Διάρκεια διαγωνίσματος 3 ώρες. Κλειστές όλες οι σημειώσεις.

Πρώτο διαγώνισμα, 10 Δεκεμβρίου 2010

Πρόβλημα 1. Αν $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{inx}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση.

Πρόβλημα 2. Έστω $f \in C^1(\mathbb{T})$.
(α) Εκφράστε τους συντελεστές Fourier της f' μέσω των συντελεστών Fourier της f.
(β) Δείξτε ότι $\left|\widehat{f}(n)\right| = o(|n|^{-1})$ για $|n| \to \infty$.

Πρόβλημα 3. Υποθέστε γνωστό το θεώρημα του Fejér για συνεχείς συναρτήσεις, ότι δηλ. αν $f \in C(\mathbb{T})$ τότε $\sigma_N(f)(x) \to f(x)$ ομοιόμορφα για $x \in [0, 2\pi]$, όπως επίσης και το ότι οι συνεχείς συναρτήσεις είναι πυκνές στο χώρο $L^1(\mathbb{T})$. Αποδείξτε το θεώρημα του Fejér για το $L^1(\mathbb{T})$, ότι δηλ. $\|\sigma_N(f) - f\|_{L^1} \to 0$ για $N \to \infty$.

Πρόβλημα 4. Αν $\epsilon_j \in \{-1, +1\}$, $j = 1, \ldots, N$, και $f(x) = \sum_{j=1}^{N} \epsilon_j e^{ijx}$, δείξτε ότι

$$\sup_{x \in [0,2\pi]} |f(x)| \geq \sqrt{N}.$$

Πρόβλημα 5. Αν $p(x) = \sum_{n=0}^{N} p_n x^n$ είναι πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές και $f \in L^1(\mathbb{T})$ ορίζουμε

$$p^*(f) = \sum_{n=0}^{N} p_n f^{*n}$$

όπου

$$f^{*n} = f * f * \cdots * f, \quad \text{(συνέλιξη της } f \text{ με τον εαυτό της } k \text{ φορές).}$$

(α) Βρείτε ένα τύπο για την ποσότητα $\widehat{p^*(f)}(n)$ μέσω των συντελεστών p_n και των συντελεστών Fourier της f.
(β) Βρείτε ένα άνω φράγμα για την ποσότητα $\|p^*(f)\|_{L^1}$ μέσω των συντελεστών p_n και της ποσότητας $\|f\|_{L^1}$.
(γ) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ και $\|f\|_{L^1} \leq 1$ δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n f^{*n}$$

συγκλίνει στο χώρο $L^1(\mathbb{T})$.