Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Μεταπτυχιακό Μάθημα «Πραγματική Ανάλυση»

Χειμερινό Εξάμηνο 2016-17 —- Διδάσκων: Μιχάλης Κολουντζάκης

Λύσεις Φυλλαδίου Ασκήσεων 1 – 22-9-2016. παραδοτέες 29-9-2016 στο μάθημα

Πρόβλημα 1. Έστω $X = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ και Σ η σ-άλγεβρα που παράγουν τα υποσύνολα του X:

$$\{0, 1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \ldots.$$

Περιγράψτε τις μετρήσιμες συναρτήσεις $X \to \mathbb{R}$ ως προς τη Σ.

Λύση: Τα στοιχεία της Σ είναι όλες οι ενώσεις κάποιων (αναγκαστικά αριθμήσιμων στο πλήθος) από τα σύνολα $I_k = \{2k, 2k+1\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Είναι φανερό ότι αυτή η κλάση συνόλων είναι σ-άλγεβρα, και ότι δεν υπάρχει μικρότερη σ-άλγεβρα που να περιέχει τα I_k.

Αν $f : X \to \mathbb{R}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση τότε για κάθε k πρέπει να ισχύει $f(2k) = f(2k+1)$, αλλιώς, αν $x \in \mathbb{R}$ ένας αριθμός ανάμεσα στις δύο τιμές $f(2k), f(2k+1)$, το μετρήσιμο σύνολο $f^{-1}((x, \infty))$ περιέχει μόνο ένα από τα $2k, 2k+1$ και άρα δεν θα μπορούσε να είναι μετρήσιμο σύνολο.

Ανίστροφα, αν η f είναι σταθερή σε κάθε I_k τότε $f^{-1}(A)$, για οποιοδήποτε $A \subseteq \mathbb{R}$, είναι ένωση από κάποια από τα I_k και άρα μετρήσιμο σύνολο.

Άρα οι μετρήσιμες συναρτήσεις είναι ακριβώς αυτές που είναι σταθερές σε όλα τα I_k.

Πρόβλημα 2. Έστω Σ εκείνα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που είναι αριθμήσιμα ή τα συμπληρώματα τους είναι αριθμήσιμα. Δείξτε ότι το Σ είναι μια σ-άλγεβρα πάνω στο $\mathbb{R}$.

Λύση: $\emptyset$ και $\mathbb{R}$ ανήκουν προφανώς στη Σ, και είναι φανερό ότι $A \in \Sigma \implies A^c \in \Sigma$. Μένει να δείξουμε ότι αν $A_1, A_2, \ldots \in \Sigma$ τότε και η ένωσή τους είναι στο Σ. Αν όλα τα A_j είναι αριθμήσιμα τότε και η ένωσή τους είναι και άρα είναι στο Σ. Αν κάποιο από τα A_j δεν είναι αριθμήσιμο, έστω π.χ. το A_1, τότε A_1^c είναι αριθμήσιμο και αφού

$$\left(\bigcup_n A_n\right)^c = \bigcap_n A_n^c \subseteq A_1^c,$$

έχουμε ότι η ένωσή τους έχει αριθμήσιμο συμπλήρωμα (αφού περιέχεται στο A_1^c που είναι αριθμήσιμο) και άρα είναι στη Σ.

Πρόβλημα 3. Αν Σ είναι μια σ-άλγεβρα πάνω στο σύνολο X και $f : Y \to X$ είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση, δείξτε ότι το σύνολο $\left\{f^{-1}(A) : A \in \Sigma\right\}$ είναι μια σ-άλγεβρα πάνω στο Y.

Λύση: Επαληθεύουμε ότι ισχύουν όλες οι ιδιότητες της σ-άλγεβρας: $\emptyset = f^{-1}(\emptyset)$, $Y = f^{-1}(X)$, $(f^{-1}(A))^c = f^{-1}(A^c)$ και, τέλος,

$$\bigcup_n f^{-1}(A_n) = f^{-1}\left(\bigcup_n A_n\right).$$

Πρόβλημα 4. Αν $f, g : X \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμες (ως προς κάποια σ-άλγεβρα Σ του X) δείξτε ότι τα σύνολα

$$\{x \in X : f(x) < g(x)\}, \quad \{x \in X : f(x) = g(x)\}$$

είναι μετρήσιμα υποσύνολα του X.

Λύση: Έχουμε αποδείξει ότι $f-g$ μετρήσιμη. Το πρώτο σύνολο είναι το $(f-g)^{-1}((-\infty,0))$, άρα μετρήσιμο, και το δεύτερο είναι το $\{f>g\}^c \cap \{f<g\}^c$, άρα και αυτό μετρήσιμο.

Πρόβλημα 5. Το σύνολο $\mathbb{R}^2$ μπορεί να γίνει μετρικός χώρος είτε με την Ευκλείδια μετρική

$$d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2},$$

είτε με την ℓ^1 μετρική

$$\rho((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = |x_1-y_1|+|x_2-y_2|.$$

Δείξτε ότι μια ακολουθία σημείων του $\mathbb{R}^2$ συγκλίνει σε ένα σημείο του $\mathbb{R}^2$ ως προς την Ευκλείδια μετρική αν και μόνο αν συγκλίνει ως προς το ίδιο σημείο ως προς την ℓ^1 μετρική.

Λύση: Εύκολα δείχνει κανείς (π.χ. υψώνοντας στο τετράγωνο ή χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwartz) ότι για κάθε $a,b\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$\sqrt{|a|^2+|b|^2} \le |a|+|b| \le \sqrt{2}\sqrt{|a|^2+|b|^2}.$$

Αν $x^n=(x_1^n,x_2^n)$ και $x=(x_1,x_2)$ είναι σημεία στο $\mathbb{R}^2$ τότε έπεται ότι

$$d(x^n,x)\le \rho(x^n,x)\le \sqrt{2}d(x^n,x),$$

απ' όπου προκύπτει ότι οι δύο ακολουθίες $d(x^n,x)$ και $\rho(x^n,x)$ πηγαίνουν μαζί στο 0.

Πρόβλημα 6. Σε ένα μετρικό χώρο X *ανοιχτό κάλυμμα ενός συνόλου* A είναι μια οικογένεια G_i, $i\in I$, από ανοιχτά σύνολα τέτοια ώστε $A\subseteq\bigcup_{i\in I}G_i$. (Εδώ I είναι ένα οποιοδήποτε σύνολο *δεικτών* του οποίου τα στοιχεία έχουν ως μοναδικό τους ρόλο το να ονοματίζουν τα διάφορα ανοιχτά σύνολα G_i.)

Ένα σύνολο $K\subseteq X$ λέγεται *συμπαγές* αν κάθε ανοιχτό κάλυμμα του K έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα (οποτεδήποτε δηλαδή καλύψουμε το K με κάποια ανοιχτά σύνολα τότε υπάρχουν πεπερασμένα στο πλήθος από αυτά που αρκούν για την κάλυψη).

(α) Δείξτε ότι κάθε συμπαγές σύνολο είναι κλειστό (δηλ. το συμπλήρωμα του είναι ανοιχτό).

(β) Δείξτε επίσης ότι αν ένα υποσύνολο ενός συμπαγούς συνόλου είναι κλειστό τότε είναι και συμπαγές.

Λύση: Γράφουμε $d(\cdot,\cdot)$ για τη μετρική του χώρου.

(α) Αν $x\in K^c$ τότε για κάθε $k\in K$ υπάρχει $r_k>0$ τέτοιο ώστε $d(x,k)>2r_k$. Αφού K συμπαγές υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα του καλύμματος

$$K\subseteq\bigcup_{k\in K}B_{r_k}(k),$$

έστω το

$$K\subseteq\bigcup_{k\in F}B_{r_k}(k),$$

όπου F ένα πεπερασμένο υποσύνολο του K. Τότε η ανοιχτή μπάλα $B_r(x)$, όπου

$$r=\min\{r_k:\ k\in F\},$$

είναι μια ανοιχτή περιοχή του x που δε τέμνει το K, άρα έχουμε δείξει ότι K^c ανοιχτό, δηλ. K κλειστό. (Το r παραπάνω είναι θετικός αριθμός επειδή είναι το ελάχιστο *πεπερασμένου πλήθους* θετικών αριθμών.)

(β) Αν $B \subseteq K$ κλειστό και G_i, $i \in I$, κάποιο ανοιχτό κάλυμμα του B τότε αν προσθέσουμε στο κάλυμμα αυτό το ανοιχτό σύνολο B^c παίρνουμε ένα κάλυμμα του K, το οποίο πρέπει να έχει ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα, έστω το

$$G_1, G_2, \ldots, G_k, B^c.$$

Τότε το $G_1, G_2, \ldots, G_k$ αποτελεί ανοιχτό κάλυμμα του B. Έχουμε δείξει ότι κάθε ανοιχτό κάλυμμα του B έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Άρα το B είναι συμπαγές.

Πρόβλημα 7. (α) Δείξτε ότι αν K είναι συμπαγές σε ένα μετρικό χώρο X τότε κάθε ακολουθία στο K έχει συγκλίνουσα υπακολουθία με το όριό της μέσα στο K.

(β) Δείξτε επίσης ότι αν $f : K \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση που είναι συνεχής παντού στο K τότε υπάρχει σημείο στο K όπου «πιάνεται» το μέγιστο της f.

Λύση: (α) Αν η ακολουθία $x_n \in K$ δεν έχει σημείο συσσώρευσης στο K τότε κάθε $k \in K$ έχει μια ανοιχτή περιοχή που περιέχει το πολύ ένα στοιχείο της x_n. Αυτές οι ανοιχτές περιοχές αποτελούν ένα ανοιχτό κάλυμμα του K και άρα υπάρχουν πεπερασμένες από αυτές που καλύπτουν το K, πράγμα το οποίο δείχνει ότι το πλήθος των x_n είναι πεπερασμένο. Μα τότε η ακολουθία x_n παίρνει την ίδια τιμή άπειρες φορές και αυτό είναι φυσικά μια συγκλίνουσα υπακολουθία της x_n.

(β) Έστω $M = \sup\{f(k) : k \in K\}$ (πεπερασμένο ή άπειρο). Τότε υπάρχει $k_n \in K$ τέτοια ώστε $f(k_n) \to M$. Αν $k \in K$ είναι σημείο συσσώρευσης της k_n τότε, από τη συνέχεια της f, έχουμε $f(k) = M$.

Πρόβλημα 8. (α) Ας είναι $A_1, A_2, A_3, \ldots$ μια ακολουθία υποσυνόλων του X, που είναι όλα τα στοιχεία της σ-άλγεβρας Σ. Ορίζουμε για κάθε $x \in X$ το στοιχείο της Σ

$$C_x = \bigcap_{x \in A_i} A_i.$$

Δείξτε ότι αν δύο σύνολα C_x και C_y τέμνονται τότε είναι ίσα.

(β) Δείξτε, χρησιμοποιώντας το (α), ότι αν μια σ-άλγεβρα είναι άπειρη τότε δε μπορεί να είναι αριθμήσιμη. (Παρατηρείστε ότι αν τα A_i είναι όλα τα στοιχεία της Σ τότε κάθε μετρήσιμο σύνολο «φτιάχνεται» ως ένωση από κάποια C_x.)

Λύση: (α) Αφού τα A_j είναι όλα τα στοιχεία της Σ έπεται ότι το C_x είναι το ελάχιστο μετρήσιμο σύνολο που περιέχει το x (δηλ. κάθε άλλο μετρήσιμο σύνολο που περιέχει το x περιέχει και το C_x). Αν $z \in C_x$ τότε λοιπόν $C_z \subseteq C_x$ αφού το σύνολο C_x είναι μετρήσιμο και περιέχει το z. Αν το x δεν ανήκει στο C_z τότε το μετρήσιμο σύνολο $C_x \setminus C_z$ περιέχει το x και είναι αυστηρά μικρότερο του C_x (αφού δεν περιέχει το z), άτοπο, άρα $x \in C_z$ και, άρα, $C_x \subseteq C_z$. Δείξαμε

$$z \in C_x \Longrightarrow C_z = C_x.$$

Αν λοιπόν $z \in C_x \cap C_y$ τότε $C_x = C_z = C_y$, όπως έπρεπε να δείξουμε.

(β) Υποθέτουμε ότι η άπειρη σ-άλγεβρα Σ έχει αριθμήσιμα στο πλήθος στοιχεία, όπως στο (α). Αν $A \in \Sigma$ τότε $A = \bigcup_{a \in A} C_a$ αφού για κάθε $a \in A$ έχουμε $C_a \subseteq A$. Το πλήθος των διαφορετικών C_a δε μπορεί να είναι πεπερασμένο γιατί τότε και το πλήθος όλων των $A \in \Sigma$ θα ήταν πεπερασμένο. Άρα υπάρχουν άπειρα διαφορετικά C_a και όλες οι αριθμήσιμες ενώσεις αυτών είναι στοιχεία της Σ. Σε κάθε αριθμήσιμο υποσύνολο δηλ. του συνόλου των διαφορετικών C_a αντιστοιχεί κι ένα διαφορετικό στοιχείο της Σ. (Εδώ χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα του (α).)

Όμως το πλήθος των αριθμήσιμων υποσυνόλων ενός άπειρου συνόλου είναι υπεραριθμήσιμο (αφού τα αριθμήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{N}$ είναι στο πλήθος υπεραριθμήσιμα, αφού εύκολα μπορούμε να τα αντιστοιχίσουμε με τους πραγματικούς αριθμούς του $(0, 1)$), άρα η αρχική μας υπόθεση δε μπορεί να ισχύει.