

Τρίτο (τελικό) διαγώνισμα, 18 Ιανουαρίου 2012

1. Αποδείξτε την ανισότητα

$$\frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \dots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}, \quad \text{για κάθε } n \geq 1.$$

2. Με πόσους τρόπους μπορούμε να διατάξουμε τους αριθμούς $1, 2, \dots, 3n$ ($n \geq 1$) έτσι ώστε στις θέσεις που είναι πολλαπλάσια του 3 (δηλ. στις θέσεις $3, 6, 9, \dots, 3n$) να υπάρχουν μόνο αριθμοί που είναι πολλαπλάσια του 3;

3. Έχουμε k αριθμημένα κουτιά και n αριθμημένα αντικείμενα, $k \leq n$. Κάθε κουτί χωράει ακριβώς ένα αντικείμενο. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε τα αντικείμενα στα κουτιά ούτως ώστε κανένα κουτί να μην είναι κενό; (Κάποια αντικείμενα δε χωράνε αν $n > k$ και μένουν εκτός των κουτιών.)

4. Αν $n \geq 2$ είναι άρτιος δείξτε ότι $\sum_{k=0}^{n/2} \binom{n}{2k} = 2^{n-1}$.

5. Έστω $G(n, r)$, $1 \leq r < n$, το απλό γράφημα με κορυφές όλα τα r -μελή υποσύνολα του $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. Δύο κορυφές A, B του $G(n, r)$ συνδέονται με ακμή αν και μόνο αν $|A \cap B| = 1$.

(α) Σχεδιάστε τα γραφήματα $G(4, 1)$ και $G(4, 2)$.

(β) Πόσες κορυφές έχει το $G(n, r)$;

(γ) Πόσες ακμές έχει το $G(n, r)$;

6. Έστω G ένα δέντρο χωρίς κορυφές βαθμού 2. Δείξτε ότι τουλάχιστον οι μισές κορυφές του G είναι φύλλα.

7. Έστω $G = (V, E)$ ένα απλό γράφημα. Το γράφημα ακμών (line graph) του G , που το συμβολίζουμε με $L(G) = (V', E')$, είναι ένα απλό γράφημα που έχει ως κορυφές του τις ακμές του G , έχουμε δηλ. $V' = E$. Δύο κορυφές του $L(G)$ συνδέονται με ακμή στο $L(G)$ αν και μόνο αν οι αντίστοιχες ακμές του G έχουν κοινή κορυφή.

(α) Σχεδιάστε το γράφημα ακμών των γραφημάτων C_4 και K_4 (κύκλος με 4 κορυφές και πλήρες γράφημα με 4 κορυφές).

(β) Δείξτε ότι το πλήθος των ακμών του $L(G)$ είναι $|E'| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} (\deg_G v)^2 - |E|$.

ΚΑΝΟΝΕΣ:

(α) Διάρκεια διαγωνίσματος: 2 ώρες. Δεν επιτρέπεται η χρήση σημειώσεων, βιβλίων ή υπολογιστικών μηχανών.

(β) Δεν επιτρέπεται η έξοδός σας από την αίθουσα παρά μόνο αφού τελειώσετε και μόνο μετά από μία ώρα.

(γ) Επιστρέφεται το γραπτό σας, τα θέματα και όλα τα πρόχειρα που πήρατε.

(δ) Το κινητό σας τηλέφωνο πρέπει να είναι κλειστό, όχι απλά ανόητο.

Ανοιχτό τηλέφωνο συνεπάγεται μηδενισμό σας.

(ε) Οι αποδείξεις σας να είναι πλήρεις και να φαίνεται καθαρά τι υποθέτετε ως γνωστό. Έχει μεγάλη σημασία και το πώς γράφετε.