Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων

**Θεωρία Ομάδων**

Μιχάλης Κολουντζάκης – Εαρινό εξάμηνο 1999-2000

# ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ

**1.** Έστω $G$ μια ομάδα. Η $G$ δρα πάνω στον εαυτό της με συζυγία. Αυτό σημαίνει ότι κάθε στοιχείο $g \in G$ ορίζει μια μετάθεση $\phi_g$ των στοιχείων της $G$ που δίνεται από τον τύπο

$$x \to \phi_g(x) = gxg^{-1}.$$

Αυτή η μετάθεση δηλαδή, στέλνει το στοιχείο $x$ της ομάδας στο στοιχείο $g^{-1}xg$.
(α) Δείξτε ότι η δράση αυτή, όπως ορίστηκε, είναι όντως μια δράση ομάδας πάνω σε ένα σύνολο.
(β) Αν $|Gx| = 1$, για κάποιο στοιχείο $x \in G$, τι συμπέρασμα προκύπτει για το $x$;
(γ) Αν $H \le G$ και $GH \subseteq H$, όπου

$$GH = \{\phi_g(h) : \ h \in H, g \in G\},$$

τι συμπεραίνετε για την υποομάδα $H$;

**2.** Έστω $H \le G$. Η $H$ λέγεται *χαρακτηριστική υποομάδα* της $G$ αν για κάθε αυτομορφισμό $\alpha$ της $G$ έχουμε $\alpha(H) \subseteq H$. Αν $K \le H \trianglelefteq G$ και η $K$ είναι χαρακτηριστική υποομάδα της $H$ τότε δείξτε ότι $K \trianglelefteq G$.

**3.** (α) Με $\mathrm{Aut}(G)$ συμβολίζεται το σύνολο όλων των αυτομορφισμών της ομάδας $G$. Δείξτε ότι το $\mathrm{Aut}(G)$ αποτελεί ομάδα με πράξη τη σύνθεση συναρτήσεων.
(β) Με $\mathrm{Inn}(G)$ συμβολίζουμε το υποσύνολο του $\mathrm{Aut}(G)$ που αποτελείται από τους *εσωτερικούς* αυτομορφισμούς, δηλ. τους αυτομορφισμούς που προέρχονται από συζυγία με ένα στοιχείο $g$ της $G$ και στέλνουν

$$x \to gxg^{-1}.$$

Δείξτε ότι το $\mathrm{Inn}(G)$ είναι υποομάδα της $\mathrm{Aut}(G)$ και μάλιστα κανονική.

**4.** Για μια ομάδα $G$ το πηλίκο $G/Z(G)$ είναι κυκλική ομάδα, όπου $Z(G)$ είναι το κέντρο της $G$. Δείξτε ότι η $G$ είναι αβελιανή.

**5.** (α) Δείξτε ότι αν σχηματίσουμε, μέσα σε μια αβελιανή ομάδα $G$, το σύνολο που απαρτίζεται από το μοναδιαίο στοιχείο και όλα τα στοιχεία τάξης 2, τότε παίρνουμε μια υποομάδα της $G$.
(β) Δείξτε με ένα αντιπαράδειγμα ότι αυτό δεν ισχύει χωρίς την υπόθεση ότι η $G$ είναι αβελιανή.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες. Όλες οι σημειώσεις πρέπει να είναι κλειστές. Καλή επιτυχία.

Ηράκλειο, 30 Αυγούστου 2000