

1 Έστω  $X_1, X_2, \dots$  ανεξάρτητες, με μέση τιμή 0, τετραγωνικά ολοκληρώσιμες, και έστω  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . Ορίζουμε  $T_k = \sum_{j=1}^k a_j X_j$ .

Να δείξετε ότι για κάθε  $x > 0$ ,

$$\mathbb{P} \left[ \max_{1 \leq k \leq n} |T_k| \geq x \right] \leq \frac{1}{x^2} \sum_{j=1}^n a_j^2 \sigma^2(X_j).$$

Εφαρμόστε αυτό το αποτέλεσμα όταν  $a_j = j^{-1}$ . Ποια συνθήκη πάνω στη σειρά  $\sum j^{-2} \sigma^2(X_j)$  εγγυάται τη σχεδόν σίγουρη σύγκλιση της  $\sum X_j/j$ ;

2 Υποθέστε ότι  $X_1, X_2, \dots$  είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με μέση τιμή 0, και  $\sigma^2(X_i) = \sigma^2 < \infty$ . Έστω  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ .

(1) Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Chebyshev και το λήμμα Borel-Cantelli δείξτε ότι

$$\frac{S_{2^r}}{2^r} \rightarrow 0$$

σχεδόν σίγουρα.

(2) Δείξτε ότι

$$\max_{2^r < k \leq 2^{r+1}} \left| \frac{S_k}{k} \right| \leq \left| \frac{S_{2^r}}{2^r} \right| + \max_{2^r < k \leq 2^{r+1}} \left| \frac{S_k - S_{2^r}}{2^r} \right|.$$

(3) Δείξτε, χρησιμοποιώντας τη μεγιστική ανισότητα του Kolmogorov, ότι για ακεραίους  $m < n$  και κάθε  $\epsilon > 0$

$$\mathbb{P} \left[ \max_{m < k \leq n} |S_k - S_m| \geq \epsilon \right] \leq \frac{1}{\epsilon^2} (n - m) \sigma^2.$$

(4) Αποδείξτε ότι

$$\max_{2^r < k \leq 2^{r+1}} \left| \frac{S_k - S_{2^r}}{2^r} \right| \rightarrow 0$$

σχεδόν σίγουρα και συμπεράνετε ότι  $S_n/n \rightarrow 0$  σχεδόν σίγουρα.

3

(1) Βρείτε παράδειγμα ανεξάρτητων  $X_n$  με μέση τιμή 0 και  $\sum_n \sigma^2(X_n) = +\infty$  τ.ώ.  $\sum_n X_n$  συγκλίνει σχεδόν σίγουρα.

Υπόδειξη: Πάρτε τυχαίες μεταβλητές που να είναι 0 με πολύ μεγάλη πιθανότητα.

(2) Βρείτε παράδειγμα TM  $X_n$  (όχι ανεξάρτητες) με  $\sum_n \sigma^2(X_n) < \infty$  τ.ώ.  $\sum_n X_n$  δε συγκλίνει, σχεδόν σίγουρα.

(3) Αν  $X_n$  ανεξάρτητες με  $\sum_n \sigma^2(X_n) < \infty$  έπεται ότι  $\sum_n |X_n|$  συγκλίνει σχεδόν σίγουρα;

(4) Αν  $X_n$  ανεξάρτητες με  $\sum_n \sigma^2(X_n) < \infty$  δείξτε ότι η σειρά  $\sum_n X_n$  συγκλίνει κατά  $L^2$ .

4 Δώστε παράδειγμα από ανεξάρτητες και ισόνομες TM  $X_n$  με  $\mathbb{E}[|X_n|] = +\infty$  τ.ώ. η ακολουθία  $S_n/n$  σχεδόν σίγουρα δε συγκλίνει. (Εδώ  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ .)

5 Δείξτε τα παρακάτω.

(1) Αν  $1 \leq p \leq \infty$  δείξτε ότι αν  $X_n \rightarrow X$  κατά  $L^p$  τότε  $X_n \rightarrow X$  και κατά πιθανότητα.

(2) Αν  $X_n \rightarrow X$  σχεδόν σίγουρα τότε  $X_n \rightarrow X$  και κατά πιθανότητα.

(3) Σύγκλιση κατά πιθανότητα δε συνεπάγεται σύγκλιση σχεδόν σίγουρα.

(4) Σύγκλιση κατά πιθανότητα δε συνεπάγεται σύγκλιση κατά  $L^1$ .

(5) Σύγκλιση σχεδόν σίγουρα δε συνεπάγεται σύγκλιση κατά  $L^1$ .

(6) Αν  $X_n \rightarrow X$  κατά πιθανότητα τότε υπάρχει υπακολουθία της  $X_n$  που συγκλίνει στη  $X$  σχεδόν σίγουρα.