Πανεπιστημιο Κρητησ – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων

Θ. Πιθανοτήτων (μεταπτ.) - Άνοιξη 2025-26 - Φυλλάδιο Ασκήσεων 5 - Μ. Κολουντζάκης

Τελευταία ενημέρωση: 9 Απριλίου 2026

---

1 Έστω $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες, με μέση τιμή 0, τετραγωνικά ολοκληρώσιμες, και έστω $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε $T_k = \sum_{j=1}^k a_j X_j$.

Να δείξετε ότι για κάθε $x > 0$,

$$\mathbb{P}\left[\max_{1\le k\le n} |T_k| \ge x\right] \le \frac{1}{x^2} \sum_{j=1}^n a_j^2 \sigma^2(X_j).$$

Εφαρμόστε αυτό το αποτέλεσμα όταν $a_j = j^{-1}$. Ποια συνθήκη πάνω στη σειρά $\sum j^{-2}\sigma^2(X_j)$ εγγυάται τη σχεδόν σίγουρη σύγκλιση της $\sum X_j/j$;

2 Υποθέστε ότι $X_1, X_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με μέση τιμή 0, και $\sigma^2(X_i) = \sigma^2 < \infty$. Έστω $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

(1) Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Chebyshev και το λήμμα Borel-Cantelli δείξτε ότι

$$\frac{S_{2^r}}{2^r} \to 0$$

σχεδόν σίγουρα.

(2) Δείξτε ότι

$$\max_{2^r<k\le 2^{r+1}} \left|\frac{S_k}{k}\right| \le \left|\frac{S_{2^r}}{2^r}\right| + \max_{2^r<k\le 2^{r+1}} \left|\frac{S_k - S_{2^r}}{2^r}\right|.$$

(3) Δείξτε, χρησιμοποιώντας τη μεγιστική ανισότητα του Kolmogorov, ότι για ακεραίους $m < n$ και κάθε $\epsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left[\max_{m<k\le n} |S_k - S_m| \ge \epsilon\right] \le \frac{1}{\epsilon^2}(n-m)\sigma^2.$$

(4) Αποδείξτε ότι

$$\max_{2^r<k\le 2^{r+1}} \left|\frac{S_k - S_{2^r}}{2^r}\right| \to 0$$

σχεδόν σίγουρα και συμπεράνετε ότι $S_n/n \to 0$ σχεδόν σίγουρα.

3

(1) Βρείτε παράδειγμα ανεξάρτητων X_n με μέση τιμή 0 και $\sum_n \sigma^2(X_n) = +\infty$ τ.ώ. $\sum_n X_n$ συγκλίνει σχεδόν σίγουρα.

Υπόδειξη: Πάρτε τυχαίες μεταβλητές που να είναι 0 με πολύ μεγάλη πιθανότητα.

(2) Βρείτε παράδειγμα ΤΜ X_n (όχι ανεξάρτητες) με $\sum_n \sigma^2(X_n) < \infty$ τ.ώ. $\sum_n X_n$ δε συγκλίνει, σχεδόν σίγουρα.

(3) Αν X_n ανεξάρτητες με $\sum_n \sigma^2(X_n) < \infty$ έπεται ότι $\sum_n |X_n|$ συγκλίνει σχεδόν σίγουρα;

(4) Αν X_n ανεξάρτητες με $\sum_n \sigma^2(X_n) < \infty$ δείξτε ότι η σειρά $\sum_n X_n$ συγκλίνει κατά L^2.

4 Δώστε παράδειγμα από ανεξάρτητες και ισόνομες ΤΜ X_n με $\mathbb{E}[|X_n|] = +\infty$ τ.ώ. η ακολουθία S_n/n σχεδόν σίγουρα δε συγκλίνει. (Εδώ $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.)

5 Δείξτε τα παρακάτω.

(1) Αν $1 \le p \le \infty$ δείξτε ότι αν $X_n \to X$ κατά L^p τότε $X_n \to X$ και κατά πιθανότητα.

(2) Αν $X_n \to X$ σχεδόν σίγουρα τότε $X_n \to X$ και κατά πιθανότητα.

(3) Σύγκλιση κατά πιθανότητα δε συνεπάγεται σύγκλιση σχεδόν σίγουρα.

(4) Σύγκλιση κατά πιθανότητα δε συνεπάγεται σύγκλιση κατά L^1.

(5) Σύγκλιση σχεδόν σίγουρα δε συνεπάγεται σύγκλιση κατά L^1.

(6) Αν $X_n \to X$ κατά πιθανότητα τότε υπάρχει υπακολουθία της X_n που συγκλίνει στη X σχεδόν σίγουρα.