Πανεπιστημιο Κρητης, Τμ. Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Θεωρια Μετρου, Φθινοπωρο 2015-16, Μιχ. Κολουντζακης

Τελικό Διαγώνισμα

Τρίτη 12 Ιανουαρίου 2016

Πρόβλημα 1. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία μετρησίμων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε
(1) $\liminf_n f_n(x) = 0$, $\forall x \in [0,1]$.
(2) $\limsup_n f_n(x) = 1$, $\forall x \in [0,1]$.
(3) $\lim_n \int_{[0,1]} f_n = \frac{1}{3}$.

Πρόβλημα 2. Ένας πραγματικός αριθμός $x \in [0,1]$ ονομάζεται *προσεγγίσιμος* αν υπάρχουν άπειροι μη αρνητικοί ρητοί $\frac{p}{q}$ τέτοιοι ώστε

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \le \frac{100}{q^3}.$$

Δείξτε ότι οι προσεγγίσιμοι πραγματικοί αριθμοί του $[0,1]$ έχουν μέτρο 0.

Πρόβλημα 3. Υπολογίστε, με πλήρη αιτιολόγηση, το όριο

$$\lim_n n \int_0^\infty \frac{\sin(x/n)}{x(1+x^2)}\, dx.$$

Πρόβλημα 4. Για $f \in L^1(\mathbb{R})$ ορίζουμε το μετασχηματισμό Fourier της f να είναι η συνάρτηση $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi i x t}\, dt.$$

Αν $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ δείξτε ότι $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$.

Πρόβλημα 5. Ο χώρος $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$ είναι ο γραμμικός χώρος όλων των απεικονίσεων $x : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}$ τέτοιες ώστε

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} |x(m,n)|^2 < \infty. \tag{1}$$

Ώς νόρμα στο χώρο αυτό παίρνουμε την τετραγωνική ρίζα της ποσότητας στο (1). Αποδείξτε ότι ο χώρος αυτός είναι διαχωρίσιμος (έχει δηλ. αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο).

Πρόβλημα 6. Έστω S ο γραμμικός υπόχωρος του $L^2(\mathbb{R})$ που αποτελείται από τις συναρτήσεις που είναι 0 σχεδόν παντού στο σύνολο $\mathbb{R} \setminus [0,1]$. Δείξτε ότι ο S είναι κλειστός υπόχωρος και βρείτε το ορθογώνιο συμπλήρωμα $S^\perp$ του S στον $L^2(\mathbb{R})$.

- **Διάρκεια 3 ώρες.**