Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Μεταπτυχιακό Μάθημα «Πραγματική Ανάλυση»

Χειμερινό Εξάμηνο 2016-17 —- Διδάσκων: Μιχάλης Κολουντζάκης

Φυλλάδιο Ασκήσεων 8 – 24-11-2016. Παραδοτέες 1-12-2016 στο μάθημα

Πρόβλημα 1. Έστω μ ένα θετικό μέτρο και $f \in L^1(\mu)$. Ορίζουμε το μέτρο $d\nu = f d\mu$. (Αυτό σημαίνει ότι $\nu(E) = \int_E f\, d\mu$ για κάθε μετρήσιμο E.) Δείξτε ότι $d|\nu| = |f| d\mu$.

Στο βιβλίο σας υπάρχει αυτό ως συνέπεια του θ. Radon-Nikodym. Δεν το χρειάζεστε.

Υπόδειξη: Κάντε το πρώτα για πραγματική f.

Πρόβλημα 2. Αν λ_1, λ_2 είναι δύο μιγαδικά μέτρα στην ίδια σ-άλγεβρα αποδείξτε ότι

$$|\lambda_1 + \lambda_2|(E) \le |\lambda_1|(E) + |\lambda_2|(E)$$

για κάθε μετρήσιμο E.

Πρόβλημα 3. Αν λ_1, λ_2 είναι δύο μιγαδικά μέτρα στην ίδια σ-άλγεβρα τέτοια ώστε $\lambda_1 \perp \lambda_2$ δείξτε ότι

$$|\lambda_1 + \lambda_2| = |\lambda_1| + |\lambda_2|.$$

Πρόβλημα 4. Βρείτε το μέτρο $|\delta_0 - \delta_1|$ (με πλήρη αιτιολόγηση).

Πρόβλημα 5. Έστω m το μέτρο Lebesgue και $d\mu = d\delta_0 - \mathbf{1}_{[-1,1]} dm$. Βρείτε το μέτρο $|\mu|$ (με πλήρη αιτιολόγηση).

Πρόβλημα 6. Αν μ, ν είναι δύο μέτρα πιθανότητας πάνω στην ίδια σ-άλγεβρα Σ (σε ένα χώρο X) και $\alpha = \mu - \nu$ δείξτε ότι

$$|\alpha|(X) = 2 \sup_{A \in \Sigma} |\alpha(A)|. \tag{1}$$

Πρόβλημα 7. Βρείτε ακολουθία $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}^+$, συνεχείς, με $\lim_n \int_0^1 f_n(x)\, dx = +\infty$, και για κάθε x στο πεδίο ορισμού να έχουμε

$$\liminf_n f_n(x) = 0, \quad \limsup_n f_n(x) = 1.$$

Πρόβλημα 8. Ας είναι $B_1, \ldots, B_n$ μπάλες στο $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι υπάρχει $J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ έτσι ώστε οι μπάλες $B_j, j \in J$, είναι ανά δύο ξένες και

$$\bigcup_{i=1}^n B_i \subseteq \bigcup_{j \in J} 3B_j,$$

όπου με $3B$ συμβολίζουμε μια μπάλα με ίδιο κέντρο με την μπάλλα B και με τριπλάσια ακτίνα.

Υπόδειξη: Αν δύο μπάλες τέμνονται τότε η τριπλάσια μπάλα της μεγαλύτερης από τις δύο περιέχει την άλλη.

Πρόβλημα 9. Αποδείξτε ότι το σύνολο των αρρήτων δεν είναι F_σ (αριθμήσιμη ένωση κλειστών).