότι αυτή η πρόταση δε λέει τίποτα αν $m(E) = \infty$. Αν όμως $m(E) < \infty$ τότε

$$m(G \setminus E) \le \epsilon \tag{1}$$

αφού $m(G \setminus E) = m(G) - m(E)$ (προσθετικότητα). Δείχνουμε πρώτα ότι ακόμη και στην περίπτωση που $m(E) = \infty$ μπορούμε και πάλι να βρούμε ανοιχτό $G \supseteq E$ ώστε να ισχύει η (1).

Έστω λοιπόν $E \subseteq \mathbb{R}^d$ μετρήσιμο και B_n η ανοιχτή μπάλα ακτίνας n και με κέντρο το 0. Χρησιμοποιώντας την (1) για το σύνολο $E \cap B_n$ (που έχει πεπερασμένο μέτρο αφού η μπάλα έχει) παίρνουμε ανοιχτό $G_n \supseteq E \cap B_n$ τ.ώ. $m(G_n \setminus (E \cap B_n)) \le \epsilon 2^{-n}$, για $n = 1, 2, \ldots$. Ορίζουμε το ανοιχτό σύνολο $G = \bigcup_n G_n$ το οποίο περιέχει το E αφού περιέχει όλα τα $E \cap B_n$. Έχουμε

$$\begin{aligned} m(G \setminus E) &= m(\bigcup_n (G_n \setminus E)) \\ &\le \sum_n m(G_n \setminus E) \quad \text{(υποπροσθετικότητα)} \\ &\le \sum_n m(G_n \setminus (E \cap B_n)) \quad \text{(μικραίνουμε τα σύνολα που αφαιρούμε)} \\ &\le \sum_n \epsilon 2^{-n} = \epsilon. \end{aligned}$$

Τώρα μπορούμε να δείξουμε το θεώρημά μας. Έστω μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Χρησιμοποιώντας αυτό που μόλις δείξαμε, υπάρχει ανοιχτό $G \supseteq A^c$ τ.ώ. $m(G \setminus A^c) \le \epsilon$. Ορίζουμε το κλειστό σύνολο $F = G^c$ και έχουμε $F \subseteq A$ αφού $F^c \supseteq A^c$. Επίσης

$$A \setminus F = A \cap G = G \setminus A^c$$

άρα $m(A \setminus F) \le \epsilon$.

■