Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Μεταπτυχιακό Μάθημα «Πραγματική Ανάλυση»

Χειμερινό Εξάμηνο 2016-17 —- Διδάσκων: Μιχάλης Κολουντζάκης

Λύσεις Φυλλαδίου Ασκήσεων 6 – 3-11-2016. Παραδοτέες 10-11-2016 στο μάθημα

Πρόβλημα 1. Αν $f_t(x) = f(x-t)$ δείξτε ότι αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ τότε $f_t \to f$ για $t \to 0$ όπου η σύγκλιση είναι στον $L^1(\mathbb{R})$.

Λύση: Ας είναι $\epsilon > 0$ και $g \in C_c(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε $\|f-g\|_1 \le \epsilon$. Η g είναι ομοιόμορφα συνεχής αφού έχει συμπαγή φορέα, και ας πούμε ότι μηδενίζεται έξω από ένα διάστημα μήκους L. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|x-y| < \delta \implies |g(x)-g(y)| < \epsilon/(2L)$. Αυτό συνεπάγεται ότι $\|g(\cdot)-g(\cdot-h)\|_1 < \epsilon$ αρκεί $|h| < \delta$.

Έχουμε

$$\begin{aligned}
\|f(\cdot)-f(\cdot-t)\|_1 &\le \|f(\cdot)-g(\cdot)\|_1 + \|g(\cdot)-g(\cdot-t)\|_1 + \|g(\cdot-t)-f(\cdot-t)\|_1 \\
&= \|f-g\|_1 + \|g(\cdot)-g(\cdot-t)\|_1 + \|f-g\|_1 \\
&\le 3\epsilon,
\end{aligned}$$

αν $|t| < \delta$.

Πρόβλημα 2. Σε ένα χώρο Hilbert ο M είναι κλειστός υπόχωρος. Δείξτε ότι $(M^\perp)^\perp = M$.

Λύση: Ας είναι P, Q οι ορθογώνιες προβολές στους υπόχωρους M και $M^\perp$ αντίστοιχα. Κάθε $x \in H$ γράφεται ως $x = Px + Qx$, με $Px \in M$, $Qx \in M^\perp$.

$$\begin{aligned}
x \in (M^\perp)^\perp &\iff x \perp M^\perp \\
&\iff \forall y \in M^\perp : (x,y) = 0 \\
&\iff \forall y \in M^\perp : (Px+Qx,y) = 0 \\
&\iff \forall y \in M^\perp : (Qx,y) = 0 \\
&\iff Qx = 0 \\
&\iff x \in M.
\end{aligned}$$

Πρόβλημα 3. Στο χώρο Hilbert $\ell^2(\mathbb{N})$ δώστε ένα παράδειγμα *γνήσιου* γραμμικού υπόχωρου M (αναγκαστικά όχι κλειστού) ώστε να ισχύει $M^\perp = \{0\}$.

Λύση: Πάρτε τον υπόχωρο M όλων των ακολουθιών που είναι τελικά 0. Είναι πολύ εύκολο να δει κανείς ότι αυτό είναι γραμμικός υπόχωρος. Ας είναι τώρα $x = (x_1, x_2, \ldots) \in M^\perp$. Αυτό συνεπάγεται ότι για κάθε $n \ge 1$ το x είναι ορθογώνιο προς όλες τις ακολουθίες που είναι 0 από τη θέση $n+1$ και μετά, άρα και με την ακολουθία $(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}, 0, 0, \ldots)$. Όμως το εσωτερικό γινόμενο αυτής της ακολουθίας με το x είναι η ποσότητα $|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2$, άρα $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ για κάθε n, οπότε $x = 0$.

Πρόβλημα 4. Αν $R > 0$ και $B = \left\{x \in \ell^2(\mathbb{N}) : \|x\| \le R\right\}$ δείξτε ότι το σύνολο B είναι κλειστό αλλά όχι συμπαγές.

Λύση: Το ότι το B είναι κλειστό είναι απλά συνέπεια του

$$x_n \to x \implies \|x_n\| \to \|x\|.$$

Για να δείξουμε ότι το B δεν είναι συμπαγές αρκεί να βρούμε μια ακολουθία στοιχείων του που δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Αν είναι e_n η συνηθισμένη (ή οποιαδήποτε άλλη) ορθοκανονική βάση του $\ell^2(\mathbb{N})$ πάρτε την ακολουθία $x_n = Re_n$. Για κάθε $m \ne n$ έχουμε $\|x_m - x_n\| = R\sqrt{2}$ άρα καμιά υπακολουθία της x_n δε μπορεί να είναι Cauchy, άρα ούτε και συγκλίνουσα.

Πρόβλημα 5. Αν e_n είναι μια ορθοκανονική βάση σε ένα χώρο Hilbert και $f_n \in H$ είναι μια ακολουθία που έχει την ιδιότητα

$$\sum_n \|e_n - f_n\|^2 < 1,$$

δείξτε ότι οι (πεπερασμένοι) γραμμικοί συνδυασμοί των f_n είναι πυκνοί στον H.

Υπόδειξη: Αρκεί να δείξετε ότι δεν υπάρχει μη μηδενικό $x \in H$ που να είναι ορθογώνιο σε όλα τα f_n.

Λύση: Ακολουθώντας την υπόδειξη ας είναι $x \in H$ ορθογώνιο σε όλα τα f_n. Τότε

$$0 = (x, f_n) = (x, e_n) + (x, f_n - e_n)$$

άρα $|(x, e_n - f_n)| = |(x, e_n)|$ και από την ταυτότητα Parseval, την ανισότητα Cauchy-Schwartz και την ανισότητα της υπόθεσης έχουμε

$$\|x\|^2 = \sum_n |(x, e_n)|^2 = \sum_n |(x, e_n - f_n)|^2 \le \|x\|^2 \sum_n \|e_n - f_n\|^2 < \|x\|^2,$$

άρα $x = 0$.

Πρόβλημα 6. Δείξτε ότι αν οι πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ είναι όλοι διαφορετικοί τότε οι συναρτήσεις $e_j(x) = e^{i\lambda_j x}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες (ως στοιχεία του διανυσματικού χώρου των συναρτήσεων $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$).

Λύση: Υπάρχουν διάφορες λύσεις. Η παρακάτω χρησιμοποιεί μιγαδική ανάλυση.

Ας υποθέσουμε ότι για κάποια $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C} \setminus 0$, έχουμε $\sum_{j=1}^N c_n e^{i\lambda_j x} = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση $f(z) = \sum_{j=1}^N c_n e^{i\lambda_j z}$ για $z \in \mathbb{C}$ είναι αναλυτική παντού, και αφού μηδενίζεται για όλα τα πραγματικά z τότε μηδενίζεται (αρχή αναλυτικής συνέχισης) σε όλα τα $z \in \mathbb{C}$.

Ας είναι $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_N$. Για $z = -it$, $t \in \mathbb{R}$, έχουμε λοιπόν

$$0 = \sum_{j=1}^N c_j e^{\lambda_j t}.$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη με $e^{\lambda_N t}$ και αφήνοντας $t \to +\infty$ παίρνουμε αντίφαση.

Πρόβλημα 7. (α) Αν $a_n, b_n, n = 1, 2, \ldots, N$ είναι μιγαδικοί αριθμοί και $B_k = \sum_{n=1}^k b_n$ δείξτε

$$\sum_{n=M}^N a_n b_n = a_N B_N - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N-1} (a_{n+1} - a_n) B_n.$$

(β) Αν $a_n \to 0$ είναι φθίνουσα πραγματική ακολουθία και τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\sum_n b_n$ είναι φραγμένα δείξτε ότι η σειρά $\sum_n a_n b_n$ συγκλίνει.

Λύση: (α) Το άθροισμα στο δεξί μέλος το γράφουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{n=M}^{N-1} (a_{n+1} - a_n) B_n &= \sum_{n=M}^{N-1} a_{n+1} B_n - \sum_{n=M}^{N-1} a_n B_n \\
&= \sum_{n=M+1}^{N} a_n B_{n-1} - \sum_{n=M}^{N-1} a_n B_n \\
&= \sum_{n=M+1}^{N-1} a_n (B_{n-1} - B_n) + a_N B_{N-1} - a_M B_M \\
&= -\sum_{n=M+1}^{N-1} a_n b_n + a_N B_{N-1} - a_M B_M.
\end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε στην ισότητα που έχουμε να αποδείξουμε και επαληθεύουμε. Ο τύπος αυτός λέγεται τύπος της άθροισης κατά μέρη και είναι το αντίστοιχο της ολοκλήρωσης κατά μέρη για αθροίσματα.

(β) Αρκεί να δείξουμε ότι η σειρά είναι Cauchy, δηλ. ότι αν τα M, N είναι αρκετά μεγάλα τότε το αριστερό μέλος του τύπου στο (α) είναι όσο θέλουμε μικρό. Στο δεξί μέλος αφού τα B_n είναι φραγμένα οι δύο πρώτοι όροι τείνουν στο 0. Το άθροισμα φράσσεται κατ' απόλυτο τιμή από το μέγιστο των B_n (που είναι μια πεπερασμένη σταθερά) επί το $\sum_{n=M}^{N-1} |a_{n+1} - a_n|$, που λόγω της μονοτονίας φράσσεται από το $|a_M|$ που επίσης γίνεται όσοδήποτε μικρό.

Πρόβλημα 8. Αν $c_n \in [0, \infty)$ έχει το 0 ως σημείο συσσώρευσης δείξτε ότι υπάρχει αρίθμηση των ρητών $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \ldots\}$ τέτοια ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \sum_{r_n \le x} c_n$$

να είναι παντού πεπερασμένη.

Λύση: Το πρόβλημα ισοδυναμεί με το να κατανείμουμε τις τιμές c_n από μια σε κάθε ρητό αριθμό, με τρόπο ώστε η συνάρτηση $f(x)$ παραπάνω να είναι πεπερασμένη (η τιμή c_n τοποθετείται πάνω στο ρητό r_n).

Έστω $A = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$ και ας πούμε ότι η ακολουθία c_{n_k}, $k \in \mathbb{N}$, είναι τέτοια ώστε $\sum_{k=1}^{\infty} c_{n_k} < \infty$. Για μια αρίθμηση του A επιλέγουμε για το k στοιχείο του A το βάρος c_{n_k}. Τις υπόλοιπες τιμές της c_n, ας τις ονομάσουμε c_{m_k} τις τοποθετούμε (με οποιοδήποτε τρόπο) πάνω στα στοιχεία του $\mathbb{N}$.
