ΣΕΜΙΝΑΡΙΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ
#2: Προβλήματα συνολοθεωρητικά και τοπολογικά
11 Μαρτίου, 1998

1. Δείξτε ότι το $\mathbb{R}$ δεν είναι αριθμήσιμο σύνολο.
Δείξτε ότι το σύνολο όλων των μιγαδικών αριθμών (αλγεβρικοί αριθμοί) που είναι ρίζα κάποιου πολυωνύμου με ακεραίους συντελεστές είναι αριθμήσιμο.
Υπάρχει μιγαδικός αριθμός που να μην είναι τέτοιος;

2. Εστω A ένα σύνολο με σύνολα ακεραίων ως στοιχεία του. Πόσο μεγάλος μπορεί να είναι ο πληθάριθμος του A αν:
(α) Κάθε δύο στοιχεία του έχουν τομή μεγέθους το πολύ 3;
(β) Κάθε δύο στοιχεία του έχουν πεπερασμένη τομή;

3. (Schröder-Bernstein) Εστω δύο σύνολα A και B και δύο συναρτήσεις $f : A \to B$ και $g : B \to A$ οι οποίες είναι 1-1. Δείξτε ότι τα δύο σύνολα A και B έχουν τον ίδιο πληθάριθμο, δηλ. ότι υπάρχει μια 1-1 και επί απεικόνιση $\varphi : A \to B$.

4. Εστω $\mathcal{F}$ το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ για τις οποίες υπάρχει ένα πρόγραμμα που να τις υπολογίζει στον υπολογιστή σας. (Στο πρόγραμμα δίνετε το n και σας επιστρέφει το $f(n)$.) Υπάρχει κάποια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ που δεν ανήκει στο $\mathcal{F}$;

5. Μπορείτε να γράψετε το $\mathbb{R}$ σαν ξένη ένωση ανοιχτών διαστημάτων; Κλειστών διαστημάτων;

6. Μπορείτε να γράψετε το $\mathbb{R}^2$ σαν ξένη ένωση κύκλων (περιφερειών);

7. (Καμπύλη Peano) Φτιάξτε μια <u>συνεχή</u> $f : [0, 1] \to [0, 1]^2$ που να είναι επί. Μπορεί μία τέτοια f να είναι και ένα προς ένα;

8. Εστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ και $E = \{kx_1 + lx_2 : \quad k, l \in \mathbb{Z}\}$. Περιγράψτε τις δυνατές μορφές της κλειστότητας $\overline{E}$ του E.

9. Εστω οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 και το σύνολο

$$E = \{kz_1 + lz_2 + mz_3 : \quad k, l, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Περιγράψτε τις δυνατές μορφές της κλειστότητας $\overline{E}$ του E.

10. Εστω $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ανοιχτό και φραγμένο και P ένα σημείο του επιπέδου. Δείξτε ότι υπάρχει κάποια ευθεία l που περνάει από το P και διαιρεί το Ω σε δύο τμήματα ίσου εμβαδού.

11. Εστω $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ανοιχτό και φραγμένο. Δείξτε ότι υπάρχουν δυο ορθογώνιες ευθείες l_1 και l_2 που χωρίζουν το Ω σε 4 κομμάτια ίσου εμβαδού.

12. Η απεικόνιση $f : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}^2$ είναι ομοιομορφισμός, δηλ. μια συνεχής, 1-1 και επί συνάρτηση της οποίας η αντίστροφη f^{-1} είναι επίσης συνεχής. Επιπλέον υποθέτουμε ότι για κάθε δύο απέναντι πλευρές του τετραγώνου $[0, 1]^2$ η απόσταση των εικόνων τους (μέσω της f) είναι μεγαλύτερη ή ίση του 1.
Δείξτε ότι το $f\left([0, 1]^2\right)$ έχει εμβαδό τουλάχιστο 1.

13. Εστω μια οικογένεια $\mathcal{F}$ από ξένες ανά δύο, ομοιομορφικές εικόνες του σχήματος 8 στο επίπεδο. Δηλ. τα στοιχεία της $\mathcal{F}$ είναι κλειστές καμπύλες του επιπέδου που αυτοτέμνονται ακριβώς μία φορά.
Δείξτε ότι η $\mathcal{F}$ είναι το πολύ αριθμήσιμη.

Ομοίως αν η $\mathcal{F}$ αποτελείται από ομοιομορφικές εικόνες του γράμματος Υ.